INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ
Modernizace studijního programu Matematika na PřF Univerzity Palackého v Olomouci
CZ.1.07/2.2.00/28.0141

Stieltjesův integrál (Kurzweilova teorie)

Vybrané kapitoly z matematické analýzy

Kód předmětů

KMA/VK1 (původně KMA/VKMA1) a KMA/VK2 (původně KMA/VKMA2)

Milan Tvrdý

Stieltjesův integrál

(Kurzweilova teorie)

Milan Tvrdý

„Il semble donc que les sommes de Riemann-Stieltjes aient encore un bel avenir devant elles en calcul intégral, et qu'elles pourront réserver encore, dans les mains d'habiles analystes, d'intéressantes surprises."

Jean Mawhin

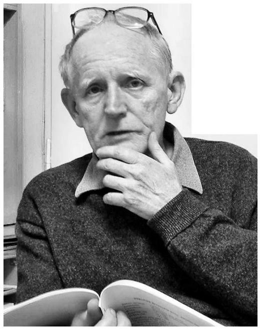
Obsah

Předmluva

Tento text je vlastně pokračováním monografie Štefana Schwabika *„Integrace v R (Kurzweilova teorie)“* [49] věnované teorii integrálu přes jednorozměrné intervaly. V této monografické učebnici se autorovi podařilo vysvětlit nejen klasické pojmy Newtonova i Riemannova integrálu, ale i integrálu McShaneova a především Kurzweilova. Poprvé byl tak širokému okruhu českých čtenářů (včetně studentů fakult s matematicko-fyzikálním zaměřením) předložen ucelený výklad jednoho z nejuznávanějších příspěvků české matematiky do pokladnice světové matematiky: součtové definice neabsolutně konvergentního integrálu. Tato definice náleží Jaroslavu Kurzweilovi a poprvé ji uvedl v práci publiko-

Thomas Joannes Stieltjes

Jaroslav Kurzweil



Štefan Schwabik

vané v roce 1957 v časopise Czechoslovak Mathematical Journal (viz [29]). Nový integrál, který se dnes ve světové matematické literatuře nazývá integrál Kurzweilův, resp. integrál Kurzweilův-Henstockův (nezávisle na J. Kurzweilovi publikoval definici analogického integrálu v roce 1960 specialista v teorii integrálu Ralph Henstock ze Spojeného království), se od té doby ukázal být velice inspirativním nejen pro teorii integrálu (zahrnuje klasické a dobře známé pojmy Riemannova a Newtonova integrálu včetně jejich nevlastních modifikací a obtížněji zvládnutelné integrály Lebesgueův a Perronův), ale i pro teorii diferenciálních a integrálních rovnic. Z hlediska metodického důraz kladený na Kurzweilův integrál umožnil Š. Schwabikovi soustředit se na neabsolutně konvergentní integrály, které ve starší metodice teorie integrálu byly považovány za velmi obtížně vysvětlitelné. Kurzweilův pojem integrálu je totiž ekvivalentní s integrálem Perronovým, který je neabsolutně konvergentní. Jeho definice přitom zdánlivě téměř mechanicky „kopíruje“ definici Riemannovu, která je pro studenta nejpřijatelnější svou názorností a výraznou geometrickou interpretací. Právě srovnání s Riemannovou definicí však ukazuje, jak důmyslná je její nenápadná, ale přitom velmi účinná Kurzweilova modifikace. Velkou výhodou je rovněž ten rys Kurzweilova integrálu, že nepotřebuje zobecnění na nevlastní integrály – platí pro něj totiž věta Hakeova typu (tj. věta o limitním přechodu vzhledem k mezím integrálu).

V integrálech Riemannově, Newtonově, Lebesgueově, Perronově, Kurzweilově se integruje daná funkce vzhledem k identické funkci. Některé fyzikální problémy si však vynutily rozšíření pojmu integrálu na integrál, ve kterém se daná funkce integruje vzhledem k funkci, která nemusí být obecně identita. Poprvé se takový integrál vyskytl ve slavném

Stieltjesově pojednání [60] z let 1894–5, věnovaném souvislostem konvergence řetězových zlomků a problému, jak popsat rozložení hmoty na hmotné úsečce, jsou-li známy všechny momenty této úsečky přirozených řádů.

Integrály tohoto typu jsou od té doby nazývány *Stieltjesovy integrály* a integrál funkce f (*integrand*) vzhledem k funkci g (*integrátor*) přes interval $[a,b]$ se od té doby značí $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$ K různým modifikacím definice, které časem vznikly, se pak přidávají zpravidla jména autorů těchto modifikací. Brzy se objevily integrály: Riemannův-Stieltjesův, Perronův-Stieltjesův či Lebesgueův-Stieltjesův. Dalším významným impulsem, který obrátil pozornost ke Stieltjesovu integrálu, byl fundamentální Rieszův výsledek z roku 1909 (viz [43]) o tom, že každý spojitý lineární funkcionál na prostoru spojitých funkcí může být vyjádřen pomocí Stieltjesova integrálu. Vzápětí, v roce 1910, dokázal H. Lebesgue (viz [31]), že pro spojitou funkci f a funkci g s konečnou variací lze pomocí vhodné substituce vyjádřit Stieltjesův integrál jako Lebesgueův integrál tvaru $\int_a^{v(b)} f(w(t))\,h(t)\,\mathrm{d}\,t,$ kde $v(x)$ je variace funkce g na intervalu $[a,x]$, w je zobecněná inverzní funkce k v, $w(t)=\inf\{s\in[a,b]:v(s)=t\}$ pro $t\in[a,b]$, a $h(t)=\mathrm{d}\,g(w(t))/\mathrm{d}\,t$ pro s.v. $t\in[a,v(b)]$. H. Lebesgue takto dospěl k pojmu Lebesgueova-Stieltjesova integrálu funkce f vzhledem ke $g.$ Několik let po Rieszově výsledku se v roce 1912 objevuje Stieltjesův integrál také v monografii O. Perrona [42]. V dalších zhruba dvou desetiletích byl Stieltjesův integrál a jeho modifikace předmětem bádání řady významných osobností teorie funkcí: W. H. Young ([69], 1914), C. J. de la Vallée Poussin ([64], 1917), E. B. Van Vleck ([65],1917), T. H. Hildebrandt ([11], 1917), L. C. Young ([67], 1927 a [68],1936), A. J. Ward ([66], 1936) a další. V roce 1933 věnoval S. Saks ve své slavné monografii [45] integrálu Lebesgueovu-Stieltjesovu a funkcím s konečnou variací celou kapitolu. Do dnešních dnů našly integrály Stieltjesova typu široké uplatnění v mnoha oblastech: např. v teorii křivkových integrálů, teorii pravděpodobnosti, teorii hystereze, teorii funkcionálně-diferenciálních, zobecněných diferenciálních rovnic ap. Historii teorie integrálu je věnována řada monografií. Není mi však známo, že by se některá z nich věnovala zevrubněji historii Stieltjesova integrálu. Existuje dokonce i znamenité dílko v češtině „*Malý průvodce historií integrálu*“ autorů Š. Schwabika a P. Šarmanové, které je nyní díky *České digitální matematické knihovně* volně přístupné na internetu. Žel, ani sem se Stieltjesův integrál nevešel. Pro znalce francouzštiny připomeňme alespoň historickou esej [38] J. Mawhina.

Vzhledem k omezenému přidělenému rozsahu nemohl Štefan Schwabik do své monografie zahrnout přirozené zobecnění Kurzweilova pojmu integrálu na Stieltjesovy integrály, ač jsme v té době už měli „Kurzweilovu teorii“ Stieltjesova integrálu v našich společných pracích (viz např. [58]) věnovaných zobecněným diferenciálním rovnicím do značné míry zpracovánu a připravenu. Je mou ctižádostí navázat na jeho počin a doplnit jeho monografii o teorii Stieltjesova integrálu s důrazem na Kurzweilovu definici a některé její aplikace. Výklad v této knize je rozdělen do 8 kapitol. V úvodní kapitole jsou stručně popsány dvě z mnoha motivací pro studium Stieltjesova integrálu: problém momentů a křivkové integrály. Zavedeno je tu též základní značení závazné pro celou knihu. Další tři kapitoly jsou přípravné a poskytují přehled o vlastnostech tříd funkcí, se kterými se v této knize nejčastěji pracuje: funkce s konečnou variací, funkce absolutně spojité a funkce regulované.

Rozsáhlá pátá kapitola je věnována klasickým definicím Riemannova-Stieltjesova integrálu a vlastnostem takto definovaných integrálů. Jádrem celé knihy je pak kapitola 6 věnovaná definici Stieltjesova integrálu v Kurzweilově smyslu. Jsou tu demonstrovány přednosti této definice: šíře třídy funkcí integrovatelných v tomto smyslu, široká škála vlastností takto definovaného integrálu, např. platnost velmi obecných vět o limitním přechodu včetně Hakeovy věty, o integraci per-partes a různých formách substituce. V závěrečných dvou kapitolách jsou popsány některé vybrané aplikace ve funkcionální analýze a v teorii zobecněných diferenciálních rovnic.

Samozřejmě bylo by možno pokračovat dále. Podstatnou část zde vyložené teorie Kurzweilova-Stieltjesova integrálu je možno přenést i na integraci v abstraktních prostorech (viz [53]–[56] a [40]). Významné uplatnění nachází Kurzweilův-Stieltjesův integrál v dnes velmi populární teorii dynamických systémů na „časových škálách" neboli „time scales" (česká terminologie se dosud neustálila), viz [59] a [41]. To je však už hudba budoucnosti a do této publikace se už nic víc nevejde. I tak její stávající rozsah výrazně převyšuje rozsah původně plánovaný.

Předkládaným textem bych rád také poněkud zaplnil stávající mezeru v české literatuře. V druhém dílu *Integrálního počtu* Vojtěcha Jarníka (viz [16]) jsou věnovány dvě kapitoly (III a X) výkladu teorie integrálu Lebesgueova-Stieltjesova, který ovšem vyžaduje značnou porci znalostí o teorii míry a přitom je méně obecný než integrál Kurzweilův-Stieltjesův. Celé monumentální a zakladatelské dílo Vojtěcha Jarníka bylo právě zpřístupněno na webových stránkách *České digitální matematické knihovny* a může tedy posloužit čtenářům k upřesnění některých zde pouze naznačených souvislostí s teorií míry. Pěkný, ale stručný úvod do teorie Riemannova-Stieltjesova integrálu je obsažen též v dnes již v podstatě nedostupných skriptech [18] J. Krále o teorii potenciálu z roku 1965. Podrobně je o různých formách Stieltjesova integrálu pojednáno v dnes již, bohužel, také těžko dostupných skriptech [33] J. Lukeše. Je třeba také zmínit rozsáhlý traktát J. Maříka [37] z roku 1952, který měl zejména zásadní význam pro propagaci Perronova i Perronova-Stieltjesova integrálu v našich krajích. (Také on je nyní dostupný na stránkách *České digitální matematické knihovny*.)

Pokud jde o cizojazyčnou literaturu, mohu doporučit čtenářům zajímajícím se o další souvislosti v rámci klasické teorie monografii [12] T. H. Hildebrandta a také nenápadnou, ale moderně pojatou monografii R. M. McLeoda [36] z roku 1981 zahrnující dokonce i Kurzweilův-Stieltjesův integrál. Další podněty může čtenář najít také v monografiích A. N. Kolmogorova a S. V. Fomina [17], E. Schechtera [46], W. Rudina [44] nebo skriptech J. Lukeše a J. Malého [35]. Dvě náročné monografie [26] a [27] J. Kurzweila z let 2000 a 2002 věnované topologickým problémům souvisejícím s integrací se stieltjesovské integrace přímo nedotýkají. Integrály a zobecněné diferenciální rovnice studované v Kurzweilově nejnovější monografii [28] však zahrnují Kurzweilův-Stieltjesův integrál i lineární zobecněné rovnice, kterými se zabýváme v kapitolách 6 a 8 této knihy. Vynikajícím doplňkem této publikace bude, kromě již zmíněné Schwabikovy monografie [49], také jeho další monografie [48] věnovaná speciálně zobecněným diferenciálním rovnicím.

Tento text vznikal po několik let jako pomůcka pro posluchače výběrových přednášek na Přírodovědecké fakultě Palackého univerzity v Olomouci v rámci výuky matematické analýzy. Jsem vděčen *Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky Přírodovědecké fakulty Palackého univerzity* za to, že mi umožňuje tyto přednášky konat, a studentům několika ročníků za to, že bez viditelného reptání mé přednášky navštěvovali. Kniha by měla být srozumitelná všem, kdo absolvovali základní kursy matematické a funkcionální analýzy. Ve výkladu se snažím vyhýbat teorii míry, jak je to jen možné. Nicméně ti, kteří mají aspoň základní znalosti o této oblasti, budou mít výhodu při porozumění některým (víceméně okrajovým) pasážím této knihy. První stadium bylo zachyceno v knize [63], která se stala i základem pro tento text, který je zamýšlen jako opora pro přednášku *Vybrané kapitoly z matemické analýzy*, která je rozdělena na dvě části a probírá se během zimního i letního semestru. Oproti knize [63], byly opraveny některé překlepy a chyby, které se do ní dostaly, a v řadě případů jsem se i pokusil o vylepšení některých formulací. Oproti knize byla do tohoto textu zahrnuta navíc i řada nových pasáží. Zejména se jedná o variaci na elementárních množinách, kriterium kompaktnosti v prostoru regulovaných funkcí, integraci přes elementární množiny a nový důkaz Osgoodovy věty. Během semestrálního kursu není možné probrat veškerý obsah tohoto textu. Při výkladu se v zimním semestru soustředíme na tématiku obsaženou v kapitolách 2-4 a na začátku kapitoly 6. Zbývající části kapitoly 6 a dalším kapitolám se budeme věnovat v letním semestru ve druhé části této přednášky. Kapitoly 2-4 poskytují přehled o vlastnostech tříd funkcí, se kterými se v této přednášce nejvíce pracuje: funkce s konečnou variací, funkce absolutně spojité a funkce regulované. Rozsáhlá pátá kapitola je věnována klasickým definicím Riemannova-Stieltjesova integrálu a vlastnostem takto definovaných integrálů. Této tématiky se při přednášce dotkneme pouze okrajově a uvedeme základní definice a upozorníme na ty jejich vlastnosti, které se výrazně liší od vlastností integrálu, kterému se budeme zejména věnovat a který nazveme integrál Kurzweilův-Stieltjesův. Integrál Kurzweilův-Stieltjesův je hlavním objektem přednášky. Jeho definici a základním vlastnostem je věnována objemná kapitola 6. Budeme demonstrovat přednosti této definice: šíře třídy funkcí integrovatelných v tomto smyslu, široká škála vlastností takto definovaného integrálu, např. platnost velmi obecných vět o limitním přechodu včetně Hakeovy věty, o integraci per-partes a různých formách substituce. Závěrečné dvě kapitoly jsou věnovány některým aplikacím KS integrálu ve funkcionální analýze a terii zobecněných diferenciálních rovnic.

Jak je obvyklé, odkazy na tvrzení či rovnice jsou dvoumístná čísla, první číslo označuje kapitolu, druhé pořadí v rámci kapitoly.

Závěrem předmluvy chci poděkovat za velkou pomoc mým vzácným kolegům Jaroslavu Kurzweilovi, Ireně Rachůnkové, Antonínu Slavíkovi, Jiřímu Šremrovi a Ivo Vrkočovi, kteří podrobně přečetli rukopis tohoto textu a pomohli mi odstranit mnohé nedostatky a vylepšit výklad. Text byl vysázen v systému LaTeX s využitím některých prvků stylu vyvinutého v Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação Universidade de São Paulo v São Carlos v Brazílii. Za jeho poskytnutí děkuji kolegyním Giselle Antunes Monteiro a Jaqueline Godoy Mesquita.

Kapitola 1

Úvod

Z mnoha motivací pro studium Stieltjesova integrálu jsou určitě důležité aplikace ve fyzice a geometrii: např. momenty či křivkové integrály. Stručné seznámení s těmito aplikacemi je obsaženo v kapitole 1 knihy [63]. Zde si ještě všimněme motivace, kterou nám poskytuje funkcionální analýza. Předpokládám, že posluchači již absolvovali aspoň základní kurs funkcionální analýzy. Nicméně, připomeňme si zde některé potřebné pojmy:

Nechť $\mathbb{X}$ je Banachův prostor s normou $x \in \mathbb{X} \to \|x\|_{\mathbb{X}}$. Lineárním zobrazením prostoru $\mathbb{X}$ do prostoru $\mathbb{R}$ reálných čísel říkáme *lineární funkcionály* na $\mathbb{X}$. Lineární funkcionál Φ na $\mathbb{X}$ se nazývá *spojitý* jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset \mathbb{X}$ prvků prostoru $\mathbb{X}$ takovou, že

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{X}$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x).$$

Je známo, že lineární funkcionál Φ na $\mathbb{X}$ je *spojitý* právě tehdy, když je ohraničený, tj. existuje číslo $K \in [0,\infty)$ takové, že $|\Phi(x)| \le K\,\|x\|_{\mathbb{X}}$ platí pro každé $x \in \mathbb{X}$. Prostor spojitých lineárních funkcionálů na Banachově prostoru $\mathbb{X}$ značíme $\mathbb{X}^*$ a nazýváme *duální* (nebo též *adjungovaný prostor*) k $\mathbb{X}$. Předpisem

$$\Phi \in \mathbb{X}^* \to \|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}} \le 1\}$$

je přirozeně definována norma na $\mathbb{X}^*$ a $\mathbb{X}^*$ je vzhledem k této normě také Banachův prostor. Jednou ze základních otázek funkcionální analýzy je nalezení representace spojitých lineárních funkcionálů na některých důležitých prostorech funkcí. Jedním z takových prostorů je pochopitelně prostor $\mathbb{C}[a,b]$ funkcí spojitých na uzavřeném ohraničeném intervalu $[a,b]$. Je známo, že tento prostor je lineární prostor vzhledem k přirozeně definovanému součtu funkcí a násobku skalárem a je to Banachův prostor vzhledem k supremální normě

$$\|x\| := \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\} \quad \text{pro } x \in \mathbb{C}[a,b]. \tag{1.1}$$

Je známo, že konvergence posloupnosti $\{x_n\} \subset \mathbb{C}[a,b]$ k funkci $x \in \mathbb{C}[a,b]$ v topologii určené touto normou (tj. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$) je ekvivalentní se stejnoměrnou konvergencí $x_n \rightrightarrows x$ na intervalu $[a,b]$. Významnou roli v teorii spojitých lineárních funkcionálů hraje věta Hahnova-Banachova, která říká, že pro každý podprostor $\mathbb{Y}$ Banachova prostoru $\mathbb{X}$ lze každý spojitý lineární funkcionál na Y rozšířit na spojitý lineární funkcionál na celém $\mathbb{X}$, přičemž zůstane zachována jeho norma. Přesněji, platí:

Nechť $\mathbb{X}$ je Banachův prostor a $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ je jeho podprostor. Potom pro každý spojitý lineární funkcionál Φ na $\mathbb{Y}$ existuje spojitý lineární funkcionál $\widetilde{\Phi}$ na $\mathbb{X}$ takový, že

$$\widetilde{\Phi}(y) = \Phi(y) \quad \text{pro } \ y \in \mathbb{Y} \quad \text{a} \quad \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*} = \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}. \tag{1.2}$$

Buď tedy dán libovolný spojitý lineární funkcionál Φ na $\mathbb{C}[a,b]$ a nechť $\mathbb{M}[a,b]$ značí množinu všech funkcí ohraničených na $[a,b]$. $\mathbb{M}[a,b]$ je zřejmě Banachův prostor vzhledem k operacím a normě definovaným stejně jako v (1.1). Dále, protože je zřejmé, že limita stejnoměrně konvergentní posloupnosti spojitých funkcí je spojitá, $\mathbb{C}[a,b]$ je uzavřený podprostor v $\mathbb{M}[a,b]$. Pro jednoduchost, pišme nadále $\mathbb{X} = \mathbb{M}[a,b]$ a $\mathbb{Y} = \mathbb{C}[a,b]$.

Podle Hahnovy-Banachovy věty můžeme funkcionál Φ rozšířit na celý prostor $\mathbb{X}$, tj. existuje funkcionál $\widetilde{\Phi} \in \mathbb{X}^*$ takový, že platí (1.2). Položme

$$p(t) = \begin{cases} 0 & \text{když } \ t = a, \\ \widetilde{\Phi}(\chi_{[a,t]}) & \text{když } \ t \in (a,b] \end{cases} \tag{1.3}$$

kde $\chi_{[a,t]}$ je charakteristická funkce intervalu $[a,t]$, tj.

$$\chi_{[a,t]}(s) = \begin{cases} 1 & \text{když } \ t \in [a,t], \\ 0 & \text{když } \ t \in (t,b]. \end{cases}$$

(Funkce $\chi_{[a,t]}$ je element prostoru $\mathbb{X}$ a hodnota $\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,t]})$ a tedy i funkce p jsou tudíž dobře definovány.)

Konečné množiny bodů $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že je

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_m = b,$$

nazýváme *dělení* intervalu $[a,b]$.

Nyní, každé funkci $x \in \mathbb{Y}$ a každému dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ přiřaďme po částech konstatní funkci $\widetilde{x}_{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathbb{X}$ předpisem

$$\widetilde{x}_{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \begin{cases} x(\sigma_1) & \text{když } \ t \in [a,\sigma_1], \\ x(\sigma_j) & \text{když } \ t \in (\sigma_{j-1},\sigma_j] \ \text{ a } \ j \in \{2,3,\dots,m\}. \end{cases}$$

Potom

$$x(t) - \widetilde{x}_{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \begin{cases} x(t) - x(\sigma_1) & \text{když } \ t \in [a,\sigma_1], \\ x(t) - x(\sigma_j) & \text{když } \ t \in (\sigma_{j-1},\sigma_j] \ \text{ a } \ j \in \{2,3,\dots,m\}. \end{cases}$$

Tudíž

$$\|x - \widetilde{x}_{\boldsymbol{\sigma}}\| \le \omega(x,\boldsymbol{\sigma}) := \max_{j=1,2,\dots,m} \sup\{|x(t) - x(s)| \quad ,: t,s \in [\sigma_{j-1},\sigma_j]\} \tag{1.4}$$

a

$$\begin{aligned}\|\Phi(x)-\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}_{\boldsymbol{\sigma}})\| &= \|\widetilde{\Phi}(x)-\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}_{\boldsymbol{\sigma}})\|\\ &= \|\widetilde{\Phi}(x-\widetilde{x}_{\boldsymbol{\sigma}})\| \le \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*}\|x-\widetilde{x}_{\boldsymbol{\sigma}}\| \le \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}\,\omega(f,\boldsymbol{\sigma}),\end{aligned}$$

t.j.

$$\|\Phi(x)-\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}_{\boldsymbol{\sigma}})\| \le \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}\,\omega(f,\boldsymbol{\sigma}). \tag{1.5}$$

Funkci $\widetilde{x}_{\boldsymbol{\sigma}}$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci charakteristických funkcí intervalů, tj.

$$x_{\boldsymbol{\sigma}}(t) = x(\sigma_1)\,\chi_{[a]}(t) + \sum_{j=1}^{m} x(\sigma_j)\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}(t) \quad \text{pro } \ t\in[a,b].$$

Odtud, vzhledem k linearitě funkcionálu $\widetilde{\Phi}$ a k definici (1.3), dostaneme

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}_{\boldsymbol{\sigma}}) &= x(\sigma_1)\,\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]}) + \sum_{j=2}^{m} x(\sigma_j)\big[\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_j]})-\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_{j-1}]})\big]\\ &= x(\sigma_1)\big[p\,(\sigma_1)-p\,(a)\big] + \sum_{j=2}^{m} x(\sigma_j)\big[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})\big]\\ &= \sum_{j=1}^{m} x(\sigma_j)\big[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})\big],\end{aligned}$$

kde jsme navíc použili evidentní vztahy

$$\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]} = \chi_{[a,\sigma_j]} - \chi_{[a,\sigma_{j-1}]} \quad \text{pro } \ j=2,3,\dots,m.$$

Odtud a s pomocí (1.5) odvodíme postupně nerovnosti

$$\Big|\Phi(x) - \sum_{j=1}^{m} x(\sigma_j)\big[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})\big]\Big| = \Big|\Phi(x)-\widetilde{\Phi}(\widetilde{x}_{\boldsymbol{\sigma}})\Big| \le \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}\ \omega(x,\boldsymbol{\sigma}).$$

Pro každou funkci $x\in\mathbb{Y}$ tedy platí

$$\Big|\Phi(x) - \sum_{j=1}^{m} x(\sigma_j)\big[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})\big]\Big| \le \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}\ \omega(x,\boldsymbol{\sigma}). \tag{1.6}$$

Veličinu $\omega(x,\boldsymbol{\sigma})$ vyskytující se na pravé straně tohoto odhadu jsme definovali v relaci (1.4). Protože každá funkce spojitá na uzavřeného a ohraničeném intervalu $[a,b]$ je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá, vidíme z této definice, že pro každou funkci x spojitou na intervalu $[a,b]$ můžeme volbou dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ "udělat" tuto veličinu

”libovolně malou”. Přesněji řečeno:

Pro každou funkci x *spojitou na* $[a,b]$ *a každé* $\varepsilon>0$ *existuje* $\delta>0$ *takové, že*

$$\left.\begin{array}{l}\omega(x,\boldsymbol{\sigma})<\varepsilon \ \text{ pro každé dělení } \boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\} \text{ intervalu } [a,b]\\ \text{takové, že } |\boldsymbol{\sigma}|:=\max\{\sigma_j-\sigma_{j-1}:j=1,2,\dots,m\}<\delta.\end{array}\right\}^{1} \tag{1.7}$$

Z odhadů (1.6) a (1.7) usoudíme, že pro každou funkci $x\in\mathbb{C}[a,b]$ můžeme hodnotu $\Phi(x)$ libovolně přesně aproximovat pomocí součtů tvaru

$$\Sigma_{\boldsymbol{\sigma}}:=\sum_{j=1}^{m}x(\sigma_j)\big[p(\sigma_j)-p(\sigma_{j-1})\big],$$

přičemž přiblížení bude tím přesnější čím jemnější bude dělení $\boldsymbol{\sigma}$, tj. čím menší bude jeho norma $|\boldsymbol{\sigma}|$. Tyto úvahy naznačují, že vhodně definovaná ”limitní” hodnota výrazů $\Sigma_{\boldsymbol{\sigma}}$, kterou označíme $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p$, bude pro každé $x\in\mathbb{C}[a,b]$ rovna příslušné hodnotě funkcionálu Φ, t.j. bude

$$\Phi(x)=\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p \quad \text{pro } \ x\in\mathbb{C}[a,b].$$

Z našich předchozích úvah si ovšem už můžeme domyslet jak by ta vhodná definice by mohla vypadat:

$\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p=I\in\mathbb{R}$ právě tehdy, když pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že nerovnost

$$\big|\Sigma_{\boldsymbol{\sigma}}-I\big|<\varepsilon$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu takové, že $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta$.

Takto definovaný objekt se nazývá *Stieltjesův integrál funkce* x *vzhledem k funkci* p. Není náhodou, že jeho definice velmi připomíná integrál Riemannův, se kterým by studenti navštěvující tento kurs již měli být obeznámeni. Podle analogie s Riemannovým integrálem je odtud už jenom krůček k definici, která se ukázala jako výhodná pro nejen pro explicitní vyjádření obecných spojitých funkcionálů na protoru spojitých funkcí:

Dvojici $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ nazveme *značeným dělením* intervalu $[a,b]$, jestliže

$$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$$

je dělení intervalu $[a,b]$ a

$$\boldsymbol{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$$

je množina bodů z $[a,b]$ takových, že platí

$$\sigma_{j-1}\le\xi_j\le\sigma_j \quad \text{pro všechna } j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma}).$$

Prvkům takové množiny $\boldsymbol{\xi}$ budeme říkat *značky dělení* $\boldsymbol{\sigma}$.

Mějme dány dvě funkce $x,\ p:[a,b]\to\mathbb{R}.$ Pro libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) := \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} x(\xi_j)\,[p(\sigma_j)-p(\sigma_{j-1})]$$

a řekneme, že

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p = I$$

jestliže

pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že $|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|<\varepsilon$

platí pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta.$

Veličinu $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p$ nazýváme *Riemannův-Stieltjesův integrál* funkce x vzhledem k funkci $p.$

Z teoretických důvodů je vhodné tuto definici ještě doplnit následujícím způsobem: jestliže $c\in[a,b]$ a funkce $x,\ p$ jsou definovány v bodě $c,$ pak klademe

$$\int_c^c x\ \mathrm{d}p=0.$$

Existuje-li integrál $\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p,$ pak definujeme $\displaystyle\int_b^a x\,\mathrm{d}\,p= -\int_a^b x\,\mathrm{d}p.$ Později ovšem ještě poznáme i jiné (a obecnější) definice integrálu tohoto typu.

Podívejme se ještě podrobněji na funkci $p,$ kterou jsme k danému funkcionálu Φ přiřadili předpisem (1.3). Buď dáno libovolné dělení

$$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$$

intervalu $[a,b].$ Podle definice (1.3) je

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}|p(\sigma_j)-p(\sigma_{j-1})| &= \widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]})+\sum_{j=2}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}|\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_j]})-\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_{j-1}]})|\\ &=\alpha_1\,\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]})+\sum_{j=2}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\alpha_j\,\widetilde{\Phi}(\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}),\end{aligned}$$

kde

$$\alpha_1=\operatorname{sign}(\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]}))\ \text{ a }\ \alpha_j=\operatorname{sign}(\widetilde{\Phi}(\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}))\text{ pro }\ j=1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma}).$$

Dalšími jednoduchými úpravami dostaneme dále

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})| = \widetilde{\Phi}(\alpha_1\, \chi_{[a,\sigma_1]}) + \sum_{j=2}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \widetilde{\Phi}(\alpha_j\, \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]})$$
$$= \widetilde{\Phi}(\alpha_1\, \chi_{[a,\sigma_1]} + \sum_{j=2}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \alpha_j\, \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}) = \widetilde{\Phi}(h) \leq \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*}\, \|h\|,$$

kde h je funkce z $\mathbb{M}[a,b]$ pro kterou zřejmě platí

$$|h(t)| = \Big|\alpha_1\, \chi_{[a,\sigma_1]}(t) + \sum_{j=2}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \alpha_j\, \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}(t)\Big| \leq 1 \text{ pro každé } t \in [a,b],$$

neboli $\|h\| \leq 1$. Protože je ovšem funkcionál $\widetilde{\Phi}$ ohraničený, tj. $\|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*} < \infty$, znamená to, že platí

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})| \leq \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*} = \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*} < \infty \tag{1.8}$$

pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$ intervalu $[a,b]$. Jinými slovy, definujeme-li

$$\operatorname{var}_a^b p := \sup \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})|,$$

kde supremum se bere přes všechna dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$ intervalu $[a,b]$, pak platí $\operatorname{var}_a^b p \leq \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*} < \infty$. Číslo $\operatorname{var}_a^b p$ se nazývá *variace* funkce p na intervalu $[a,b]$ a o funkcích f, pro které platí $\operatorname{var}_a^b f < \infty$ říkáme, že mají *konečnou variací*. Třídě funkcí s konečnou variací bude věnována následující lekce. Zde si ještě povšimněme toho, že pro danou spojitou funkci x, funkci p definovanou podle (1.3) aproximují součty $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ hodnotu $\Phi(x)$ stejně dobře jako součty $\Sigma_{\boldsymbol{\sigma}}$. Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ a příslušné značky $\boldsymbol{\xi}$ (tj. $(\sigma, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$) totiž vzhledem k (1.6) a (1.8) platí

$$\big|\Phi(x) - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\big| \leq \big|\Phi(x) - \Sigma_{\boldsymbol{\sigma}}\big| + \big|\Sigma_{\boldsymbol{\sigma}} - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\big|$$
$$\leq \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}\, \omega(x, \boldsymbol{\sigma}) + \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |x(\sigma_j) - x(\xi_j)|\, |p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})|$$
$$\leq 2\, \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}\, \omega(x, \boldsymbol{\sigma}).$$

Na závěr uveďme ještě přesnou formulací tvrzení, ke kterému jsme směřovali. Jeho podrobný důkaz vyžaduje znalost vlastností Stieljesova integrálu a najdete ho také v kapitole 7 knihy [63].

Věta (F. RIESZ). *Zobrazení* $\Phi : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}$ *je spojitý lineární funkcionál na prostoru* $\mathbb{C}[a,b]$ *právě tehdy, když existuje funkce* p *s konečnou variací na intervalu* $[a,b]$ *taková, že platí*

$$\Phi(x) = \int_a^b x \, \mathrm{d}\, p \quad \text{\textit{pro každou funkci}} \ \ x \in \mathbb{C}[a,b].$$

Úmluvy a označení

(i) $\mathbb{N}$ je *množina přirozených čísel* (mezi něž nezahrnujeme nulu). $\mathbb{R}$ je *množina reálných čísel*, $\mathbb{R}^m$ je prostor reálných m-vektorů (m-tic reálných čísel). Je-li $x \in \mathbb{R}^m$, jeho i-tý prvek značíme x_i. Píšeme $x = \big(x_i\big)_{i=1,\dots,m}$ nebo, nehrozí-li nedorozumění, $x = \big(x_i\big)$. Norma v $\mathbb{R}^m$ je definována předpisem

$$x = \big(x_i\big)_{i=1,\dots,m} \in \mathbb{R}^m \to |x| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|.$$

(ii) $\{x \in A : B(x)\}$ značí, jak je zvykem, množinu všech prvků x množiny A, které vyhovují podmínce $B(x)$.

Pro dané množiny P, Q symbolem $P \setminus Q$ značíme množinu

$$P \setminus Q = \{x \in P : x \notin Q\}.$$

Jak je zvykem, $P \subset Q$ znamená, že P je podmnožina množiny Q (každý prvek množiny P je též prvkem množiny Q). Nehrozí-li nedorozumění, píšeme $\{x_n\}$ místo $\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$, resp. místo $\{x_n \in \mathbb{R} : n = 1, 2, \dots, m\}$. Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ je *prostá*, jestliže se v ní žádný prvek neopakuje $(x_k \neq x_n$ jestliže $k \neq n)$.

(iii) Je-li $-\infty < a < b < \infty$, pak $[a, b]$ značí *uzavřený* interval $\{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ a (a, b) je *otevřený* interval $\{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$. Odpovídající *polouzavřené*, resp. *polootevřené* intervaly značíme $[a, b)$ a $(a, b]$. Ve všech těchto případech nazýváme a, b krajní body intervalu. Jestliže $a = b \in \mathbb{R}$, říkáme, že interval $[a, b]$ *degeneruje* na jednobodovou množinu, a píšeme $[a, b] = [a]$. Je-li I interval (uzavřený, resp. otevřený, resp. polootevřený) s krajními body a, b, značíme symbolem $|I| = |b - a|$ jeho délku ($|[a]| = 0$).

Konečnou množinu bodů $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a, b]$ nazveme *dělením intervalu* $[a, b]$, jestliže platí $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_m = b$. Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathscr{D}[a, b]$.

Je-li $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a, b]$, pak, nebude-li uvedeno jinak, budeme jeho elementy značit σ_j, $|\boldsymbol{\sigma}|$ je délka nejdelšího z těchto podintervalů a $\nu(\boldsymbol{\sigma})$ je počet podintervalů $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ generovaných dělením $\boldsymbol{\sigma}$, tj.

$$\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = b \quad \text{a} \quad |\boldsymbol{\sigma}| = \max_{j = 1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\sigma})} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \quad \text{pro} \ \ \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a, b].$$

Jestliže $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$, pak říkáme, že $\boldsymbol{\sigma}'$ je *zjemnění* $\boldsymbol{\sigma}$.

(iv) Pro dané $A \in \mathbb{R}$ značíme $A^+ = \max\{A, 0\}$ a $A^- = \max\{-A, 0\}$. (Připomeňme, že platí $A^+ + A^- = |A|$ a $A^+ - A^- = A$ pro každé $A \in \mathbb{R}$.) Dále

$$\operatorname{sign}(A) = \begin{cases} 1 & \text{když } A > 0, \\ -1 & \text{když } A < 0, \\ 0 & \text{když } A = 0. \end{cases}$$

(v) Pro danou množinu $M \subset \mathbb{R}$ symbolem χ_M značíme její charakteristickou funkci, tj. funkci $\mathbb{R} \to \{0, 1\}$ definovanou předpisem

$$\chi_M(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in M, \\ 0 & \text{pro } t \notin M. \end{cases}$$

(vi) Supremum (resp. infimum) množiny M značíme $\sup M$ (resp. $\inf M$). Pokud $m = \sup M \in M$ ($m = \inf M \in M$) (čili m je maximum (resp. minimum) množiny M), pak píšeme též $m = \max M$ (resp. $m = \min M$). Je-li M množina všech hodnot $F(x)$ nějakého zobrazení F, kde proměnná x probíhá množinu B, neboli $M = \{F(x) : x \in B\}$, píšeme též $\sup\limits_{x \in B} F(x)$. Podobné pravidlo platí i pro infimum, resp. maximum, resp. minimum.

(vii) Zápis $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ znamená, že funkce f je definována pro každé $x \in [a, b]$ a každá její hodnota $f(x)$ je (konečné) reálné číslo. Pro libovolné funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a reálné číslo λ definujeme

$$f + g : x \in [a, b] \to f(x) + g(x) \text{ a } \lambda f : x \in [a, b] \to \lambda f(x).$$

(viii) Pro libovolnou funkci $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ značíme

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

(Není-li funkce f ohraničená na intervalu $[a, b]$, pak ovšem $\|f\| = \infty$.)

(ix) Je-li $\{x_n\}$ nekonečná posloupnost reálných čísel, která má limitu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\},$$

píšeme též zkráceně $x_n \to A$.

Podobně, jestliže posloupnost funkcí $\{f_n\}$ konverguje k funkci f stejnoměrně na intervalu $[a, b]$, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, píšeme též $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.

(x) Jestliže $f:[a,b]\to\mathbb{R},\ t\in[a,b)$ a $s\in(a,b]$ a jestliže existují konečné jednostranné limity $\lim_{\tau\to t+} f(\tau)$ a $\lim_{\tau\to s-} f(\tau)$, pak značíme

$$f(t+) = \lim_{\tau\to t+} f(\tau), \quad f(s-) = \lim_{\tau\to s-} f(\tau),$$

$$\Delta^+ f(t) = f(t+) - f(t), \quad \Delta^- f(s) = f(s) - f(s-),$$

$$\Delta f(x) = f(x+) - f(x-) \quad \text{pro } x\in(a,b).$$

Zpravidla používáme následující úmluvu:

$$f(a-) = f(a), \quad f(b+) = f(b), \quad \Delta^- f(a) = \Delta^+ f(b) = 0.$$

(xi) $\mathbb{C}[a,b]$ je prostor reálných funkcí spojitých na intervalu $[a,b]$ s normou definovanou předpisem

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad \text{pro } f\in\mathbb{C}[a,b].$$

$\mathbb{L}^1[a,b]$ je prostor reálných funkcí lebesgueovsky integrovatelných na $[a,b]$, přičemž

$$f = g\in\mathbb{L}^1[a,b] \iff f(x)=g(x) \text{ pro s.v. } x\in[a,b]$$

a norma je definovaná předpisem

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \quad \text{pro } f\in\mathbb{L}^1[a,b].$$

Prostor vektorových funkcí zobrazujících interval $[a,b]$ do Banachova prostoru $\mathbb{Y}$ a spojitých na $[a,b]$ značíme $\mathbb{C}([a,b],\mathbb{Y})$. Podobný význam má symbol $\mathbb{L}^1([a,b],\mathbb{Y})$ i analogické symboly pro další prostory funkcí, které v textu zavedeme.

(xii) Je-li M podmnožina Banachova prostoru $\mathbb{X}$, pak symbolem $\overline{M}$ značíme její uzávěr v prostoru $\mathbb{X}$. $\mathrm{Lin}(M)$ je množina všech konečných lineárních kombinací prvků M, tj. množina všech prvků $x\in M$ tvaru $x=\sum_{j=1}^m c_j\,x_j$, kde $m\in\mathbb{N},\ c_1,c_2,\dots,c_m\in\mathbb{R}$ a $x_1,x_2,\dots,x_m\in M$.

(xiii) Množinu všech spojitých lineárních zobrazení Banachova prostoru $\mathbb{X}$ do Banachova prostoru $\mathbb{Y}$ značíme $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$. Je-li $\mathbb{X}=\mathbb{Y}$, píšeme $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ místo $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{X})$. Speciálně $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ je prostor reálných matic typu $m\times n$ neboli $m\times n$–matic a $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ je prostor sloupcových m-vektorů, který ztotožňujeme s prostorem $\mathbb{R}^m$.

(xiv) Je-li $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, pak její element v i-tém řádku a j-tém sloupci značíme $a_{i,j}$. Píšeme $A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$. Pro každé n značíme symbolem I jednotkovou matici typu $n \times n$, tj.

$$I = \big(e_{i,j}\big)_{\substack{i=1,\dots,n,\\ j=1,\dots,n}} \quad \text{kde } e_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{když } i = j, \\ 0 & \text{když } i \neq j. \end{cases}$$

Norma v $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ je definována předpisem0

$$|A| = \max_{j=1,\dots,m} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \quad \text{pro } A = \big(a_{i,j}\big)_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Speciálně pro $x \in \mathbb{R}^m = \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ máme $|x| = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$, což souhlasí s bodem (i). Dále $|A| = \sup\big\{|A\,x| : |x| \le 1\big\}$, tj. takto zavedená norma matice souhlasí s operátorovou normou v $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (vzhledem k normě v $\mathbb{R}^n$ z bodu (i)).

(xv) V omezené míře, leč přece jen se to občas zdá být výhodné, až nutné, používáme standardní logické symboly. Například

„$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : (A \wedge B) \implies C$ “

znamená

„pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že platí-li současně A i B, pak platí také C“.

Kapitola 2

Funkce s konečnou variací

V této kapitole variaci funkce a odvodíme základní vlastnosti třídy funkcí, které mají konečnou variaci na daném uzavřeném a konečném intervalu. Funkce s konečnou variací jsou užitečné v celé řadě fyzikálních a technických problémů, v teorii pravděpodobnosti, teorii Fourierových řad, v diferenciálních rovnicích a v dalších oblastech matematiky.

2.1 Definice a základní vlastnosti

Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Připomeňme, že děleními intervalu $[a,b]$ nazýváme konečné množiny bodů $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_m = b$$

a symbol $\mathscr{D}[a,b]$ značí množinu všech dělení intervalu $[a,b]$. Prvky dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ jsou zpravidla značeny symboly σ_j, $\nu(\boldsymbol{\sigma}) = m$,

$$\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = b \quad \text{a} \quad |\boldsymbol{\sigma}| = \max_{j=1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma})} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \quad \text{pro } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b].$$

Jestliže $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$, pak říkáme, že $\boldsymbol{\sigma}'$ je *zjemnění* $\boldsymbol{\sigma}$.

2.1 Definice. Pro danou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]} V(f,\boldsymbol{\sigma}).$$

Je-li $a = b$, definujeme $\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^a f = 0$. Veličinu $\operatorname{var}_a^b f$ nazýváme *variace funkce* na intervalu $[a,b]$. Je-li $\operatorname{var}_a^b f < \infty$, říkáme, že funkce f má *konečnou variaci* na $[a,b]$. Množinu funkcí s konečnou variací na $[a,b]$ značíme $\mathbb{BV}[a,b]$.

Geometrický význam pojmu variace nám přiblíží následující tvrzení, zpravidla nazývané DRUHÁ JORDANOVA VĚTA. Dříve než ji budeme formulovat, připomeňme, jak se definuje délka křivky, která je zadána jako graf spojité funkce f na intervalu $[a,b]$:

Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ je součet

$$\lambda(f,\boldsymbol{\sigma}) := \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \sqrt{\big(\sigma_j - \sigma_{j-1}\big)^2 + \big(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\big)^2}.$$

roven délce lomené křivky proložené body $[\sigma_j, f(\sigma_j)], j = 0, 1, \ldots, m,$ ležícími na grafu funkce f. Délka grafu $\Lambda(f;[a,b])$ funkce f na intervalu $[a,b]$ se pak definuje jako

$$\Lambda(f;[a,b]) = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]} \lambda(f,\boldsymbol{\sigma}).$$

2.2 Věta (DRUHÁ JORDANOVA VĚTA). *Nechť f je spojitá na $[a,b]$. Potom má její graf na intervalu $[a,b]$ konečnou délku právě tehdy, když f má konečnou variaci na intervalu $[a,b]$.*

D ů k a z. Použijeme nerovnosti

$$|\beta| \leq \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leq |\alpha|+|\beta|, \tag{2.1}$$

které platí pro libovolná reálná čísla α, β. (Odvodíme je odmocněním triviálních nerovností $\beta^2 \leq \alpha^2+\beta^2 \leq (|\alpha|+|\beta|)^2$.) Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ máme podle (2.1)

$$\begin{aligned} V(f,\boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\sigma_j)-f(\sigma_{j-1})| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \sqrt{\big(\sigma_j-\sigma_{j-1}\big)^2+\big(f(\sigma_j)-f(\sigma_{j-1})\big)^2} = \lambda(f,\boldsymbol{\sigma}) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big[\big(\sigma_j-\sigma_{j-1}\big)+\big|f(\sigma_j)-f(\sigma_{j-1})\big|\Big] = (b-a)+V(f,\boldsymbol{\sigma}) \end{aligned}$$

neboli

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) \leq \lambda(f,\boldsymbol{\sigma}) \leq V(f,\boldsymbol{\sigma})+(b-a).$$

Přechodem k supremu dostaneme nerovnosti

$$\operatorname{var}_a^b f \leq \Lambda(f;[a,b]) \leq \operatorname{var}_a^b f+(b-a),$$

ze kterých tvrzení věty okamžitě plyne. □

2.3 Příklad. Buď f funkce spojitá na intervalu $[a,b]$ a taková, že pro každé $x \in (a,b)$ platí $|f'(x)| \leq M < \infty$, kde M nezávisí na x.

Podle věty o střední hodnotě tedy platí

$$|f(y)-f(x)| \leq M\,|y-x| \quad \text{pro všechna } x,y \in [a,b].$$

Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ tedy máme

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) \leq M \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big[\sigma_j-\sigma_{j-1}\big] = M\,[b-a].$$

Vidíme, že *každá funkce spojitá na intervalu $[a,b]$, která má na jeho vnitřku (a,b) ohraničenou derivaci, má konečnou variaci.*

Jestliže je navíc $|f'|$ riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$ (na příklad f' je spojitá na (a,b)), můžeme variaci funkce f na intervalu $[a,b]$ přesně určit. Platí totiž

$$\operatorname{var}_a^b f = (\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x, \tag{2.2}$$

kde na pravé straně je Riemannův integrál. Důkaz tohoto tvrzení pochopitelně předpokládá znalost Riemannova integrálu.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Předpoklad o existenci a konečné hodnotě Riemannova integrálu

$$(\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

znamená, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f'(\xi_j)|\,(\sigma_j - \sigma_{j-1}) - (\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3}$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta$ a každý výběr bodů ξ_j takových, že

$$\xi_j \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j] \quad \text{pro} \ \ j = 1, 2, \ldots, \nu(\boldsymbol{\sigma}). \tag{2.4}$$

Na druhou stranu, podle definice variace existuje $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta$ a

$$\operatorname{var}_a^b f \ge V(f, \boldsymbol{\sigma}) > \operatorname{var}_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.5}$$

Podle věty o střední hodnotě existují body ξ_j, $j = 1, 2, \ldots, \nu(\boldsymbol{\sigma})$, splňující (2.4) a takové, že

$$V(f, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f'(\xi_j)|\,(\sigma_j - \sigma_{j-1}).$$

Odtud podle (2.3) a (2.5) dostáváme, že platí

$$\begin{aligned}
&\Big|\operatorname{var}_a^b f - (\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\Big| \\
&\quad \le |\operatorname{var}_a^b f - V(f, \boldsymbol{\sigma})| + \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f'(\xi_j)|\,(\sigma_j - \sigma_{j-1}) - (\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\Big| \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, to znamená, že platí (2.2).

2.4 Cvičení. Určete $\operatorname{var}_a^b f$ a odhadněte délku grafu funkce f, jestliže

a) $f(x) = \sin^2 x,\ \ a=0,\ b=\pi,$

b) $f(x) = x^3 - 3\,x + 4,\ \ a=0,\ b=2,$

c) $f(x) = \cos\, x + x\, \sin\, x,\ \ a=0,\ b=2\,\pi.$

2.5 Poznámka. Z definice 2.1 je zřejmé, že pro každou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je $\operatorname{var}_a^b f \geq 0.$ Dále je-li dáno libovolné dělení $\boldsymbol{\rho}\in\mathscr{D}[a,b],$ pak platí

$$\operatorname{var}_a^b\, f = \sup_{\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}} V(f,\boldsymbol{\sigma}). \tag{2.6}$$

To plyne z několika elementárních pozorování: Zaprvé, protože

$$\{V(f,\boldsymbol{\sigma}):\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\ \ \text{a}\ \ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}\}\subset\{V(f,\boldsymbol{\sigma}):\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\},$$

musí být $\sup\limits_{\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}} V(f,\boldsymbol{\sigma})\leq \operatorname{var}_a^b\, f.$

Dále díky trojúhelníkové nerovnosti pro libovolná dvě dělení $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}'$ intervalu $[a,b]$ taková, že $\boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma},$ a každou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ máme $V(f,\boldsymbol{\sigma})\leq V(f,\boldsymbol{\sigma}').$

Konečně, je-li $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ libovolné a $\boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{\sigma}\cup\boldsymbol{\rho},$ pak $\boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\rho}$ a tedy

$$V(f,\boldsymbol{\sigma})\leq V(f,\boldsymbol{\sigma}').$$

To znamená, že pro každé $d\in\{V(f,\boldsymbol{\sigma}):\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\}$ existuje

$$d'\in\{V(f,\boldsymbol{\sigma}):\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\ \ \text{a}\ \ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}\}$$

takové, že $d\leq d',$ a tedy

$$\operatorname{var}_a^b\, f\leq \sup_{\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}} V(f,\boldsymbol{\sigma}).$$

Platí tedy (2.6).

2.6 Cvičení. Dokažte následující vlastnosti variace a funkcí s konečnou variací.

(i) *Je-li* $[c,d]\subset[a,b],$ *pak pro každou funkci* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *platí*

$$|f(d)-f(c)|\leq \operatorname{var}_c^d f\leq \operatorname{var}_a^b f.$$

(ii) $\operatorname{var}_a^b f = d\in\mathbb{R}$
$$\iff \Big(\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]:\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\implies d-\varepsilon\leq V(f,\boldsymbol{\sigma})\leq d\Big).$$

(iii) $\operatorname{var}_a^b f=\infty \iff \big(\forall\, K>0\ \ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_K\in\mathscr{D}[a,b]:V(f,\boldsymbol{\sigma}_K)\geq K\big).$

(iv) $\operatorname{var}_a^b f=\infty$
$$\iff \big(\exists\,\{\boldsymbol{\sigma}^n\}\subset\mathscr{D}[a,b]:\lim_{n\to\infty} V(f,\boldsymbol{\sigma}^n)=\infty.$$

(v) *Jestliže pro funkci* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *existuje* $L\in\mathbb{R}$ *takové, že*

$$|f(x)-f(y)|\le L\,|x-y| \quad \textit{platí pro všechna } x,y\in[a,b],$$

pak $\operatorname{var}_a^b f\le L\,(b-a)$.

(V takovém případě říkáme, že f splňuje *Lipschitzovu podmínku* na $[a,b]$, nebo též, že je *lipschitzovská* na $[a,b]$.)

2.7 Příklad. Nechť

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{pro } x=0,\\ x\,\sin(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } x\in(0,2].\end{cases}$$

Všimněme si, že $f(x)=0$ právě když $x=0$ nebo $x=\dfrac{1}{k}$ pro nějaké $k\in\mathbb{N}$ a pro $x\in(0,2]$ platí

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{právě když } x=y_k=\dfrac{2}{4\,k+1},\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\},\\ -x & \text{právě když } x=z_k=\dfrac{2}{4\,k-1},\ k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Pro dané $n\in\mathbb{N}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}^n=\{0,y_n,z_n,\dots,y_1,z_1,2\}$ dostaneme

$$\begin{aligned} V(f,\boldsymbol{\sigma}^n) &= |f(0)-f(y_n)|+\sum_{k=1}^{n}|f(y_{k-1})-f(z_k)|+\sum_{k=1}^{n}|f(y_k)-f(z_k)|\\ &= y_n+\sum_{k=1}^{n}\big(y_{k-1}+z_k\big)+\sum_{k=1}^{n}\big(y_k+z_k\big)\\ &= y_0+2\sum_{k=1}^{n}\big(y_k+z_k\big)=2+4\sum_{k=1}^{n}\frac{8\,k}{16\,k^2-1}\ge 2\Big(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big).\end{aligned}$$

Je známo, že $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty$. Tudíž $\displaystyle\lim_{n\to\infty}V(f,\boldsymbol{\sigma}^n)=\infty$ a $\operatorname{var}_0^2 f=\infty$.

Snadno můžeme určit variaci monotónních funkcí.

2.8 Věta. *Pro každou funkci* f *monotónní na* $[a,b]$ *platí* $\operatorname{var}_a^b f=|f(b)-f(a)|$.

D ů k a z . Je-li f nerostoucí na $[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$, pak

$$\begin{aligned} V(f,\boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{j=1}^{m}\big[f(\sigma_{j-1})-f(\sigma_j)\big]\\ &= \big[f(a)-f(\sigma_1)\big]+\big[f(\sigma_1)-f(\sigma_2)\big]+\cdots\\ &\qquad+\big[f(\sigma_{m-2})-f(\sigma_{m-1})\big]+\big[f(\sigma_{m-2})-f(b)\big]\\ &= f(a)-f(b),\end{aligned}$$

tj. $\quad \operatorname{var}_a^b f = f(a) - f(b) = \big|f(b) - f(a)\big|.$

Podobně bychom ukázali, že je-li f neklesající na $[a,b]$, pak

$$\operatorname{var}_a^b f = f(b) - f(a) = \big|f(b) - f(a)\big|. \qquad \square$$

2.9 Cvičení. Dokažte,že funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a,b]$ právě tehdy, když existuje taková neklesající funkce φ na $[a,b]$, že

$$|f(x) - f(y)| \le \varphi(x) - \varphi(y) \quad \text{pro } x,y\in[a,b],\ y\le x.$$

2.10 Příklady. (i) Příkladem jednoduché funkce, která nemá ohraničenou derivaci na intervalu $[0,1]$ (a tudíž tvrzení z příkladu 2.3 (i) nezaručuje, že má konečnou variaci na $[0,1]$) je $f(x)=\sqrt{x}$. Protože je ale f rostoucí, je $\operatorname{var}_0^1 f = 1$ podle věty 2.8.

(ii) Konečnou variaci mohou mít i funkce nespojité, jak ukazuje příklad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x=0,\\ \dfrac{1}{k} & \text{je-li } x\in(0,1] \quad \text{a} \quad x\in\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right] \text{ pro nějaké } k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Tato funkce je zřejmě definovaná a neklesající na intervalu $[0,1]$. Podle věty 2.8 je tedy $\operatorname{var}_0^1 f = 1$.

2.11 Věta. *Pro každé $c\in[a,b]$ a každou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ platí*

$$\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f.$$

D ů k a z . Buďte dány funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a bod $c\in[a,b]$. Pokud $c=a$ nebo $c=b$, je tvrzení věty triviální. Nechť tedy $c\in(a,b)$.

Nechť $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \{a,c,b\}$ a nechť $\boldsymbol{\sigma}$ je libovolné dělení intervalu $[a,b]$ takové, že $\boldsymbol{\sigma}\supset\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Pak nutně $c\in\boldsymbol{\sigma}$. Dělení $\boldsymbol{\sigma}$ lze tudíž rozdělit na dělení $\boldsymbol{\sigma}'$ intervalu $[a,c]$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}''$ intervalu $[c,b]$, tj. $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}'\cup\boldsymbol{\sigma}''$, kde $\boldsymbol{\sigma}'\in\mathscr{D}[a,c]$ a $\boldsymbol{\sigma}''\in\mathscr{D}[c,b]$. Zřejmě pak také platí

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) = V(f,\boldsymbol{\sigma}') + V(f,\boldsymbol{\sigma}''). \tag{2.7}$$

Podle poznámky 2.5 dostáváme tedy

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma}\supset\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}} V(f,\boldsymbol{\sigma}) \le \operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f.$$

Na druhou stranu pro každá dvě dělení $\boldsymbol{\sigma}'\in\mathscr{D}[a,c]$ a $\boldsymbol{\sigma}''\in\mathscr{D}[c,b]$ je jejich sjednocení $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}'\cup\boldsymbol{\sigma}''$ dělením intervalu $[a,b]$ a platí opět (2.7). Odtud plyne, že

$$\operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma}'\in\mathscr{D}[a,c]} V(f,\boldsymbol{\sigma}') + \sup_{\boldsymbol{\sigma}''\in\mathscr{D}[c,b]} V(f,\boldsymbol{\sigma}'') \le \operatorname{var}_a^b f.$$

Tím je důkaz věty hotov. $\square$

2.12 Příklad. Buď dáno $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujme funkci

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ x \sin(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } \frac{1}{n} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Její derivace

$$f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x < \frac{1}{n}, \\ \sin(\dfrac{\pi}{x}) - \dfrac{\pi}{x} \cos(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } \frac{1}{n} < x \leq 2 \end{cases}$$

je ohraničená na $(0, \frac{1}{n})$ a na $(\frac{1}{n}, 2)$. Zřejmě je $\operatorname{var}_0^{1/n} f_n = 0$. Podle příkladu 2.3 (i) je dále $\operatorname{var}_{1/n}^2 f_n < \infty$. Věta 2.11 tedy implikuje, že je také $\operatorname{var}_0^1 f_n < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Na množině $\mathbb{BV}[a,b]$ jsou přirozeným způsobem definovány operace sčítání a násobení skalárem (viz Úmluvy a označení (x)). Následující tvrzení je zřejmé.

2.13 Lemma. *Pro libovolné dvě funkce* $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a reálné číslo* c *platí*

$$\operatorname{var}_a^b (f_1 + f_2) \leq \operatorname{var}_a^b f_1 + \operatorname{var}_a^b f_2 \quad a \quad \operatorname{var}_a^b (c\, f_1) = |c| \operatorname{var}_a^b f_1. \tag{2.8}$$

Dále $\operatorname{var}_a^b f = 0$ *tehdy a jen tehdy, když* f *je konstantní na* $[a,b]$.

Stačí si totiž uvědomit, že pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ platí

$$V(f_1 + f_2, \boldsymbol{\sigma}) \leq V(f_1, \boldsymbol{\sigma}) + V(f_2, \boldsymbol{\sigma}) \quad \text{a} \quad V(c\, f, \boldsymbol{\sigma}) = |c|\, V(f, \boldsymbol{\sigma})$$

a dále že je-li $\operatorname{var}_a^b f = 0$, musí pro každé $x \in (a,b]$ platit $|f(x) - f(a)| = 0$.

2.14 Věta. $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když existují funkce* f_1 *a* f_2 *neklesající na* $[a,b]$ *a takové, že platí* $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ *pro každé* $x \in [a,b]$.

D ů k a z . Jestliže f_1 a f_2 jsou neklesající na $[a,b]$ a $f = f_1 - f_2$, pak podle věty 2.8 mají f_1 i f_2 konečnou variaci na $[a,b]$ a podle (2.8) je také $\operatorname{var}_a^b f < \infty$.

Stačí tedy dokázat, že pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a,b]$ a takové, že $f = f_1 - f_2$.

Nechť tedy $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Položme

$$f_1(x) = \operatorname{var}_a^x f \quad \text{a} \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x) \quad \text{pro} \ x \in [a,b].$$

Nechť $x, y \in [a,b]$ a $y \geq x$. Potom podle věty 2.11 je $f_1(y) = f_1(x) + \operatorname{var}_x^y f$, a protože variace je vždy nezáporná, znamená to, že funkce f_1 je neklesající na $[a,b]$. Dále podle věty 2.11 máme

$$f_2(y) = f_1(x) + \operatorname{var}_x^y f - f(y)$$

a

$$f_2(y) - f_2(x) = \operatorname{var}_x^y f - (f(y) - f(x)) \geq 0$$

(viz cvičení 2.6 (i)). To znamená, že funkce f_2 je také neklesající na $[a,b]$ a důkaz je hotov. $\square$

2.15 Cvičení. Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Dokažte, že obě funkce

$$\mathfrak{p}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = a, \\ \sup\limits_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,x]} \sum\limits_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\big)^+ & \text{pro } x \in (a,b] \end{cases}$$

a

$$\mathfrak{n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = a, \\ \sup\limits_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,x]} \sum\limits_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\big)^- & \text{pro } x \in (a,b] \end{cases}$$

jsou neklesající a nezáporné na $[a,b]$ a platí

$$f(x) = f(a) + \mathfrak{p}(x) - \mathfrak{n}(x) \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^x f = \mathfrak{p}(x) + \mathfrak{n}(x) \ \text{ pro } x \in [a,b].$$

2.16 Důsledek. *Pro každou funkci f s konečnou variací na $[a,b]$ a pro všechna $t \in [a,b)$ a $s \in (a,b]$ existují konečné limity*

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau) \quad \textit{a} \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau)$$

(tj. f může mít v $[a,b]$ pouze nespojitosti prvního druhu).[1]

D ů k a z . Podle věty 2.14 můžeme předpokládat, že f je neklesající na $[a,b]$. Pro každé $x \in [a,b]$ je $f(a) \le f(x) \le f(b)$, a tudíž platí také

$$f(a) \le \sup_{x \in [a,s)} f(x) \le f(b) \quad \text{pro každé } s \in (a,b]$$

a

$$f(a) \le \inf_{x \in (t,b]} f(x) \le f(b) \quad \text{pro každé } t \in [a,b).$$

Ukážeme, že

$$f(t+) = \inf_{x \in (t,b]} f(x), \quad \text{jestliže } t \in [a,b). \tag{2.9}$$

Označme $d = \inf\limits_{x \in (t,b]} f(x)$ a nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Potom podle definice infima existuje $t' \in (t,b]$ takové, že

$$d \le f(t') < d + \varepsilon.$$

Vzhledem k monotónnosti funkce f odtud plyne, že nerovnost

$$d \le f(x) < d + \varepsilon$$

platí pro každé $x \in (t,t']$. Dokázali jsme tedy vztah (2.9).

Podobně bychom ukázali, že platí také

$$f(s-) = \sup_{x \in [a,s)} f(x), \quad \text{jestliže } s \in (a,b]. \tag{2.10}$$

$\square$

[1] Říkáme, že bod x je bodem nespojitosti 1. druhu funkce f, jestliže existují konečné limity $f(x-)$, $f(x+)$, přičemž $f(x-) \ne f(x+)$

2.2 Prostor funkcí s konečnou variací

Podle lemmatu 2.13 každá lineární kombinace funkcí s konečnou variací má také konečnou variaci. Z toho plyne, že množina $\mathbb{BV}[a,b]$ je lineární prostor. Ukážeme, že při vhodně zvolené normě se $\mathbb{BV}[a,b]$ stane lineárním normovaným prostorem.

2.17 Věta. $\mathbb{BV}[a,b]$ *je lineární normovaný prostor vzhledem k normě definované předpisem*

$$\|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \operatorname{var}_a^b f \quad \textit{pro } f \in \mathbb{BV}[a,b]. \tag{2.11}$$

D ů k a z. $\mathbb{BV}[a,b]$ je lineární prostor podle lemmatu 2.13. Dále pro každou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a každé $x\in[a,b]$ platí

$$|f(x)| \le |f(a)| + |f(x)-f(a)| \le |f(a)| + \operatorname{var}_a^b f \quad \text{pro } x\in[a,b].$$

(Rozmyslete si, proč tomu tak je.) Tudíž

$$\|f\| \le \|f\|_{\mathbb{BV}} < \infty \ \text{ pro } f\in\mathbb{BV}. \tag{2.12}$$

Podle lemmatu 2.13 relace

$$\|f+g\|_{\mathbb{BV}} \le \|f\|_{\mathbb{BV}} + \|g\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{a} \quad \|c\,f\|_{\mathbb{BV}} = |c|\,\|f\|_{\mathbb{BV}} \tag{2.13}$$

platí pro všechny funkce $f,g\in\mathbb{BV}[a,b]$ a každé reálné číslo $c\in\mathbb{R}$.

Konečně, jestliže $\|f\|_{\mathbb{BV}} = 0$, musí být $f(a)=0$ a $\operatorname{var}_a^b f=0$ Podle lemmatu 2.13 je tedy $f(x)\equiv f(a)=0$ na $[a,b]$, tj. f je nulový prvek $\mathbb{BV}[a,b]$.

Dokázali jsme tedy, že rovnost (2.11) definuje normu na $\mathbb{BV}[a,b]$. □

2.18 Poznámka. Nerovnost (2.12) implikuje, že každá funkce, která má ohraničenou variaci na $[a,b]$ je také ohraničená na $[a,b]$.

Podle věty 2.17 je $\mathbb{BV}[a,b]$ lineární normovaný prostor vzhledem k normě definované předpisem (2.11). Nyní dokážeme, že $\mathbb{BV}[a,b]$ je Banachův prostor vzhledem k této normě. Toto tvrzení umožňuje používání metod funkcionální analýzy při práci s funkcemi s konečnou variací. Nejprve ale připomeňme Bolzanovu-Weierstraßovu větu, kterou budeme potřebovat.

2.19 Věta (BOLZANO-WEIERSTRAß)**.** *Z každé ohraničené posloupnosti reálných čísel je možno vybrat konvergentní podposloupnost.*

2.20 Věta. $\mathbb{BV}[a,b]$ *je Banachův prostor.*

D ů k a z. Zbývá dokázat, že $\mathbb{BV}[a,b]$ je úplný, tj. že každá posloupnost cauchyovská v $\mathbb{BV}[a,b]$ má v $\mathbb{BV}[a,b]$ limitu. Nechť $\{f_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$ je posloupnost cauchyovská v $\mathbb{BV}[a,b]$. Potom platí

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, n_\varepsilon:\\ &n,m\ge n_\varepsilon \Longrightarrow |f_n(x)-f_m(x)| \le \|f_n-f_m\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon \text{ pro } x\in[a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

a) Podle (2.14) je pro každé $x \in [a, b]$ posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}$ cauchyovská. Pro každé $x \in [a, b]$ tedy existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

b) Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$ a nechť $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ je určeno podmínkou (2.14). Potom pro každé $x \in [a, b]$ máme také

$$|f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| \le \varepsilon,$$

a tudíž pro každé $n \ge n_\varepsilon$ a každé $x \in [a, b]$ platí

$$|f(x) - f_n(x)| \le |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_n(x)| < 2\,\varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$$

neboli posloupnost $\{f_n\}$ konverguje k f stejnoměrně na $[a, b]$.

c) Podle (2.13) a (2.14) existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\operatorname{var}_a^b f_n \le \|f_n\|_{\mathbb{BV}} \le \|f_{n_1}\|_{\mathbb{BV}} + 1 \text{ pro } n \ge n_1.$$

Číselná posloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_n\}$ je tedy ohraničená. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty můžeme z ní vybrat podposloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$, pro kterou platí

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b f_{n_k} = d < \infty,$$

tj.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \Big(k \ge k_\varepsilon \text{ a } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a, b] \implies V(f_{n_k}, \boldsymbol{\sigma}) < d + \varepsilon\Big)$$

a

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a, b] : V(f, \boldsymbol{\sigma}) = \lim_{k\to\infty} V(f_{n_k}, \boldsymbol{\sigma}) \le d + \varepsilon.$$

Odtud ovšem už plyne, že je

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]} V(f, \boldsymbol{\sigma}) \le d < \infty, \quad \text{tj. } f \in \mathbb{BV}[a, b].$$

d) Podle (2.14) tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n, m \ge n_\varepsilon \Longrightarrow V(f_n - f_m, \boldsymbol{\sigma}) \le \operatorname{var}_a^b (f_n - f_m) < \varepsilon \text{ pro } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a, b].$$

Tudíž, je-li $m \ge n_\varepsilon$, pak pro každé $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a, b]$ platí

$$V(f - f_m, \boldsymbol{\sigma}) = \lim_{n\to\infty} V(f_n - f_m, \boldsymbol{\sigma}) \le \varepsilon \text{ neboli } \operatorname{var}_a^b (f - f_m) \le \varepsilon.$$

To ovšem znamená, že $\lim\limits_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{\mathbb{BV}} = 0$, což zbývalo ještě dokázat. □

2.3 Konečná variace a spojitost

Podle důsledku 2.16 mohou mít funkce s konečnou variací nespojitosti pouze prvního druhu. Podívejme se nyní trochu podrobněji na vlastnosti funkcí s konečnou variací související se spojitostí.

2.21 Věta. *Každá funkce* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti na intervalu* $[a,b]$.

D ů k a z plyne z důsledku 2.16 a z následujícího lemmatu. □

2.22 Lemma. *Nechť* $J \subset \mathbb{R}$ *je otevřený interval,* $f : J \to \mathbb{R}$ *a* M *je množina bodů nespojitosti 1. druhu funkce* f *v* J*. Potom* M *je nejvýše spočetná.*

D ů k a z . a) Označme

$$M^+ = \{x \in J : f(x+) \neq f(x)\}, \qquad M^- = \{x \in J : f(x-) \neq f(x)\}$$

a

$$M_1^+ = \{x \in M^+ : f(x) < f(x+)\},\ M_2^+ = \{x \in M^+ : f(x) > f(x+)\}.$$

Potom je $M = M^+ \cup M^-$ a $M^+ = M_1^+ \cup M_2{}^+$. Uspořádejme množinu $\mathbb{P}$ racionálních čísel do posloupnosti $\mathbb{P} = \{r_k\}$. (Uvědomte si však, že množinu $\mathbb{P}$ nelze uspořádat „podle velikosti“, tj. tak aby platilo $r_k < r_{k+1}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$.)

Nechť r značí zobrazení, které každému $x \in M_1^+$ přiřadí první (při daném uspořádání množiny $\mathbb{P}$) racionální číslo, které leží v intervalu $(f(x), f(x+))$. Přesněji řečeno,

$$r(x) = r_j \iff r_j \in (f(x), f(x+)) \text{ a } \{r_1, r_2, \ldots, r_{j-1}\} \cap (f(x), f(x+)) = \emptyset.$$

Dále pro každé $q \in \mathbb{P}$ označme symbolem $r_{-1}(q)$ jeho vzor při zobrazení r, tj.

$$r_{-1}(q) = \{x \in M_1^+ : r(x) = q\}.$$

Máme

$$M_1^+ = \bigcup_{q \in \mathbb{P}} r_{-1}(q).$$

Ukážeme-li tedy, že každá množina $r_{-1}(q),\ q \in \mathbb{P}$ je spočetná, budeme mít současně také dokázáno, že i množina M_1^+ je spočetná.

Nechť je tedy dáno libovolné $q \in \mathbb{P}$. Vzhledem k definici množiny M_1^+ a zobrazení r pro každé $x \in r_{-1}(q)$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že

$$x < y < x + \delta(x) \implies f(y) > r(x).$$

Jsou-li $x_1, x_2 \in r_{-1}(q)$ taková, že $x_1 < x_2$ a $r(x_1) = r(x_2) = q$, pak musí platit

$$(x_1, x_1 + \delta(x_1)) \cap (x_2, x_2 + \delta(x_2)) = \emptyset.$$

Vskutku, kdyby bylo $x_1 < x_2 < x_1 + \delta(x_1)$, bylo by též (vzhledem k definici δ)

$$q = r(x_1) < f(x_2) < r(x_2) = q,$$

což není možné. Systém intervalů $\big\{(x, x + \delta(x)),\, x \in r_{-1}(q)\big\}$ je tedy disjunktní. Každému $x \in r_{-1}(q)$ lze tedy přiřadit jediné racionální číslo $p \in (x, x + \delta(x))$ a tím definovat prosté zobrazení $r_{-1}(q)$ do $\mathbb{P}$. To znamená, že pro každé $q \in \mathbb{P}$ je množina $r_{-1}(q)$ spočetná.

b) Protože $M_2^+ = \{x \in J : -f(x) < -f(x+)\}$, můžeme použít část a) tohoto důkazu k důkazu spočetnosti množiny $M_2{}^+$.

c) Konečně, $M^- = \{x \in J : f(-x) \neq f(-x+)\}$, takže podle částí a)–b) tohoto důkazu je také M^- spočetná množina. □

2.23 Poznámka. Klíčovým argumentem pro platnost lemmatu 2.22 je tvrzení: *Každý disjunktní systém intervalů v* $\mathbb{R}$ *je spočetný*. Důkaz tohoto tvrzení je v našem důkazu lemmatu 2.22 obsažen.

Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a

$$v(x) = \operatorname{var}_a^x f \quad \text{pro } x \in [a,b]. \tag{2.15}$$

Podle důkazu věty 2.14 víme, že funkce v a $v - f$ jsou neklesající na $[a,b]$. Ukážeme nyní, že funkce v kopíruje spojitost funkce f.

2.24 Lemma. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a* $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je definována vztahem* (2.15). *Potom*

$$\Delta^- v(x) = |\Delta^- f(x)| \quad \textit{pro } x \in (a,b] \tag{2.16}$$

a

$$\Delta^+ v(x) = |\Delta^+ f(x)| \quad \textit{pro } x \in [a,b). \tag{2.17}$$

D ů k a z . a) Jestliže $x \in [a,b)$, pak

$$v(t) - v(x) \geq \operatorname{var}_x^t f \geq |f(t) - f(x)| \quad \text{platí pro každé } t \in [x,b].$$

Podobně, je-li $x \in (a,b]$, pak

$$v(x) - v(s) \geq \operatorname{var}_t^x f \geq |f(x) - f(s)| \quad \text{platí pro každé } s \in [a,x].$$

Odtud, limitními přechody $t \to x$ zprava resp. $s \to x$ zleva dostáváme nerovnosti

$$\Delta^- v(x) \geq |\Delta^- f(x)| \quad \text{pro } x \in (a,b] \tag{2.18}$$

a

$$\Delta^+ v(x) \geq |\Delta^+ f(x)| \quad \text{pro } x \in [a,b). \tag{2.19}$$

b) Nechť $x \in (a,b]$ a $\varepsilon > 0$ jsou libovolné. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$|f(x-) - f(s)| < \varepsilon/2 \quad \text{pro} \quad s \in (x-\delta, x). \tag{2.20}$$

Dále, zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,x]$ tak, aby platilo současně

$$\sigma_{m-1} \ge x - \tfrac{\delta}{2} \quad \text{a} \quad v(x) - V(f, \boldsymbol{\sigma}) < \varepsilon/2. \tag{2.21}$$

Potom, podle (2.21) a (2.20), bude

$$\begin{aligned} v(x) - \sum_{j=1}^{m-1} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| &< V(f, \boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon/2 - \sum_{j=1}^{m-1} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \\ &= |f(x) - f(\sigma_{m-1})| + \varepsilon/2 \le |\Delta^- f(x)| + |f(x-) - f(\sigma_{m-1})| + \varepsilon/2 \\ &\le |\Delta^- f(x)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Protože je zřejmě

$$\sum_{j=1}^{m-1} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \le v(\sigma_{m-1})$$

a $v(t) \ge v(\sigma_{m-1})$ pro každé $t \in (\sigma_{m-1}, x)$, plyne odsud, že platí také

$$v(x) - v(t) \le v(x) - v(\sigma_{m-1}) \le v(x) - \sum_{j=1}^{m-1} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \le |\Delta^- f(x)| + \varepsilon$$

pro každé $t \in (\sigma_{m-1}, x)$ a každé $\varepsilon > 0$. Odtud, po limitním přechodu $t \to x$ zleva a vzhledem k tomu, že ε může být libovolné kladné číslo, dostáváme nerovnost

$$\Delta^- v(x) \le |\Delta^- f(x)|,$$

která společně s (2.18) dokazuje rovnost (2.16).

c) Nechť $x \in [a,b)$ a $\varepsilon > 0$ jsou libovolné. Zvolme $\delta \in (0, \frac{b-x}{2})$ tak, aby platilo

$$|f(s) - f(x+)| < \varepsilon/2 \quad \text{pro každé} \quad s \in (x, x+\delta). \tag{2.22}$$

Dále, zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_, \ldots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo současně

$$x \in \boldsymbol{\sigma} \quad \text{a} \quad v(b) - V(f, \boldsymbol{\sigma}) < \varepsilon/2. \tag{2.23}$$

Nechť $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$ je index takový, že $x = \sigma_k$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je navíc $\sigma_{k+1} < x + \delta$. Máme

$$\begin{aligned} v(\sigma_{k+1}) &- \sum_{j=1}^{k+1} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \Big(v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1}) - |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \Big) \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \Big(v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1}) - |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \Big) = v(b) - V(f, \boldsymbol{\sigma}) < \varepsilon/2.$$

Protože je také

$$v(x) = v(\sigma_k) \geq \sum_{j=1}^{k} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})|,$$

dostáváme podle (2.22) pro každé $t \in (x, \sigma_{k+1}) \subset (x, x+\delta)$

$$\begin{aligned} v(t) - v(x) &\leq v(\sigma_{k+1}) - v(x) \\ &\leq \sum_{j=1}^{k+1} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| + \varepsilon/2 - \sum_{j=1}^{k} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \\ &= |f(\sigma_{k+1}) - f(x)| + \varepsilon/2 \\ &= |\Delta^+ f(x)| + |f(\sigma_{k+1}) - f(x+)| + \varepsilon/2 < |\Delta^+ f(x)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Platí tedy

$$v(t) - v(x) < |\Delta^+ f(x)| + \varepsilon \quad \text{pro každé } t \in (x, \sigma_{k+1}) \text{ a každé } \varepsilon > 0.$$

Odtud, po limitním přechodu $t \to x+$ dostaneme nerovnost $\Delta^+ v(x) \leq |\Delta^+ f(x)|$, která společně s (2.19) implikuje (2.17). □

Následující tvrzení je okamžitým důsledkem lemmatu 2.24.

2.25 Důsledek. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ je definována vztahem* (2.15). *Potom je f spojitá v bodě $x \in [a,b)$ zprava právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zprava i funkce v. Podobně, f je spojitá v bodě $x \in (a,b]$ zleva právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zleva i funkce v.*

Z další věty vyplyne, že součet absolutních hodnot skoků funkce s konečnou variací je vždy konečný. Pro její důkaz budeme potřebovat následující tvrzení.

2.26 Lemma. *Nechť f je libovolná funkce s konečnou variací na $[a,b]$ a nechť funkce $\mathfrak{p}$ a $\mathfrak{n}$ jsou definovány jako ve cvičení 2.15. Potom*

$$\Delta^- \mathfrak{p}(x) = (\Delta^- f(x))^+, \ \Delta^- \mathfrak{n}(x) = (\Delta^- f(x))^- \quad \textit{pro } x \in (a,b], \tag{2.24}$$

a

$$\Delta^+ \mathfrak{p}(x) = (\Delta^+ f(x))^+, \ \Delta^+ \mathfrak{n}(x) = (\Delta^+ f(x))^- \quad \textit{pro } x \in [a,b). \tag{2.25}$$

D ů k a z . Vzhledem k definicím obsaženým ve cvičení 2.15, můžeme důkaz provést zcela analogicky jako důkaz tvrzení obsažených v lemmatu 2.24. (Jenom je třeba pracovat s $(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1}))^+$ resp. $(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1}))^-$ místo s $|f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})|$.) Podrobný důkaz je ponechán čtenáři jako cvičení. □

2.27 Cvičení. Dokažte podrobně lemma 2.26.

2.28 Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a nechť* $\{s_k\}$ *je prostá posloupnost bodů z intervalu* (a,b). *Potom*

$$|\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)|\Big) + |\Delta^- f(b)| \le \operatorname{var}_a^b f. \tag{2.26}$$

D ů k a z . a) Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Potom

$$\begin{aligned}|\Delta^+ f(a)| &+ \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)|\Big) + |\Delta^- f(b)| \\ &= \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta f(s_k) + \Delta^- f(b).\end{aligned}$$

Nechť $m \in \mathbb{N}$ a $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{m+1}$ jsou body intervalu $[a,b]$ takové, že

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_m < \sigma_{m+1} = b$$

a

$$\big\{\sigma_k : k = 0, \dots m+1\big\} = \{a\} \cup \{s_k : k = 1, \dots, m\} \cup \{b\}.$$

Zvolme dále $t_k,\ k = 1, 2, \dots, m+1,$ tak, aby platilo

$$a < t_1 < \sigma_1 < t_2 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_m < t_{m+1} < b.$$

Potom je

$$0 \le \Delta^+ f(a) \le f(t_1) - f(a),\ \ 0 \le \Delta^- f(b) \le f(b) - f(t_{m+1})$$

a

$$0 \le \Delta f(\sigma_k) \le f(t_{k+1}) - f(t_k) \quad \text{pro } \ k = 1, 2, \dots, m.$$

Tudíž

$$\begin{aligned}\Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{m} \Delta f(s_k) + \Delta^- f(b) &= \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{m} \Delta f(\sigma_k) + \Delta^- f(b) \\ &\le \big(f(t_1) - f(a)\big) + \sum_{k=1}^{m} \big(f(t_{k+1}) - f(t_k)\big) + \big(f(b) - f(t_{n+1})\big) \\ &= f(b) - f(a).\end{aligned}$$

Pro libovolné $m \in \mathbb{N}$ tedy máme

$$\Delta^+ f(a) + \sum_{k=0}^{m} \Delta f(s_k) + \Delta^- f(b) \le f(b) - f(a) = \operatorname{var}_a^b f.$$

Nerovnost (2.26) tedy platí pro každou funkci f neklesající na $[a,b]$.

b) Nyní nechť f je libovolná funkce s konečnou variací na $[a,b]$ a nechť funkce $\mathfrak{p}$ a $\mathfrak{n}$ jsou definovány jako ve cvičení 2.15. Víme, že $f = f(a) + \mathfrak{p} - \mathfrak{n}$ na $[a,b]$. Zřejmě platí

$$\Delta^+ f(t) = \Delta^+\mathfrak{p}(t) - \Delta^+\mathfrak{n}(t) \quad \text{a} \quad \Delta^- f(s) = \Delta^-\mathfrak{p}(s) - \Delta^-\mathfrak{n}(s)$$

pro $t \in [a,b)$, $s \in (a,b]$. Konečně, pomocí lemmatu 2.26 získáme rovnosti

$$|\Delta^+ f(t)| = \Delta^+\mathfrak{p}(t) + \Delta^+\mathfrak{n}(t) \quad \text{a} \quad |\Delta^- f(s)| = \Delta^-\mathfrak{p}(s) + \Delta^-\mathfrak{n}(s) \tag{2.27}$$

pro $t \in [a,b)$, $s \in (a,b]$.

Podle první části důkazu máme

$$\Delta^+\mathfrak{p}(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\Delta^+\mathfrak{p}(s_k) + \Delta^-\mathfrak{p}(s_k)\Big) + \Delta^-\mathfrak{p}(b) \le \mathfrak{p}(b)$$

a

$$\Delta^+\mathfrak{n}(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\Delta^+\mathfrak{n}(s_k) + \Delta^-\mathfrak{n}(s_k)\Big) + \Delta^-\mathfrak{n}(b) \le \mathfrak{n}(b).$$

Sečteme-li tyto nerovnosti, dostaneme

$$|\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=0}^{\infty}\Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)|\Big) + |\Delta^- f(b)| \le \mathfrak{p}(b) + \mathfrak{n}(b) = \operatorname{var}_a^b f,$$

tj. (2.26) platí pro každou funkci f s konečnou variací. □

2.29 Poznámka. Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci a nechť množina D jejích bodů nespojitosti v (a,b) je nekonečná. Podle věty 2.21 je D spočetná. Existuje tedy vzájemně jednoznačné zobrazení $k \in \mathbb{N} \to s_k \in D$ takové, že $D = \{s_k\}$. Takových zobrazení je zřejmě nekonečně mnoho. Podle věty 2.28 je však řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)|\Big)$$

absolutně konvergentní a její součet nezávisí na volbě uspořádání množiny D. Protože pro $x \in (a,b)$ je $|\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)| \neq 0$ pouze tehdy, když $x \in D$, má tedy smysl definovat

$$\left.\begin{aligned} \sum_{a<x<b} \Big(|\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)|\Big) &= \sum_{x \in D} \Big(|\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)|\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)|\Big), \end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

kde $\{s_k\}$ je libovolná prostá posloupnost bodů z (a,b) taková, že $D = \{s_k\}$. Analogicky budeme rozumět i symbolům

$$\sum_{a \le x < b}, \text{ resp. } \sum_{a < x \le b}, \text{ resp. } \sum_{a \le x \le b}, \text{ případně } \sum_{x \in [a,b)}, \sum_{x \in (a,b]}, \sum_{x \in [a,b]} \text{ a p..}$$

Větu 2.28 můžeme nyní přeformulovat do následující podoby.

2.30 Důsledek. Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ platí

$$|\Delta^+ f(a)| + \sum_{a<x<b} \big(|\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)|\big) + |\Delta^- f(b)| \le \operatorname{var}_a^b f. \tag{2.29}$$

2.4 Derivace funkcí s konečnou variací

Nyní se budeme věnovat vlastnostem funkcí s konečnou variací vzhledem k derivování. Nejprve připomeňme pojem množin s nulovou mírou.

2.31 Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}$ má *nulovou míru* ($\mu(M) = 0$), když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje nejvýše spočetný systém otevřených intervalů I_j, $j \in \mathbb{N}$, takový, že

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon.$$

Řekneme, že nějaká vlastnost platí *skoro všude* (s.v.) na intervalu $[a,b]$, jestliže existuje množina $M \subset [a,b]$ nulové míry taková, že tato vlastnost platí pro každé $x \in [a,b] \setminus M$.

2.32 Cvičení. Dokažte, že platí:

(i) *Každá spočetná množina $S \subset \mathbb{R}$ má nulovou míru.*

(ii) *Sjednocení spočetně mnoha množin nulové míry má nulovou míru.*

2.33 Věta (LEBESGUEOVA VĚTA O DERIVACI MONOTÓNNÍ FUNKCE). *Každá funkce f, definovaná a monotónní na intervalu $[a,b]$, má konečnou derivaci $f'(x)$ pro s.v. $x \in [a,b]$.*

Důkaz věty 2.33 je rozsáhlý, technicky komplikovaný a do značné míry závislý na pojmech, které se do tohoto textu nevejdou. Pro důkaz odkazujeme na učebnice, které obsahují důkladný přehled této tematiky (viz např. [16, věta 84], [17, věta VI.1.2], [35, Theorem 22.5]).

2.34 Poznámka. Speciálně vzhledem k větě 2.14, má každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ konečnou derivaci skoro všude na intervalu $[a,b]$. Je dokonce známo, že derivace funkcí s konečnou variací jsou lebesgueovsky integrovatelné. **ALE !!!** Obecně neplatí pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ zdánlivě přirozená rovnost

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Existují totiž funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ nekonstantní na $[a,b]$ a takové, že $f' = 0$ s.v. na $[a,b]$.

2.35 Definice. Funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ se nazývá *singulární*, jestliže

$$f\,'(x) = 0 \quad \text{pro s.v. } x \in [a,b].$$

2.5 Skokové funkce

Nejjednoduššími příklady nekonstantních singulárních funkcí jsou funkce typu $f = \chi_{[a,c]}$, kde $c \in (a,b)$. Jejich zobecněním jsou třídy *jednoduchých skokových funkcí* (anglicky *step functions*).

2.36 Definice. Funkce $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je *jednoduchá (též konečná) skoková funkce na* $[a,b]$, jestliže existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že na každém jeho dílčím otevřeném intervalu (σ_{j-1}, σ_j) je f konstantní.

Množinu jednoduchých skokových funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathbb{S}[a,b]$.

Podle definice je tedy funkce $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ jednoduchá skoková funkce právě tehdy, když existují: $m \in \mathbb{N}$, množiny $\{\widetilde{c}_j : j = 0,1,\ldots,m\} \subset \mathbb{R}$, $\{\widetilde{d}_j : j = 1,2,\ldots,m\} \subset \mathbb{R}$ a dělení $\{a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že je

$$f(s_j) = \widetilde{c}_j \quad \text{pro } j = 0,1,\ldots,m,$$

a

$$f(x) = \widetilde{d}_j \quad \text{pro } x \in (s_{j-1}, s_j) \text{ a } j = 1,2,\ldots,m,$$

tj.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{j=0}^{m} \widetilde{c}_j\,\chi_{[s_j]}(x) + \sum_{j=1}^{m} \widetilde{d}_j\,\chi_{(s_{j-1},s_j)}(x)\\
&= \widetilde{c}_0\,(\chi_{[a,b]}(x) - \chi_{(a,b]}(x)) + \sum_{j=1}^{m-1} \widetilde{c}_j\,(\chi_{[s_j,b]} - \chi_{(s_j,b]}(x)) + \widetilde{c}_m\,\chi_{[b]}(x)\\
&\qquad + \sum_{j=1}^{m-1} \widetilde{d}_j\,(\chi_{(s_{j-1},b]}(x) - \chi_{[s_j,b]}(x)) + \widetilde{d}_m\,(\chi_{[s_{m-1},b]}(x) - \chi_{[b]}(x))\\
&= \widetilde{c}_0 + \sum_{j=0}^{m-1} (\widetilde{d}_{j+1} - \widetilde{c}_j)\,\chi_{(s_j,b]}(x) + \sum_{j=1}^{m-1} (\widetilde{c}_j - \widetilde{d}_j)\,\chi_{[s_j,b]}(x) + (\widetilde{c}_m - \widetilde{d}_m)\,\chi_{[b]}(x),
\end{aligned}$$

neboli

$$f(x) = c + \sum_{j=0}^{m-1} c_j\,\chi_{(s_j,b]}(x) + \sum_{j=1}^{m-1} d_j\,\chi_{[s_j,b]}(x) + d\,\chi_{[b]}(x) \ \text{ pro } x \in [a,b], \tag{2.30}$$

kde

$$c = \widetilde{c}_0, \quad c_j = \widetilde{d}_{j+1} - \widetilde{c}_j \quad \text{pro } j = 0,1,\ldots,m-1,$$

a

$$d_j = \widetilde{c}_j - \widetilde{d}_j \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, m-1, \quad d = \widetilde{c}_m - \widetilde{d}_m.$$

Zřejmě platí $f(a) = c$,

$$f(x-) = f(x) \text{ pro } x \in (a,b] \setminus \{s_k\}, \quad f(x) = f(x+) \text{ pro } x \in [a,b) \setminus \{s_k\}$$

a

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^+ f(s_j) = \widetilde{d}_{j+1} - \widetilde{c}_j = c_j && \text{pro } j = 0, 1, \ldots, m-1, \\ &\Delta^- f(s_j) = \widetilde{c}_j - \widetilde{d}_j = d_j && \text{pro } j = 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}\right\}$$

Dalším zobecněním tohoto pojmu jsou pak *skokové funkce* (nebo též *funkce skoků*). Anglicky se nejčastěji nazývají *break functions*.

2.37 Definice. Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se nazývá *skoková funkce na* $[a,b]$, jestliže buďto f je jednoduchá skoková funkce, nebo existují reálná čísla $c, c_0, d \in \mathbb{R}$, prostá posloupnost $\{s_k\} \subset (a,b)$ a posloupnosti $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ a $\{d_k\} \subset \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(|c_k| + |d_k|\big) < \infty \tag{2.31}$$

a

$$\left.\begin{aligned} f(x) = c + c_0\, \chi_{(a,b]}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(c_k\, \chi_{(s_k,b]}(x) + d_k\, \chi_{[s_k,b]}(x)\Big) + d\, \chi_{[b]}(x) \\ \text{pro } x \in [a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{2.32}$$

Množinu skokových funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathbb{B}[a,b]$.

Jestliže $f \in \mathbb{B}[a,b]$, není jednoduchá skoková funkce, pak posloupnost $\{s_k\}$ z definice 2.37 má nekonečně různých prvků a nemusí být vždy možné uspořádat tuto posloupnost bodů intervalu $[a,b]$ "podle velikosti". Díky podmínce (2.31) ale máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big|c_k\, \chi_{(s_k,b]}(x) + d_k\, \chi_{[s_k,b]}(x)\big| \le \sum_{k=1}^{\infty} \big(|c_k| + |d_k|\big) < \infty. \tag{2.33}$$

To znamená, že řada na pravé straně rovnosti (2.32) je absolutně konvergentní pro každé $x \in [a,b]$. Hodnoty $f(x)$ tedy nazávisí na konkrétním uspořádání posloupnosti $\{s_k\}$. Pro každé $x \in [a,b]$ tedy může být rovnost (2.32) přepsána v ekvivalentním tvaru

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{pro } x = a, \\ c + c_0 + \displaystyle\sum_{a < s_k < x} c_k + \sum_{a < s_k \le x} d_k & \text{pro } x \in (a,b), \\ c + c_0 + \displaystyle\sum_{a < s_k < b} c_k + \sum_{a < s_k < b} d_k + d & \text{pro } x = b, \end{cases} \tag{2.34}$$

kde v sumě $\sum\limits_{a<s_k<x} c_k$ se sčítá přes všechny indexy $k \in \mathbb{N}$, pro které je $s_k \in (a,x)$, v sumě $\sum\limits_{a<s_k\le x} d_k$ se sčítá přes všechny indexy $k\in\mathbb{N}$, pro které je $s_k \in (a,x]$, a analogický význam má také suma $\sum\limits_{a<s_k<b} d_k$.

Pro funkce $f\in\mathbb{B}[a,b]$ definované rovností (2.32) evidentně platí $f(a)=c$. Z vyjádření (2.34) je zřejmé, že existuje-li $\delta>0$ takové, že je $(a,a+\delta)\cap\{s_k\}=\emptyset$, pak pro takové funkce platí také

$$f(a+)=c+c_0\,. \tag{2.35}$$

V obecném případě je třeba uvážit, že v limitě

$$\lim_{t\to a+}\Big(\sum_{a<s_k<t} c_k+\sum_{a<s_k\le t} d_k\Big)$$

jde o limitu zbytku absolutně konvergentní řady, tedy tato limita je nutně nulová a tudíž (2.35) platí i když je a hromadný bod množiny $\{s_k\}$. Podobnou úvahou dokážeme i všechny následujících formule

$$\left.\begin{aligned} &f(x-)=c+c_0+\sum_{a<s_k<x} c_k+\sum_{a<s_k<x} d_k \quad \text{když} \quad x\in(a,b]\,,\\ \text{a}\quad & \\ &f(x+)=c+c_0+\sum_{a<s_k\le x} c_k+\sum_{a<s_k\le x} d_k \quad \text{když} \quad x\in[a,b)\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

Odečteme-li od sebe výrazy z (2.34) a (2.36) zjistíme, že platí

$$f(x-)=f(x)=f(x+) \text{ pro } x\in(a,b)\setminus\{s_k\} \tag{2.37}$$

a

$$\left.\begin{aligned} \Delta^+ f(s_k)&=c_k \quad \text{pro } k\in\mathbb{N},\ \Delta^+ f(a)=c_0,\\ \Delta^- f(s_k)&=d_k \quad \text{pro } k\in\mathbb{N},\ \Delta^- f(b)=d. \end{aligned}\right\} \tag{2.38}$$

Máme tedy k dispozici další dvě možná ekvivalentní vyjádření definice (2.32):

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} c & \text{pro } x=a,\\ c+\Delta^+ f(a)+\sum\limits_{a<s_k<x}\Delta^+ f(s_k)+\sum\limits_{a<s_k\le x}\Delta^- f(s_k) & \text{pro } x\in(a,b),\\ c+\Delta^+ f(a)+\sum\limits_{a<s_k<b}\Delta^+ f(s_k)+\sum\limits_{a<s_k<b}\Delta^- f(s_k)+\Delta^- f(b) & \text{pro } x=b \end{array}\right\} \tag{2.39}$$

resp.

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f(a) + \Delta^+ f(a)\, \chi_{(a,b]}(x) + &\sum_{d\in D} \left[\Delta^+ f(s_k)\, \chi_{(d,b]}(x) + \Delta^- f(s_k)\, \chi_{[d,b]}(x)\right] \\ &+ \Delta^- f(b)\, \chi_{[b]}(x) \quad \text{pro } x \in [a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{2.40}$$

Připomeňme, že předpokládáme, že $\{s_k\} \subset (a,b)$. Vzhledem ke (2.38) tedy vidíme, že $\{s_k\}$ je množina bodů nespojitosti funkce f na otevřeném intervalu (a,b), zatímco množina bodů nespojitosti D funkce f na uzavřeném intervalu $[a,b]$ je obsažena v množině $\{s_k\} \cup \{a\} \cup \{b\}$. (Body a, b mohou být body nespojitosti funkce f, ale nemusí.)

2.38 Věta. $\mathbb{S}[a,b] \subset \mathbb{B}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$ *a pro každou skokovou funkci* $f \in \mathbb{B}[a,b]$ *platí*

$$\operatorname{var}_a^b f = |\Delta^+ f(a)| + \sum_{a<x<b} \Big(|\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)|\Big) + |\Delta^- f(b)| < \infty. \tag{2.41}$$

D ů k a z . Podle definice je zřejmě $\mathbb{S}[a,b] \subset \mathbb{B}[a,b]$ a $\mathbb{S}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$. Dále je zřejmé, že (2.41) platí pro každou jednoduchou skokovou funkci $f \in \mathbb{S}[a,b]$.

Předpokládejme tedy, že $f \in \mathbb{B}[a,b] \setminus \mathbb{S}[a,b]$ je vyjádřena ve tvaru (2.34), přičemž platí (2.31). Vzhledem k (2.38), tedy máme

$$\left.\begin{aligned} &|\Delta^+ f(a)| + \sum_{a<x<b} \Big(|\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)|\Big) + |\Delta^- f(b)| \\ &\qquad = |c_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|c_k| + |d_k|\Big) + |d| < \infty\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

Pro libovolná $x, y \in (a,b)$, $x < y$, platí

$$|f(y) - f(x)| \le \sum_{x \le s_k < y} |c_k| + \sum_{x < s_k \le y} |d_k|.$$

Dále,

$$|f(y) - f(a)| \le |c_0| + \sum_{a < s_k < y} |c_k| + \sum_{a < s_k \le y} |d_k| \quad \text{pro } a < y < b,$$

a

$$|f(b) - f(x)| \le \sum_{x \le s_k < b} |c_k| + \sum_{x < s_k < b} |d_k| + |d| \qquad \text{pro } a < x < b.$$

Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ takové, že $\nu(\sigma) \ge 3$ tedy platí

$$\begin{aligned} V(f,\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| &\le |c_0| + \Bigg(\sum_{a<s_k<\sigma_1} |c_k| + \sum_{a<s_k\le\sigma_1} |d_k|\Bigg) \\ + \sum_{j=2}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1} \Bigg(\sum_{\sigma_{j-1}\le s_k<\sigma_j} |c_k| + \sum_{\sigma_{j-1}<s_k\le\sigma_j} |d_k|\Bigg) &+ \Bigg(\sum_{\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1}\le s_k<b} |c_k| + \sum_{\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1}<s_k<b} |d_k|\Bigg) + |d| \\ \le |c_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \big(|c_k| + |d_k|\big) + |d|. \end{aligned}$$

Odtud plyne podle (2.31), že

$$\operatorname{var}_a^b f \le |c_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| + |d_k|) + |d| < \infty, \tag{2.43}$$

tj. $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a $\mathbb{B}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$. Konečně, podle věty 2.28 máme

$$|\Delta^+ f(a)| + \sum_{x \in (a,b)} \Big(|\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)|\Big) + |\Delta^- f(b)| \le \operatorname{var}_a^b f\,.$$

Odtud, vzhledem k (2.42) a (2.43), už plyne, že platí (2.41). □

Je-li f jednoduchá skoková funkce na $[a,b]$, pak zřejmě platí $f'(x) = 0$ pro každé $x \in [a,b] \setminus M$, kde $M \subset [a,b]$ je nějaká konečná (nebo také prázdná) množina. Jednoduché skokové funkce na $[a,b]$ jsou tedy singulární na $[a,b]$. Ukážeme, že dokonce každá skoková funkce na $[a,b]$ je singulární na $[a,b]$. K tomu budeme potřebovat následující tvrzení známé ze základů matematické analýzy jako *malá Fubinova věta*.

2.39 Věta (MALÁ FUBINIOVA). *Nechť* $\{f_k\}$ *je posloupnost funkcí neklesajících na* $[a,b]$ *a taková, že řada* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *konverguje pro každé* $x \in [a,b]$. *Potom*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) < \infty \quad \textit{pro s.v. } x \in [a,b].$$

D ů k a z . a) Označme

$$g_k(x) = f_k(x) - f_k(a) \quad \text{a} \quad g(x) = f(x) - f(a) \quad \text{pro } k \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad x \in [a,b]$$

Potom jsou všechny funkce $g, g_k,\ k \in \mathbb{N}$, nezáporné a neklesající na $[a,b]$ a

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Označme ještě

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \quad \text{pro } x \in [a,b] \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Podle věty 2.33 pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje množina $D_k \subset [a,b]$ nulové míry taková, že funkce g_k má konečnou derivaci $g'_k(x)$ pro každé $x \in [a,b] \setminus D_k$. Podobně existuje konečná derivace $g'(x)$ pro každé $x \in [a,b] \setminus D$, kde $D \subset [a,b]$ má také nulovou míru. Označíme-li tedy $\widetilde{D} = D \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$, můžeme shrnout, že konečné derivace $g'(x)$ a $g'_k(x)$ existují pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé $x \in [a,b] \setminus \widetilde{D}$. Podle Cvičení 2.32 (ii) má ovšem také množina $\widetilde{D}$ nulovou míru.

Pro libovolná $x \in [a,b] \setminus \widetilde{D}$ a $\xi \in [a,b]$ taková, že $\xi \neq x$, máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(\xi) - g_k(x)}{\xi - x} = \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x}.$$

Protože každý sčítanec v sumě na levé straně je neklesající, plyne odtud, že

$$\frac{s_n(\xi) - s_n(x)}{x - \xi} = \sum_{k=1}^{n} \frac{g_k(\xi) - g_k(x)}{\xi - x} \leq \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x}$$

platí pro libovolná $x \in [a,b] \setminus \widetilde{D}$, $\xi \in [a,b] \setminus \{x\}$ a $n \in \mathbb{N}$. Limitním přechodem $\xi \to x$ dostaneme

$$s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k'(x) \leq g'(x) \quad \text{pro } x \in [a,b] \setminus \widetilde{D} \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Díky tomu, že je $g_k'(x) \geq 0$ pro $x \in [a,b] \setminus \widetilde{D}$ a $k \in \mathbb{N}$, je pro každé $x \in [a,b] \setminus \widetilde{D}$ posloupnost $\{s_n'\}$ neklesající (vzhledem k n). Pro každé $x \in [a,b] \setminus \widetilde{D}$ tedy existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x) \leq g'(x), \tag{2.44}$$

tj. řada $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x)$ konverguje pro s.v. $x \in [a,b]$.

b) Z druhé strany, pro každé $\ell \in \mathbb{N}$ existuje n_ℓ takové, že $0 \leq g(b) - s_{n_\ell}(b) < \dfrac{1}{2^\ell}$. Protože funkce g_k jsou všechny neklesající, plyne odtud, že je

$$0 \leq g(x) - s_{n_\ell}(x) = \sum_{n_\ell+1}^{\infty} g_k(x) \leq \sum_{n_\ell+1}^{\infty} g_k(b) = g(b) - s_{n_\ell}(b) < \frac{1}{2^\ell}$$

a tudíž také

$$0 \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \big(g(x) - s_{n_\ell}(x)\big) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} = 1 \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Podle části a), kde uvažujeme posloupnost $\big\{g(x) - s_{n_\ell}(x)\big\}$ místo $\{g_k\}$, dostáváme odtud, že i řada $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{\infty} \big(g'(x) - s_{n_\ell}'(x)\big)$ je konvergentní pro s.v. $x \in [a,b]$. Speciálně, musí platit

$$\lim_{\ell\to\infty} \big(g'(x) - s_{n_\ell}'(x)\big) = 0 \quad \text{pro s.v. } x \in [a,b].$$

Toto by ovšem nemohlo být pravda, kdyby nerovnost v (2.44) byla ostrá. Platí tedy rovnosti

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f(x)-f(a))' = g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \big(f_k(x)-f(a)\big)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) \quad \text{pro s.v. } x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. $\square$

2.40 Věta. *Každá skoková funkce na* $[a,b]$ *je singulární na* $[a,b]$.

D ů k a z. Nechť $f \in \mathbb{B}[a,b] \setminus \mathbb{S}[a,b]$ a čísla $c, c_0, d \in \mathbb{R}$, posloupnosti $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ a $\{d_k\} \subset \mathbb{R}$ a prostá posloupnost $\{s_k\} \subset (a,b)$ jsou takové, že platí (2.31) a (2.32). Definujme

$$v_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } x = a, \\ |c_0| & \text{když } x > a, \end{cases} \qquad v_b(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } x < b, \\ |d| & \text{když } x = b, \end{cases}$$

a

$$v_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{když } x < s_k, \\ |d_k| & \text{když } x = s_k, \\ |c_k| + |d_k| & \text{když } x > s_k \end{cases} \qquad \text{a } k \in \mathbb{N}.$$

Každá z těchto funkcí je neklesající na $[a,b]$,

$$\begin{aligned} &v_a'(x) = 0 \text{ pro } x \neq a, \quad v_b'(x) = 0 \text{ pro } x \neq b. \\ &v_k'(x) = 0 \text{ pro } x \neq s_k \text{ a } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dále, podle (2.31) je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \big(|c_k| + |d_k|\big) < \infty \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Řada $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ tedy konverguje absolutně pro každé $x \in [a,b]$ a funkce

$$v(x) = v_a(x) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) + v_b(x)$$

je definovaná pro každé $x \in [a,b]$. Podle věty 2.39 tudíž platí

$$v'(x) = v_a'(x) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k'(x) + v_b'(x) = 0 \quad \text{pro s.v. } x \in [a,b].$$

Protože pro všechna $x, y \in [a, b]$ taková, že $x \neq y$, zřejmě platí

$$\Big|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\Big| \leq \Big|\frac{v(x) - v(y)}{x - y}\Big|,$$

plyne odsud, že je také $f'(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a, b]$.

V případě, že $f \in \mathbb{S}[a, b]$, je tvrzení věty evidentní. □

2.41 Poznámka. Příklad funkce, která je spojitá, neklesající a singulární na daném intervalu, je uveden v [15, V.9, cvičení 4].

2.6 Jordanův rozklad funkce s konečnou variací

2.42 Věta. *Každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a, b]$ lze vyjádřit jako součet $f = f_1 + f_2$ na $[a, b]$, kde $f_1 \in \mathbb{BV}[a, b] \cap \mathbb{C}[a, b]$ a $f_2 \in \mathbb{B}[a, b]$.*

Je-li $f = \widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2$, kde $\widetilde{f}_1 \in \mathbb{C}[a, b] \cap \mathbb{BV}[a, b]$ a $\widetilde{f}_2 \in \mathbb{B}[a, b]$, jiný takový rozklad, potom existuje konstanta $\varkappa \in \mathbb{R}$ taková, že

$$f_1(x) - \widetilde{f}_1(x) = \widetilde{f}_2(x) - f_2(x) = \varkappa \quad \textit{pro} \ \ x \in [a, b].$$

D ů k a z . a) Označme symbolem D množinu bodů nespojitosti funkce f na otevřeném intervalu (a, b). Víme, že množina D je nejvýše spočetná tj.

$$D = \{s_k \in (a, b) : k \in \mathbb{K}\}, \ \ \text{kde} \ \ \mathbb{K} = \{1, 2, \dots, m\} \ \ \text{pro nějaké} \ \ m \in \mathbb{N} \ \ \text{nebo} \ \ \mathbb{K} = \mathbb{N}.$$

Definujme

$$\left.\begin{aligned} f_2(x) = {} & f(a) + \Delta^+ f(a)\, \chi_{(a,b]}(x) \\ & + \textstyle\sum_{k \in \mathbb{K}} \big(\Delta^+ f(s_k)\, \chi_{(s_k,b]}(x) + \Delta^- f(s_k)\, \chi_{[s_k,b]}(x)\big) \\ & + \Delta^- f(b)\, \chi_{[b]}(x) \quad \text{pro} \ \ x \in [a, b], \end{aligned}\right\} \tag{2.45}$$

kde c je libovolná reálná konstanta. Podle důsledku 2.30 platí

$$|\Delta^+ f(a)| + \sum_{k \in \mathbb{K}} \big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)|\big) + |\Delta^- f(b)| \leq \operatorname{var}_a^b f < \infty$$

a podle definice 2.37 je tedy $f_2 \in \mathbb{B}[a, b]$. Podle (2.38) máme

$$\Delta^+ f_2(t) = \Delta^+ f(t) \ \ \text{a} \ \ \Delta^- f_2(s) = \Delta^- f(s) \ \ \text{pro} \ \ t \in [a, b) \ \ \text{a} \ \ s \in (a, b]. \tag{2.46}$$

Tudíž

$$\big((f(t+) - f_2(t+)\big) - \big(f(t) - f_2(t)\big) = \Delta^+ f(t) - \Delta^+ f_2(t) = 0 \quad \text{pro } t \in [a, b)$$

a

$$\big(f(s) - f_2(s)\big) - \big(f(s-) - f_2(s-)\big) = \Delta^- f(s) - \Delta^- f_2(s) = 0 \quad \text{pro } s \in (a,b].$$

Funkce $f_1 = f - f_2$ je tedy spojitá na $[a,b]$ a $f = f_1 + f_2$ na $[a,b]$.

b) Nechť $f = \widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2$, kde $\widetilde{f}_1 \in \mathbb{C}[a,b] \cap \mathbb{BV}[a,b]$ a $\widetilde{f}_2 \in \mathbb{B}[a,b]$. Potom

$$0 = \Delta^+ \widetilde{f}_1(t) = \big(f(t+) - \widetilde{f}_2(t+)\big) - \big(f(t) - \widetilde{f}_2(t)\big) = \Delta^+ f(t) - \Delta^+ \widetilde{f}_2(t)$$

a

$$0 = \Delta^- \widetilde{f}_1(s) = \big(f(s) - \widetilde{f}_2(s)\big) - \big(f(s-) - \widetilde{f}_2(s-)\big) = \Delta^- f(s) - \Delta^- \widetilde{f}_2(s)$$

platí pro všechna $t \in [a,b)$ a $s \in [a,b)$. Vzhledem k (2.46) dostáváme tedy

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^+ \widetilde{f}_2(t) = \Delta^+ f_2(t) = \Delta^+ f(t) && \text{pro } t \in [a,b) \\ \text{a}\quad & \\ &\Delta^- \widetilde{f}_2(s) = \Delta^- f_2(s) = \Delta^- f(s) && \text{pro } s \in (a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{2.47}$$

Podle definice 2.37 existují reálná čísla $\widetilde{c}, \widetilde{c}_0, \widetilde{d}$ a posloupnosti $\{\widetilde{c}_k\}$ a $\{\widetilde{d}_k\}$ takové, že

$$\sum_{k \in \mathbb{K}} (|\widetilde{c}_k| + |\widetilde{d}_k|) < \infty$$

a

$$\widetilde{f}_2(x) = \widetilde{c} + \widetilde{c}_0\, \chi_{(a,b]}(x) + \sum_{k \in \mathbb{K}} \Big(\widetilde{c}_k\, \chi_{(s_k,b]}(x) + \widetilde{d}_k\, \chi_{[s_k,b]}(x)\Big) + \widetilde{d}\, \chi_{[b]}(x) \text{ pro } x \in [a,b].$$

Podobně jako v (2.38) dostaneme

$$\Delta^+ \widetilde{f}(s_k) = \widetilde{c}_k \text{ pro } k \in \mathbb{N},\ \Delta^+ \widetilde{f}(a) = \widetilde{c}_0,\ \ \Delta^- \widetilde{f}(s_k) = \widetilde{d}_k \text{ pro } k \in \mathbb{N},\ \Delta^- \widetilde{f}(b) = d\,,$$

čili, vzhledem ke (2.47), máme

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_2(x) &= \widetilde{c} + \Delta^+ f(a)\, \chi_{(a,b]}(x) + \sum_{k \in \mathbb{K}} \Big(\Delta^+ f(s_k)\, \chi_{(s_k,b]}(x) + \Delta^- f(s_k)\, \chi_{[s_k,b]}(x)\Big) \\ &\qquad + \Delta^- f(b)\, \chi_{[b]}(x) \\ &= (\widetilde{c} - f(a)) + f_2(x) \quad \text{pro } x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Rozdíl funkcí $\widetilde{f}_2 - f_2$ je tedy všude na intervalu $[a,b]$ roven konstantě $\varkappa := \widetilde{c} - f(a)$. Tudíž také

$$f_1(x) - \widetilde{f}_1(x) = (f(x) - f_2(x)) - (f(x) - \widetilde{f}_2(x)) = \widetilde{f}_2(x) - f_2(x) = \varkappa \text{ pro } x \in [a,b]\,.$$

Tím je důkaz věty dokončen. □

2.43 Poznámka. Podle věty 2.42 lze každou funkci s konečnou variací rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové. Takový rozklad se nazývá *Jordanův rozklad* funkce s konečnou variací.

2.44 Definice. Každou funkci f_2 přiřazenou k f podle věty 2.42 nazýváme *skoková část* funkce f. Rozdíl $f - f_2$ nazýváme *spojitá část* funkce f. Skokovou, resp. spojitou část funkce f značíme obvykle f^{B}, resp. f^{C}.

Při práci se skokovými funkcemi se bude výhodné vědět, že každou skokovou funkci můžeme aproximovat v normě prostoru $\mathbb{BV}$ jednoduchými skokovými funkcemi.

2.45 Tvrzení. *Pro každou skokovou funkci $f \in \mathbb{B}[a,b]$ existuje posloupnost $\{f_n\} \subset \mathbb{S}[a,b]$ jednoduchých skokových funkcí taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\mathbb{BV}} = 0. \tag{2.48}$$

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{B}[a,b]$. Jestliže je množina D bodů její nespojitosti v intervalu (a,b) konečná, pak $f \in \mathbb{S}[a,b]$ a tvrzení lemmatu je evidentní.

Předpokládejme tedy, že D je nekonečná. Nechť $D = \{s_k\}$, kde $\{s_k\}$ je prostá (a nekonečná) posloupnost. Podle věty 2.28 a důsledku 2.30 je řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Delta^+ f(s_k)\,\chi_{(s_k,b]}(x) + \Delta^- f(s_k)\,\chi_{[s_k,b]}(x)\Big) \tag{2.49}$$

absolutně konvergentní pro $x \in [a,b]$. Potom (viz (2.32) a (2.38))

$$\left.\begin{aligned} f(x) = f(a) &+ \Delta^+ f(a)\,\chi_{(a,b]}(x)\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Delta^+ f(s_k)\,\chi_{(s_k,b]}(x) + \Delta^- f(s_k)\,\chi_{[s_k,b]}(x)\Big)\\ &+\Delta^- f(b)\,\chi_{[b]}(x) \quad \text{pro } x \in [a,b]\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.50}$$

Položme

$$\left.\begin{aligned} f_n(x) = f(a) &+ \Delta^+ f(a)\,\chi_{(a,b]}(x)\\ &+\sum_{k=1}^{n}\Big(\Delta^+ f(s_k)\,\chi_{(s_k,b]}(x) + \Delta^- f(s_k)\,\chi_{[s_k,b]}(x)\Big)\\ &+\Delta^- f(b)\,\chi_{[b]}(x) \quad \text{pro } x \in [a,b] \text{ a } n \in \mathbb{N}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.51}$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $f_n \in \mathbb{S}[a,b]$,

$$f(a) = f_n(a)\,, \tag{2.52}$$

a

$$f(x) - f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty}\Big(\Delta^+ f(s_k)\,\chi_{(s_k,b]}(x) + \Delta^- f(s_k)\,\chi_{[s_k,b]}(x)\Big) \text{ pro } x \in [a,b]\,.$$

Podle věty 2.38 máme

$$\operatorname{var}_a^b (f - f_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \big(|\Delta^- f(s_k)| + |\Delta^+ f(s_k)|\big). \tag{2.53}$$

Podle důsledku 2.30 je ovšem výraz na pravé straně rovnosti (2.53) zbytek absolutně konvergentní řady, který konverguje k 0 při $n \to \infty$. To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (f - f_n) = 0$. Díky (2.52) odtud plyne, že platí (2.48) a tím je důkaz dokončen. □

2.7 Bodová konvergence

2.46 Příklad. Vraťme se ještě k funkcím

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ x \sin(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } \frac{1}{n} \le x \le 2 \end{cases} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, \\ x \sin(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Z příkladu 2.12 víme, že $\operatorname{var}_0^2 f_n < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Snadno ověříme, že $\{f_n\}$ konverguje k f stejnoměrně na $[0,2]$ a přitom podle příkladu 2.7 f nemá konečnou variaci na $[0,2]$.

Podle příkladu 2.46 stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí s konečnou variací nemusí stačit k tomu, aby její limita měla také konečnou variaci. Z následující věty však uvidíme, že stejnoměrná ohraničenost variací členů dané posloupnosti už zaručí, že dokonce její bodová limita konečnou variaci má. Poznamenejme, že pomocí argumentů použitých v příkladu 2.7 lze ověřit, že pro posloupnost funkcí $\{f_n\}$ z příkladů 2.12 a 2.46 platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_0^2 f_n = \infty \quad \text{a} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{var}_0^2 f_n = \infty.$$

2.47 Věta. *Nechť pro funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ existuje posloupnost funkcí $\{f_n\}$ taková, že*

$$\operatorname{var}_a^b f_n \le \varkappa < \infty \quad \textit{pro } n \in \mathbb{N}, \quad \textit{a} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \textit{pro } x \in [a,b].$$

Potom je také $\operatorname{var}_a^b f \le \varkappa$.

D ů k a z . Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ platí

$$V(f, \boldsymbol{\sigma}) = \lim_{n\to\infty} V(f_n, \boldsymbol{\sigma}) \le \varkappa,$$

a tudíž je také $\operatorname{var}_a^b f \le \varkappa$. □

2.48 Cvičení. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-k} & \text{když } x = \frac{1}{k+1} \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{pro ostatní } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Dokažte, že $f \in \mathbb{BV}[0,1]$.

Nyní zformulujeme a dokážeme Hellyovu větu, která bude užitečná např. pro důkaz totální spojitosti některých operátorů definovaných na prostoru $\mathbb{BV}[a,b]$. Hellyova věta říká, že z každé posloupnosti funkcí se stejnoměrně ohraničenou variací lze vybrat posloupnost bodově konvergující k funkci s konečnou variací.

2.49 Věta (HELLYOVA VĚTA O VÝBĚRU)**.** *Nechť* $\{f_n\} \subset \mathbb{BV}[a,b]$, $\varkappa \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(a)| \le \varkappa \ \ \textit{a} \ \ \mathrm{var}_a^b f_n \le \varkappa \ \ \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom existují funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a podposloupnost* $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ *posloupnosti* $\{f_n\}$ *takové, že platí*

$$|f(a)| \le \varkappa, \quad \mathrm{var}_a^b f \le \varkappa \quad \textit{a} \quad \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \textit{pro } \ x \in [a,b].$$

V důkazu využijeme následující dvě tvrzení.

Tvrzení 1. *Nechť*

$$|f_n(x)| \le M < \infty \quad \textit{na } \ [a,b] \quad \textit{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

Potom pro každou spočetnou množinu $P \subset [a,b]$ *posloupnost* $\{f_n\}$ *obsahuje podposloupnost* $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ *takovou, že*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p) \in \mathbb{R} \ \ \textit{pro všechna } p \in P.$$

D ů k a z. Nechť $P = \{p_k\}$. Máme $|f_n(p_k)| \le M < \infty$ pro všechna $n, k \in \mathbb{N}$. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty pak existují posloupnost $\{n_{k,1} : k \in \mathbb{N}\}$ a $q_1 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,1}}(p_1) = q_1.$$

Podobně existují $\{f_{n_{k,2}} : k \in \mathbb{N}\} \subset \{f_{n_{k,1}} : k \in \mathbb{N}\}$ a $q_2 \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,2}}(p_2) = q_2 \in \mathbb{R}, \text{ přičemž také } \lim_{k\to\infty} f_{n_{k,2}}(p_1) = q_1 \in \mathbb{R}.$$

Takto pro každé $j \in \mathbb{N} \cap (1,\infty)$ najdeme posloupnosti

$$\{f_{n_{k,j}} : k \in \mathbb{N}\} \subset \{f_{n_{k,j-1}} : k \in \mathbb{N}\}$$

a čísla $q_j \in \mathbb{R}$ tak, že bude platit

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,\ell}}(p_\ell) = q_\ell \in \mathbb{R} \quad \text{pro každé } \ell \in \{1,2,\ldots,j\}.$$

Položme $f_{n_k} = f_{n_{k,k}}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p_j) = q_j \in \mathbb{R} \quad \text{pro } j \in \mathbb{N}.$$

$\square$

Tvrzení 2. *Předpokládejme, že všechny funkce f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou neklesající na $[a,b]$ a že existuje $M \in (0,\infty)$ takové, že $||f_n|| \le M$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom existují podposloupnost $\{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ posloupnosti $\{f_n\}$ a funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neklesající na $[a,b]$ takové, že platí*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \textit{pro } x \in [a,b].$$

D ů k a z. Nechť $P = \big(\mathbb{P} \cap (a,b)\big) \cup [a] \cup [b]$ je množina racionálních čísel z intervalu (a,b) doplněná o body a, b. Množina P je spočetná a $[a,b] \setminus P \subset (a,b)$. Podle tvrzení 1 existují podposloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a zobrazení $\varphi : P \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p) = \varphi(p) \quad \text{pro } p \in P.$$

Zřejmě $\varphi(p') \le \varphi(p'')$ pro všechna $p', p'' \in P$ taková, že $p' \le p''$. Dále definujme

$$\varphi(x) = \sup_{p \in P \cap [a,x)} \varphi(p) \text{ pro } x \in (a,b) \setminus P.$$

Potom φ je definovaná a neklesající na $[a,b]$ a

$$\varphi(x) = \lim_{\substack{p \to x- \\ p \in P}} \varphi(p) \quad \text{pro } x \in (a,b) \setminus P.$$

Ukážeme, že v každém bodě $x_0 \in (a,b)$, ve kterém je funkce φ spojitá, platí

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x_0) = \varphi(x_0). \tag{2.54}$$

Vskutku, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon \implies \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Zvolíme-li $r' \in P \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$ a $r'' \in P \cap (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon)$, bude platit

$$\varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(r') \le \varphi(x_0) \le \varphi(r'') < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Dále zvolme k_ε tak, aby bylo

$$\varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') < \varphi(r') + \varepsilon$$

a

$$\varphi(r'') - \varepsilon < f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon$$

pro každé $k \geq k_\varepsilon$. Potom pro každé $k \geq k_\varepsilon$ dostaneme také

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) - 2\,\varepsilon < \varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') \leq f_{n_k}(x_0)\\ \leq f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon < \varphi(x_0) + 2\,\varepsilon\end{aligned}$$

čili platí (2.54).

Dokázali jsme tedy, že je-li Q množina bodů nespojitosti funkce φ v (a,b), pak

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \varphi(x) \quad \text{pro} \;\; x \in [a,b] \setminus Q.$$

Podle věty 2.21 je množina Q spočetná. Můžeme tedy použít ještě jednou tvrzení 1 a dokázat tak existenci vybrané posloupnosti

$$\{f_{n_{k_\ell}} : \ell \in \mathbb{N}\} \subset \{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\},$$

která má limitu $\psi(x) \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in Q$. Definujeme-li tedy

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{když} \;\; x \in [a,b] \setminus Q,\\ \psi(x), & \text{když} \;\; x \in Q,\end{cases}$$

bude

$$\lim_{\ell\to\infty} f_{n_{k_\ell}}(x) = f(x) \quad \text{pro } x \in [a,b],$$

a protože funkce, která je na intervalu $[a,b]$ bodovou limitou posloupnosti funkcí neklesajících na $[a,b]$, je také neklesající, tvrzení 2 je dokázáno. □

Důkaz věty 2.49

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [a,b]$ položme

$$g_n(x) = \operatorname{var}_a^x f_n \quad \text{a} \quad h_n(x) = g_n(x) - f_n(x).$$

Máme $f_n = g_n - h_n$ a všechny funkce g_n, h_n jsou neklesající na $[a,b]$ (viz cvičení 2.15). Dále

$$\|g_n\| \leq \operatorname{var}_a^b f_n \leq \varkappa \quad \text{a} \quad \|h_n\| \leq \|f_n\| + \|g_n\| \leq 2\,\varkappa \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Podle tvrzení 2 existují funkce $g, h \in \mathbb{BV}[a,b]$ a posloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ takové, že

$$\begin{aligned}&\|g\| \leq \varkappa,\;\; \|h\| \leq 2\,\varkappa,\;\; \operatorname{var}_a^b g \leq \varkappa,\;\; \operatorname{var}_a^b h \leq 2\,\varkappa,\\ &\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(x) = g(x) \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x) = h(x) \quad \text{pro každé } x \in [a,b].\end{aligned}$$

Označme $f = g - h$. Potom je

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k\to\infty} \big(g_{n_k}(x) - h_{n_k}(x)\big) = g(x) - h(x) = f(x)$$

pro každé $x \in [a,b]$. Zřejmě je $|f(a)| \leq \varkappa$ a podle věty 2.47 máme $\operatorname{var}_a^b f \leq \varkappa$. Tím je důkaz dokončen. □

2.8 Variace na elementárních množinách

Doposud jsem se zabývali pojmem variace na kompaktním intervalu zavedeným v definici 2.1. V literatuře lze ovšem potkat i rozmanité definice variace funkce na libovolných podmnožinách $\mathbb{R}$. Pro naše účely se ukázalo rozumným omezit se na elementární podmnožiny $\mathbb{R}$, tedy množiny, které jsou sjednocením konečného množství navzájem disjuktních ohraničených intervalů. Prvním krokem k zavedení toho pojmu je následující definice variace na libovolném ohraničeném (tedy nikoliv nutně uzavřeném) intervalu.

2.50 Definice. Nechť J je interval v $\mathbb{R}$. Řekneme, že konečná množina

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu(\boldsymbol{\alpha})}\} \subset J$$

je *zobecněné dělení intervalu* J jestliže $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{\nu(\boldsymbol{\alpha})}$. Množinu všech zobecněných dělení intervalu J budeme značit symbolem $\mathcal{D}^*(J)$.

Nechť J je libovolný podinterval v $\mathbb{R}$ a f je reálná funkce definovaná na J. Pak definujeme variaci funkce f na J předpisem

$$\operatorname{var}_J f = \sup_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{D}^*(J)} \left\{ \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\alpha})} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| \right\}.$$

Řekneme, že f má ohraničenou variaci na J jestliže $\operatorname{var}_J f < \infty$. V takovém případě pak píšeme $f \in \mathbb{BV}(J)$. Pro úplnost definujeme také $\operatorname{var}_{\emptyset} f = 0$ a $\operatorname{var}_{[c]} f = 0$ pro každé $c \in J$.

2.51 Poznámka. Je zřejmé, že definice 2.50 je identická s definicí 2.1 je-li J kompaktní interval, t.j. pro $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a $J = [c,d] \subset [a,b]$ máme $\operatorname{var}_{[c,d]} f = \operatorname{var}_c^d f$. Z tohoto důvodu, v případě kompaktního intervalu *se můžeme vždy omezit na klasická dělení intervalu, která zahrnují i krajní body intervalu* (jako je tomu v definici 2.1).

Dále, je také zřejmé, že každá funkce s ohraničenou variací na ohraničeném intervalu je na tomto intervalu ohraničená.

2.52 Tvrzení. *Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a nechť $J_1 \subset [a,b]$ and $J_2 \subset [a,b]$ jsou intervaly takové, že $J_2 \subset J_1$. Potom $\operatorname{var}_{J_2} f \le \operatorname{var}_{J_1} f$.*

Speciálně, je-li $J \subset [a,b]$ interval a $f \in \mathbb{BV}(J)$, pak $f \in \mathbb{BV}(I)$ pro každý interval I obsažený v J.

D ů k a z plyne přímo z definice a ponechává se čtenářům jako cvičení. □

Následující tvrzení shrnuje některé z vlastností definice 2.50.

2.53 Věta. *Nechť $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $a \le c < d \le b$.*

(i) *Jestliže $f \in \mathbb{BV}([c,d))$, pak* $\operatorname{var}_{[c,d)} f = \lim_{\delta \to 0+} \operatorname{var}_c^{d-\delta} f = \sup_{t \in [c,d)} \operatorname{var}_c^t f.$

(ii) *Jestliže* $f \in \mathbb{BV}((c,d])$, *pak* $\operatorname{var}_{(c,d]} f = \lim_{\delta \to 0+} \operatorname{var}_{c+\delta}^{d} f = \sup_{t \in (c,d]} \operatorname{var}_{t}^{d} f.$

(iii) *Jestliže* $f \in \mathbb{BV}((c,d))$, *pak* $\operatorname{var}_{(c,d)} f = \lim_{\delta \to 0+} \operatorname{var}_{c+\delta}^{d-\delta} f.$

D ů k a z . Ukážeme důkaz tvrzení (i). Důkazy zbývajících tvrzení jsou podobné.

Buď dáno $\delta \in (0, d-c)$ a nechť $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu(\boldsymbol{\alpha})}\}$ je libovolné dělení intervalu $[c, d-\delta]$. Pak je ovšem $\boldsymbol{\alpha}$ také zobecněné dělení polouzavřeného intervalu $[c,d)$ a tudíž

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\alpha})} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| \le \operatorname{var}_{[c,d)} f.$$

Přechodem k supremu přes všechna dělení intervalu $[c, d-\delta]$ odtud plyne nerovnost

$$\operatorname{var}_{c}^{d-\delta} f \le \operatorname{var}_{[c,d)} f.$$

Vzhledem k tomu, že $\delta > 0$ může být libovolné, dostáváme

$$M := \sup_{t \in [c,d)} \operatorname{var}_{c}^{t} f = \lim_{\delta \to 0+} \operatorname{var}_{c}^{d-\delta} f \le \operatorname{var}_{[c,d)} f.$$

Předpokládejme, že $M < \operatorname{var}_{[c,d)} f$. Potom, pro $\varepsilon = \operatorname{var}_{[c,d)} f - M$ existuje zobecněné dělení $\boldsymbol{\alpha}$ intervalu $[c,d)$ takové, že

$$M = \operatorname{var}_{[c,d)} f - \varepsilon < \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\alpha})} |f(\alpha_j) - f(\alpha_{j-1})| \le \operatorname{var}_{c}^{\alpha_{\nu(\boldsymbol{\alpha})}} f \le M,$$

což je ovšem spor. Musí tedy platit $M = \operatorname{var}_{[c,d)} f$. Tím je dokázáno tvrzení (i). □

Přirozeně se nabízí i otázka, je-li také možné určit variaci $\operatorname{var}_{c}^{d} f$, je-li známa variace na některém z intervalů $[c,d)$, $(c,d]$, (c,d). Tato otázka bude zodpovězena větou 2.55. K jejímu důkazu budeme ovšem potřebovat následující pomocné tvrzení,

2.54 Lemma. *Nechť* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a \le c < d \le b$ *a* $f \in \mathbb{BV}((c,d))$. *Potom existují obě limity* $f(c+)$ *a* $f(d-)$ *a jsou konečné.*

D ů k a z . Mějme dáno libovolné $\varepsilon > 0$ a nechť $\{t_n\}$ je libovolná rostoucí posloupnost bodů z otevřeného intervalu (c,d), která konverguje k d. Podle tvrzení (iii) věty 2.53 existuje $\delta > 0$ takové, že platí

$$0 < \operatorname{var}_{(c,d)} f - \operatorname{var}_{c+\delta}^{d-\delta} f < \varepsilon. \tag{2.55}$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo $t_n > d - \delta$ pro každé $n \ge n_0$, a nechť $n > m \ge n_0$. Pak podle (2.55) máme

$$|f(t_n) - f(t_m)| \le \operatorname{var}_{t_m}^{t_n} f = \operatorname{var}_{c+\delta}^{t_n} f - \operatorname{var}_{c+\delta}^{t_m} f \le \operatorname{var}_{(c,d)} f - \operatorname{var}_{c+\delta}^{d-\delta} f < \varepsilon.$$

Odtud už okamžitě plyne existence konečné limity $f(d-)$.

Existence konečné limity $f(c+)$ se dokáže analogicky. □

2.55 Věta. *Nechť* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *and* $a\le c<d\le b$.

(i) *Jestliže* $f\in\mathbb{BV}([c,d))$, *pak existuje konečná limita* $f(d-)$ *a platí*

$$\operatorname{var}_c^d f = \operatorname{var}_{[c,d)} f + |\Delta^- f(d)|.$$

(ii) *Jestliže* $f\in\mathbb{BV}((c,d])$, *pak existuje konečná limita* $f(c+)$ *a platí*

$$\operatorname{var}_c^d f = \operatorname{var}_{(c,d]} f + |\Delta^+ f(c)|.$$

(iii) *Jestliže* $f\in\mathbb{BV}((c,d))$, *pak existují obě konečné limity* $f(c+)$ *a* $f(d-)$ *a*

$$\operatorname{var}_c^d f = \operatorname{var}_{(c,d)} f + |\Delta^+ f(c)| + |\Delta^- f(d)|.$$

D ů k a z . Existence a konečnost všech limit plyne z lemmatu 2.54.

Nechť $f\in BV([c,d))$, $\varepsilon>0$ a $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{m+1}\}\in\mathcal{D}[c,d]$. Zvolme $\xi\in[c,d]$ tak, aby platilo

$$\alpha_m<\xi<d \text{ a } |f(d-)-f(\xi)|<\varepsilon.$$

Potom

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m+1}&|f(\alpha_j)-f(\alpha_{j-1})|\\ &\le\sum_{j=1}^{m}|f(\alpha_j)-f(\alpha_{j-1})|+|f(\xi)-f(\alpha_m)|+|f(d-)-f(\xi)|+|\Delta^- f(d)|\\ &<\operatorname{var}_c^\xi f+\varepsilon+|\Delta^- f(d)|\le\operatorname{var}_{[c,d)} f+\varepsilon+|\Delta^- f(d)|.\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon>0$ a $\boldsymbol{\alpha}\in\mathcal{D}[c,d]$ mohou být libovolné, plyne odtud, že

$$\operatorname{var}_c^d f\le\operatorname{var}_{[c,d)} f+|\Delta^- f(d)|. \tag{2.56}$$

Na druhou stranu, pro každé $\delta>0$ máme

$$|f(d)-f(d-\delta)|\le\operatorname{var}_{d-\delta}^d f=\operatorname{var}_c^d f-\operatorname{var}_c^{d-\delta} f.$$

Dále, limitním přechodem a použitím tvrzení (i) věty 2.53 dostaneme

$$|\Delta^- f(d)|\le\operatorname{var}_c^d f-\lim_{\delta\to0+}\operatorname{var}_c^{d-\delta} f=\operatorname{var}_c^d f-\operatorname{var}_{[c,d)} f$$

neboli

$$\operatorname{var}_c^d f\ge\operatorname{var}_{[c,d)} f+|\Delta^- f(d)|.$$

Tudíž, vzhledem ke (2.56), máme $\operatorname{var}_c^d f=\operatorname{var}_{[c,d)} f+|\Delta^- f(d)|$. Platí tedy tvrzení (i).

Tvrzení (ii) and (iii) by se dokazovala podobně. □

Další tvrzení je okamžitým důsledkem předchozí věty.

2.56 Důsledek. *Jestliže* $a \le c < d \le b$, *pak pro libovolnou funkci* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) $f \in \mathbb{BV}([c,d])$,

(ii) $f \in \mathbb{BV}((c,d])$,

(iii) $f \in \mathbb{BV}([c,d))$,

(iv) $f \in \mathbb{BV}((c,d))$.

2.57 Poznámka. Podle věty 2.55 pro každou funkci s konečnou variací a spojitou na $[a,b]$ platí rovnosti

$$\operatorname{var}_{[c,d)} f = \operatorname{var}_{(c,d)} f = \operatorname{var}_{(c,d]} f = \operatorname{var}_c^d f \quad \text{pro } c,\ d \in [a,b] \text{ takové, že } c < d.$$

Dále, připomeňme, že, podle lemmatu 2.24, pro každou funkci $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a každý bod $c \in [a,b]$ takové, že existují konečné limity $f(c-)$ a $f(c+)$, platí vztah

$$\lim_{\delta \to 0+} \operatorname{var}_{c-\delta}^{c+\delta} f = |\Delta^- f(c)| + |\Delta^+ f(c)|.$$

Nyní už můžeme rozšířit pojem variace na elementární množiny.

2.58 Definice. Řekneme, že ohraničená množina $E \subset \mathbb{R}$ je *elementární*, jestliže je konečným sjednocením intervalů.

Množina intervalů $\{J_k\colon k = 1,\dots,m\}$ se nazývá *minimální rozklad* elementární množiny E jestliže $E = \bigcup_{k=1}^m J_k$ a přitom žádné sjednocení $J_k \cup J_\ell$ dvou navzájem různých intervalů (tj. $k \ne \ell$) není interval.

Jestliže $S \subset \mathbb{R}$, pak $\mathcal{E}(S)$ značí množinu všech elementárních podmnožin S.

Všimněme si, že pro každou elementární množinu je její minimální rozklad určen jednoznačně. Navíc, intervaly obsažené v takovém rozkladu jsou vzájemně disjuktní. Následující definice variace přes elementární množiny má tedy dobrý smysl.

2.59 Definice. *Pro danou funkci* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *a elementární podmnožinu* E *intervalu* $[a,b]$, *je variace funkce* f *na* E *definována předpisem*

$$\operatorname{var}(f,E) = \sum_{k=1}^m \operatorname{var}_{J_k} f,$$

kde $\{J_k\colon k = 1,\dots,m\}$ *je minimální rozklad množiny* E.

Zřejmě, pro každou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ spojitou a každou dvojici elementárních množin $E_1,\ E_2 \in \mathcal{E}([a,b])$ takovou, že $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, platí

$$\operatorname{var}(f,E) \le \operatorname{var}_a^b f \quad \text{pro } E \in \mathcal{E}([a,b]) \tag{2.57}$$

a

$$\operatorname{var}(f, E_1 \cup E_2) = \operatorname{var}(f, E_1) + \operatorname{var}(f, E_2). \tag{2.58}$$

Jinými slovy, jestliže $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá a má konečnou variaci na $[a, b]$, pak zobrazením $E \in \in \mathcal{E}([a, b]) \to \operatorname{var}(f, E)$ je definována konečně aditivní míra na $\mathcal{E}([a, b])$. Není-li f spojitá, pak ovšem rovnost (2.58) nemusí obecně platit.

2.60 Poznámka. Poznamenejme, že definice 2.50 bývá aplikována také na libovolné podmnožiny E v $[a, b]$. Bohužel, takové rozšíření není vhodné pro naše účely (viz pdstavce 6.8 a 6.9 kapitoly 6) protože variace pak ztrácí vlastnost aditivity dokonce i pro spojité funkce. To je vidět z následujícího příkladu: Nechť $a < c < d < b$ a $E = [a, c] \cup [d, b]$. Potom, bychom podle takového rozšíření definice dostali

$$\operatorname{var}_E f \geq \operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_d^b f + |f(d) - f(c)| > \operatorname{var}_{[a,c]} f + \operatorname{var}_{[d,b]} f$$

pro každou funkci $f : E \to \mathbb{R}$ takovou, že $f(d) \neq f(c)$. Toto je důvod proč toto rozšíření nepoužíváme.

Výklad v této kapitole se opíral o monografie V. Jarníka *Diferenciální počet II* [15, Kapitola V] a *Integrální počet II* [16, Kapitola V] a dále o odstavec II.6 v monografii T. H. Hildebrandta *Theory of Integration* [12] a o kapitolu XIII v monografii Š. Schwabika *Integrace v* $\mathbb{R}$ *(Kurzweilova teorie)* [49], viz též kapitolu VI.2 v monografii A. N. Kolmogorova a S. V. Fomina *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*. V těchto monografiích lze též nalézt i některé další podrobnosti.

Kapitola 3

Absolutně spojité funkce

Speciálním případem funkcí s konečnou variací jsou funkce absolutně spojité, které úzce souvisí s Lebesgueovou teorií integrálu a jsou dobře známy z Carathéodoryovy teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Integrály, které se v této kapitole vyskytují, jsou integrály Lebesgueovy.

3.1 Definice a základní vlastnosti

3.1 Definice. Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a,b]$, jestliže ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že pro každý konečný systém intervalů $\{[a_j,b_j]:j=1,2,,\dots,m\}$ splňující

$$a\le a_1<b_1\le a_2<b_2<\dots<b_{m-1}\le a_m<b_m\le b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{m}(b_j-a_j)<\delta \tag{3.1}$$

platí

$$\sum_{j=1}^{m}|f(b_j)-f(a_j)|<\varepsilon. \tag{3.2}$$

Množinu funkcí absolutně spojitých na $[a,b]$ značíme $\mathbb{AC}[a,b]$.

3.2 Cvičení. Dokažte tvrzení:

Každá lipschitzovská funkce na intervalu $[a,b]$ (viz cvičení 2.6 (iv)) *je na tomto intervalu absolutně spojitá. Speciálně je-li derivace f' funkce f spojitá na $[a,b]$*[1]*, pak f je absolutně spojitá na $[a,b]$.*

3.3 Věta. *Je-li f absolutně spojitá na $[a,b]$ a $[c,d]\subset[a,b]$, pak je f absolutně spojitá i na $[c,d]$.*

Je-li $a<c<b$ a f je absolutně spojitá na $[a,c]$ i $[c,b]$, pak je f absolutně spojitá na $[a,b]$.

D ů k a z . První tvrzení je evidentní.

Předpokládejme, že $f\in\mathbb{AC}[a,c]$ a $f\in\mathbb{AC}[c,b]$ a buď dáno $\varepsilon>0$. Můžeme zvolit $\delta>0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{m}|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

[1] tj. f' je spojitá na (a,b), existují konečné limity $f'(a+)=\lim\limits_{t\to a+}f'(t)$, $f'(b-)=\lim\limits_{t\to b-}f'(t)$ a $f'(a)=f'(a+)$ a $f'(b)=f'(b-)$

pro každý systém intervalů $\{[\alpha_j, \beta_j] : j = 1, 2, , \dots, m\}$ takový, že

$$a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \ldots < \beta_{m-1} \leq \alpha_m < \beta_m \leq c \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \alpha_j) < \delta \tag{3.3}$$

a současně

$$\sum_{j=1}^{p} |f(\delta_j) - f(\gamma_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro každý systém intervalů $\{[\gamma_j, \delta_j] : j = 1, 2, , \dots, p\}$ takový, že

$$c \leq \gamma_1 < \delta_1 \leq \gamma_2 < \delta_2 \ldots < \delta_{p-1} \leq \gamma_p < \delta_p \leq b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{p} (\delta_j - \gamma_j) < \delta. \tag{3.4}$$

Nyní, mějme systém intervalů $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, , \dots, n\}$ takový, že

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \ldots < b_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta. \tag{3.5}$$

Smíme předpokládat, že c neleží v žádném z intervalů (a_j, b_j), $j = 1, 2, \dots, n$. (Kdyby totiž bylo $c \in (a_k, b_k)$ pro nějaké $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, rozdělili bychom interval $[a_k, b_k]$ na sjednocení $[a_k, c] \cup [c, b_k]$ a nový systém by opět splňoval (3.5).) Můžeme tedy rozdělit daný systém $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, , \dots, n\}$ na systémy

$$\{[\alpha_j, \beta_j] : j = 1, 2, , \dots, m\} \quad \text{a} \quad \{[\gamma_j, \delta_j] : j = 1, 2, , \dots, p\}$$

splňující (3.3) a (3.4). Součet $\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|$ se tedy rozpadá na dva součty, z nichž každý je menší než $\frac{\varepsilon}{2}$. Tudíž $\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. □

3.4 Příklad. Podle cvičení 3.2 je každá funkce, která má spojitou derivaci na $[a, b]$, absolutně spojitá na $[a, b]$. Jednoduchým příkladem absolutně spojité funkce na $[a, b]$, která nemá spojitou derivaci na (a, b), je např. funkce

$$f(x) = \begin{cases} x - a & \text{pro } x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ b - x & \text{pro } x \in [\frac{a+b}{2}, b], \end{cases}$$

která je zřejmě absolutně spojitá na intervalech $[a, \frac{a+b}{2}]$ a $[\frac{a+b}{2}, b]$, a tedy podle věty 3.3 také na $[a, b]$.

3.5 Poznámka. Jestliže $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\mathbb{K}\subset\mathbb{N}$ a jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že

$$\sum_{j\in\mathbb{K}}|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|<\varepsilon \tag{3.6}$$

platí pro každý (nikoliv nutně konečný) systém intervalů $\{[\alpha_j,\beta_j]\subset[a,b]: j\in\mathbb{K}\}$, splňující

$$(\alpha_j,\beta_j)\cap(\alpha_k,\beta_k)=\emptyset \quad \text{pro } j\neq k \text{ a } \sum_{j\in\mathbb{K}}(\beta_j-\alpha_j)<\delta, \tag{3.7}$$

pak je funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ samozřejmě absolutně spojitá na $[a,b]$.

V následujícím lemmatu ukážeme, že platí i obrácená implikace. Poznamenejme ještě, že podle lemmatu 2.22 je každý systém intervalů splňující (3.7) nejvýše spočetný.

3.6 Lemma. *Je-li $f\in\mathbb{AC}[a,b]$, pak pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že nerovnost* (3.6) *platí pro libovolný (případně nekonečný) systém podintervalů intervalu $[a,b]$*

$$\{[\alpha_j,\beta_j]\subset[a,b]: j\in\mathbb{K}\}$$

splňující (3.7).

D ů k a z . Předpokládejme, že $f\in\mathbb{AC}[a,b]$. Zřejmě stačí dokázat tvrzení lemmatu pro případ, že $\mathbb{K}=\mathbb{N}$. Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a nechť $\delta>0$ je určeno definicí 3.1 pro $\varepsilon/2$ na místě ε. Nechť $\{[\alpha_j,\beta_j]: j\in\mathbb{N}\}$ je systém podintervalů v $[a,b]$ splňující (3.7). Potom pro každé $m\in\mathbb{N}$ máme

$$\sum_{j=1}^{m}(\beta_j-\alpha_j)<\delta, \quad \text{a tedy} \quad \sum_{j=1}^{m}|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud

$$\sum_{j=1}^{\infty}|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. □

3.7 Věta. *Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$ má na tomto intervalu konečnou variaci.*

D ů k a z . Nechť $f\in\mathbb{AC}[a,b]$. Zvolme $\delta>0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{m}|f(b_j)-f(a_j)|<1$$

pro každý konečný systém intervalů $\{[a_j,b_j]: j=1,2,,\dots,m\}$ splňující (3.1). Dále zvolme dělení $\{x_0,x_1,\dots,x_k\}$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$0 < x_i - x_{i-1} < \delta \quad \text{pro každé } i=1,2,\dots,k.$$

Potom pro každé $i=1,2,\dots,k$ a každé dělení $\boldsymbol{\sigma}^i=\{\alpha_0^i,\alpha_1^i,\dots,\alpha_{m_i}^i\}$ intervalu $[x_{i-1},x_i]$ máme

$$\sum_{j=1}^{m_i}(\alpha_j^i-\alpha_{j-1}^i) = x_i - x_{i-1} < \delta,$$

a tudíž (podle věty 2.11)

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{i=1}^k \operatorname{var}_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^k \sup_{\boldsymbol{\sigma}^i \in \mathscr{D}[x_{i-1},x_i]} V(f,\boldsymbol{\sigma}^i) \le k < \infty.$$

□

3.8 Věta. *Jestliže* $f,\ g\in\mathbb{AC}[a,b]$, *pak také*

$$|f|,\ f+g,\ f\,g,\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\}\in\mathbb{AC}[a,b].$$

Je-li navíc $|f(x)|>0$ *na* $[a,b]$, *pak také* $\dfrac{1}{f}\in\mathbb{AC}[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $f,\ g\in\mathbb{AC}[a,b]$.

a) Pro libovolná $x,y\in[a,b]$ platí $|f(x)|\le|f(x)-f(y)|+|f(y)|$ a tudíž také

$$|f(x)-f(y)| \ge \big||f(x)|-|f(y)|\big|$$

a

$$\sum_{j=1}^m \big||f(\beta_j)|-|f(\alpha_j)|\big| \le \sum_{j=1}^m |f(\beta_j)-f(\alpha_j)|.$$

Odtud okamžitě plyne, že $|f|\in\mathbb{AC}[a,b]$.

b) Druhé a třetí tvrzení, tj. $f+g\in\mathbb{AC}[a,b]$ a $f\,g\in\mathbb{AC}[a,b]$, plynou z nerovností

$$|(f(x)+g(x))-(f(y)+g(y))| \le |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|$$

a

$$|f(x)\,g(x)-f(y)\,g(y)| \le \|f\|\,|g(x)-g(y)|+\|g\|\,|f(x)-f(y)|,$$

kter0 platí pro libovolná $x,y\in[a,b]$.

c) Protože pro libovolné $x\in[a,b]$ máme

$$\max\{f(x),g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\big)$$

a

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\big),$$

jsou v důsledku a) a b) také funkce $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ absolutně spojité na $[a, b]$.

d) Je-li navíc $|f(x)| > 0$ pro $x \in [a, b]$, pak existuje $\mu > 0$ takové, že $|f(x)| \ge \mu$ platí pro $x \in [a, b]$, a tudíž také

$$\Big|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\Big| \le \frac{|f(x) - f(y)|}{\mu^2} \quad \text{pro každá } x, y \in [a, b].$$

Nyní už je snadné ukázat, že $\dfrac{1}{f} \in \mathbb{AC}[a, b]$. □

3.9 Lemma. *Nechť* $f \in \mathbb{AC}[a, b]$ *a* $v(x) = \operatorname{var}_a^x f$ *pro* $x \in [a, b]$. *Potom* $v \in \mathbb{AC}[a, b]$.
D ů k a z . Předpokládejme, že je dáno $\varepsilon > 0$, a nechť $\delta > 0$ je takové, že

$$\sum_{j=1}^{m} |f(b_j) - f(a_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro každý systém intervalů $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, , \dots, m\}$ splňující (3.1).

Nechť $[\alpha_j, \beta_j]$, $j=1, 2, \dots, n$, je libovolný systém intervalů splňující (3.3), v němž $m = n$. Pro každé $j = 1, 2, \dots, n$ zvolme libovolně dělení $\boldsymbol{\sigma}^j = \{\sigma_0^j, \sigma_1^j, \dots, \sigma_{n_j}^j\}$ intervalu $[\alpha_j, \beta_j]$. Potom

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} (\sigma_i^j - \sigma_{i-1}^j) = \sum_{j=1}^{n} [\beta_j - \alpha_j] < \delta,$$

a tudíž

$$\sum_{j=1}^{n} V(f, \boldsymbol{\sigma}^j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n_j} \big|f(\sigma_i^j) - f(\sigma_{i-1}^j)\big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud už plyne, že

$$\sum_{j=1}^{n} \big(v(\beta_j) - v(\alpha_j)\big) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}_{\alpha_j}^{\beta_j} f = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sup_{\boldsymbol{\sigma}^j \in \mathscr{D}[\alpha_j, \beta_j]} V(f, \boldsymbol{\sigma}^j)\Big) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tím je důkaz lemmatu dokončen. □

3.10 Důsledek. *Funkce* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je absolutně spojitá na intervalu* $[a, b]$ *právě tehdy, když existují funkce* f_1 *a* f_2 *neklesající a absolutně spojité na* $[a, b]$ *a takové, že* $f = f_1 - f_2$ *na intervalu* $[a, b]$.

D ů k a z . a) Nechť $f = f_1 - f_2$ na $[a,b]$, kde $f_1,\ f_2$ jsou absolutně spojité a neklesající na $[a,b]$. Pak podle věty 3.8 je také f absolutně spojitá na $[a,b]$.

b) Nechť $f \in \mathbb{AC}[a,b]$. Podle vět 3.7 a 2.14 existují funkce $f_1,\ f_2$ neklesající na $[a,b]$ takové, že $f = f_1 - f_2$. Podle důkazu věty 2.14 můžeme položit

$$f_1(x) = \operatorname{var}_a^x f \quad \text{a} \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x) \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Vzhledem k větě 3.8 už zbývá jenom dokázat, že f_1 je absolutně spojitá na $[a,b]$. To však plyne z lemmatu 3.9. □

3.2 Absolutně spojité funkce a Lebesgueův integrál

Připomeňme, že podle věty 2.33 každá funkce s konečnou variací na intervalu $[a,b]$ má pro s.v. $x \in [a,b]$ konečnou derivaci $f'(x)$. Podle věty 3.7 má tedy stejnou vlastnost i každá funkce, která je absolutně spojitá na $[a,b]$. Ve zbývající části této kapitoly připomeneme některé další základní vlastnosti derivací funkcí absolutně spojitých a souvislost mezi absolutní spojitostí a neurčitým Lebesgueovým integrálem. V případech, kdy se důkazy nebo jejich části opírají o teorii míry v rozsahu přesahujícím rámec tohoto textu, důkazy, resp. jejich příslušné části neuvádíme a pouze odkazujeme na dostupnou literaturu. Integrálem se v tomto odstavci rozumí integrál Lebesgueův.

Podle následující věty jsou derivace funkcí s konečnou variací (a tedy tím spíše i funkcí absolutně spojitých) lebesgueovsky integrovatelné. Její důkaz podstatně využívá řady poznatků teorie míry a Lebesgueovy integrace, které se nevejdou do tohoto textu. Pro úplný důkaz tedy odkazujeme na příslušnou literaturu (viz např. [16, věta 91], [17, věta VI.4.1], resp. [35, Theorem 22.7]).

3.11 Věta. *Má-li funkce $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ konečnou variaci na $[a,b]$, pak je její derivace f' lebesgueovsky integrovatelná na $[a,b]$.*

Je-li navíc f neklesající na $[a,b]$, pak platí nerovnost

$$0 \le \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}\,x \le f(b) - f(a). \tag{3.8}$$

Nyní ukážeme, že neurčitý integrál integrovatelné funkce je absolutně spojitý.

3.12 Věta. *Jestliže $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$ a $f(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}\,t$ pro $x \in [a,b]$, pak je funkce f absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} |g(x)|\,\mathrm{d}\,x < \varepsilon$$

platí pro každý systém intervalů

$$\{[a_j, b_j] \subset [a, b] : j = 1, 2, \ldots, m\}$$

splňující (3.1) (viz např. [17, věta V.5.5] nebo [16, věta 51] – tato vlastnost se obvykle nazývá absolutní spojitost Lebesgueova integrálu).

Máme tedy

$$\sum_{j=1}^{m} \big| f(b_j) - f(a_j) \big| = \sum_{j=1}^{m} \Big| \int_{a_j}^{b_j} g(t)\,\mathrm{d}\,t \Big| \le \sum_{j=1}^{m} \int_{a_j}^{b_j} |g(t)|\,\mathrm{d}\,t < \varepsilon.$$

To znamená, že $f \in \mathbb{AC}[a, b]$. □

3.13 Cvičení. Dokažte, že funkce $f(x) = \sqrt{|x|}$ je absolutně spojitá na intervalu $[-1, 1]$, přičemž f není lipschitzovská na $[-1, 1]$. (Návod: f je na $[-1, 1]$ neurčitým Lebesgueovým integrálem lebesgueovsky integrovatelné funkce a současně $f'(0-) = -\infty$ a $f'(0+) = \infty$.)

Další tvrzení se týká derivování neurčitých integrálů integrovatelných funkcí.

3.14 Věta. *Jestliže* $g \in \mathbb{L}^1[a, b]$ *a*

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \textit{pro} \;\; x \in [a, b],$$

potom $f\,'(x) = g(x)$ *pro s.v.* $x \in [a, b]$.

D ů k a z se opírá o řadu výsledků teorie míry, které nejsou do tohoto textu zařazeny. Odkazujeme tedy čtenáře na důkazy např. v [17, věta VI.3.1] nebo [35, Theorem 23.4]. □

Nechť je dána funkce $g \in \mathbb{L}^1[a, b]$. Podle vět 3.12 a 3.14 je její neurčitý Lebesgueův integrál f absolutně spojitý na $[a, b]$ a platí $f\,' = g$ s.v. na $[a, b]$. Chceme ukázat, že f je absolutně spojitá na $[a, b]$ tehdy a jen tehdy, když f je neurčitým integrálem nějaké lebesgueovsky integrovatelné funkce. Pro důkaz takového tvrzení je klíčové následující tvrzení známé jako Rieszovo lemma.

3.15 Lemma (RIESZ)**.** *Nechť* $f \in \mathbb{C}[a, b]$ *a*

$$E = \{x \in (a, b) : \exists\, \xi \in (x, b] \;\textit{takové, že}\; f(\xi) > f(x)\}.$$

Potom je množina E *otevřená a je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů* (a_k, b_k)*, přičemž pro každý z nich platí* $f(a_k) \le f(b_k)$.

D ů k a z je založen mj. na známém faktu, že každá neprázdná otevřená množina je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů (viz např. [15, věta 69]). Podrobný důkaz Rieszova lemmatu lze nalézt např. v monografii [17] v odstavci VI.1.2 věnovaném důkazu Lebesgueovy věty o derivaci funkce s konečnou variací (naše věta 2.33). □

3.16 Poznámka. Zobecnění Rieszova lemmatu na případ, kdy funkce f může být jen regulovaná, bylo dokázáno v [49, lemma XIII.3.5].

3.17 Lemma. *Jestliže* $f \in \mathbb{AC}[a,b]$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $f'(x)=0$ *pro s.v.* $x\in[a,b]$, *pak* f *je konstantní na* $[a,b]$.

D ů k a z. Vzhledem ke své monotónnosti funkce f zobrazuje interval $[a,b]$ na interval $[f(a),f(b)]$. Dokážeme, že $f(a)=f(b)$.

Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a nechť $\delta>0$ přísluší k tomuto ε podle lemmatu 3.6.

Označme Z množinu všech $x\in[a,b]$, pro které platí $f'(x)=0$. Podle předpokladu má její doplněk $[a,b]\setminus Z$ nulovou míru ($\mu([a,b]\setminus Z)=0$). To znamená, že existuje konečný nebo spočetný systém $\{(\sigma_j,\beta_j):j\in\mathbb{K}\}$ splňující (3.7) a

$$[a,b]\setminus Z\subset\bigcup_{j\in\mathbb{K}}(\sigma_j,\beta_j).$$

Obraz $f([a,b]\setminus Z)$ množiny $[a,b]\setminus Z$ je tedy obsažen ve sjednocení otevřených intervalů $\{(f(\sigma_j),f(\beta_j)):j\in\mathbb{K}\}$. Protože podle lemmatu 3.6 platí (3.6), plyne odtud, že množina $f([a,b]\setminus Z)$ má nulovou míru, tj.

$$\mu(f([a,b]\setminus Z))=0. \tag{3.9}$$

Nyní, nechť $x\in Z$. Potom je $f'(x)=0$. Pro dané ε tedy existuje $\Delta>0$ takové, že

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}<\varepsilon \quad \text{pro každé } t \text{ takové, že } 0<|t-x|<\Delta.$$

Odtud plyne, že

$$\varepsilon\, x-f(x)<\varepsilon\, t-f(t) \quad \text{platí pro každé } t\in(x,x+\Delta).$$

Podle Rieszova lemmatu 3.15, které použijeme na funkci $\varepsilon\, x-f(x)$ na místě $f(x)$, je tedy množina Z obsažena ve sjednocení konečného nebo spočetného systému disjunktních intervalů $\{(a_k,b_k)\subset[a,b]:k\in\mathbb{K}\}$, přičemž platí

$$\varepsilon\, a_k-f(a_k)\le\varepsilon\, b_k-f(b_k) \quad \text{pro každé } k\in\mathbb{K}$$

neboli

$$f(b_k)-f(a_k)\le\varepsilon\,(b_k-a_k) \quad \text{pro každé } k\in\mathbb{K},$$

a tudíž

$$\sum_{k\in\mathbb{K}}\big[f(b_k)-f(a_k)\big]\le\varepsilon\sum_{k\in\mathbb{K}}\big[b_k-a_k\big]\le\varepsilon\,(b-a).$$

Odtud už vidíme, že množina $f(Z)$ má také nulovou míru, tj.

$$\mu(f(Z))=0. \tag{3.10}$$

Podle (3.9) a (3.10) má interval $[f(a),f(b)]=f(Z)\cup(f([a,b]\setminus Z))$ nulovou délku, tj. (vzhledem k monotónnosti funkce f) máme $f(a)=f(x)=f(b)$ pro každé $x\in(a,b)$. $\square$

3.18 Věta. *Funkce* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je absolutně spojitá na* $[a,b]$ *právě tehdy, když*

$$f(x)-f(a)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{pro}\ \ x\in[a,b] \tag{3.11}$$

pro nějakou funkci $g\in\mathbb{L}^1[a,b]$. *Potom je* $f'=g$ *s.v. na* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Nechť $g\in\mathbb{L}^1[a,b]$ a

$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro}\ \ x\in[a,b].$$

Potom podle věty 3.12 je f absolutně spojitá na $[a,b]$ a podle věty 3.14 je $f'=g$ s.v. na $[a,b]$.

b) Předpokládejme zprvu, že funkce $f\in\mathbb{AC}[a,b]$ je neklesající na $[a,b]$. Podle vět 3.7 a 3.11 je $f'\in\mathbb{L}^1[a,b]$. Položme

$$h(x)=\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{a} \quad g(x)=f(x)-h(x) \quad \text{pro}\ \ x\in[a,b].$$

Ukážeme, že také funkce g je neklesající na $[a,b]$. Vskutku, podle věty 3.11 pro libovolné body $x,y\in[a,b]$ takové, že $x\le y$, máme

$$\begin{aligned} g(y)-g(x)&=\big(f(y)-h(y)\big)-\big(f(x)-h(x)\big)\\ &=\big(f(y)-f(x)\big)-\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}\,t\ge 0. \end{aligned}$$

Dále podle věty 3.12 je funkce h absolutně spojitá na $[a,b]$ a podle věty 3.14 je $h'=f'$ s.v. na $[a,b]$. To znamená, že $g'=(f-h)'=0$ s.v. na $[a,b]$. Podle lemmatu 3.17 je proto funkce g konstantní na $[a,b]$. Máme tedy

$$g(x)=f(x)-h(x)=f(a)-h(a)=f(a) \quad \text{pro}\ \ x\in[a,b]$$

neboli

$$f(x)=f(a)+h(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{pro}\ \ x\in[a,b],$$

a tudíž (3.11) platí pro každou funkci $f\in\mathbb{AC}[a,b]$, která je neklesající na $[a,b]$.

V obecném případě $f\in\mathbb{AC}[a,b]$ existují podle důsledku 3.10 funkce f_1, f_2 absolutně spojité na $[a,b]$, neklesající na $[a,b]$ a takové, že $f=f_1-f_2$ na $[a,b]$. Máme tedy

$$\begin{aligned} f(x)=f_1(x)-f_2(x)&=\Big(f_1(a)+\int_a^x f_1'(t)\,\mathrm{d}\,t\Big)-\Big(f_2(a)+\int_a^x f_2'(t)\,\mathrm{d}\,t\Big)\\ &=f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{pro}\ \ x\in[a,b]. \end{aligned}$$

Důkaz je dokončen. □

3.19 Cvičení. (i) Dokažte následující tvrzení:

Jestliže $f \in \mathbb{AC}[a,b]$, *pak je* $f' = 0$ *s.v. na* $[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když* f *je konstantní na* $[a,b]$. (Srovnejte s poznámkou 2.34.)

(ii) Je známo, že je-li f absolutně spojitá na $[a,b]$ a $v(x) = \operatorname{var}_a^x f$, pak platí $v' = |f'|$ s.v. na $[a,b]$ (viz [16, Věta 118]). Na základě tohoto faktu dokažte, že

$$\operatorname{var}_a^b f = \int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

platí pro každou funkci f absolutně spojitou na $[a,b]$.

3.3 Lebesgueův rozklad funkcí s konečnou variací

Víme již (viz větu 2.42 a poznámku 2.43), že každou funkci s konečnou variací na $[a,b]$ můžeme rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové resp. na rozdíl dvou funkcí neklesajících na $[a,b]$ (viz větu 2.14). Další možnost rozkladu funkcí s konečnou variací nabízí následující věta.

3.20 Věta (LEBESGUEŮV ROZKLAD FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ)**.** *Pro každou funkci* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *existují absolutně spojitá funkce* f^{AC}, *singulární spojitá funkce* f^{SC} *a skoková funkce* f^{B} *takové, že*

$$f = f^{\mathrm{AC}} + f^{\mathrm{SC}} + f^{\mathrm{B}} \ \textit{na}\ [a,b].$$

Jestliže $f = f_1 + f_2 + f_3$, *kde funkce* f_1 *je absolutně spojitá na* $[a,b]$, *funkce* f_2 *je singulární a spojitá na* $[a,b]$ *a funkce* f_3 *je skoková funkce na* $[a,b]$, *pak jsou funkce* $f^{\mathrm{AC}} - f_1$, $f^{\mathrm{SC}} - f_2$ *a* $f^{\mathrm{B}} - f_3$ *konstantní na* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Podle věty 2.42 existuje skoková funkce f^{B} taková, že funkce $f^{\mathrm{C}} = f - f^{\mathrm{B}}$ je spojitá na $[a,b]$, a vzhledem k větě 3.11 je $f' \in \mathbb{L}^1[a,b]$. Položme

$$f^{\mathrm{AC}}(x) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{a} \quad f^{\mathrm{SC}}(x) = f^{\mathrm{C}}(x) - f^{\mathrm{AC}}(x) \ \text{ pro } x \in [a,b].$$

Podle věty 2.40 je $(f^{\mathrm{B}})' = 0$ s.v. na $[a,b]$ a podle věty 3.14 máme $(f^{\mathrm{AC}})' = f'$ s.v. na $[a,b]$. To znamená, že

$$(f^{\mathrm{SC}})' = f' - (f^{\mathrm{AC}})' - (f^{\mathrm{B}})' = 0 \text{ s.v. na } [a,b].$$

b) Nechť

$$f = f_1 + f_2 + f_3,$$

kde $f_1 \in \mathbb{AC}[a,b]$, f_2 je singulární a spojitá na $[a,b]$ a $f_3 \in \mathbb{B}[a,b]$. Podle věty 2.42 jsou rozdíly

$$\big(f^{\mathrm{AC}} + f^{\mathrm{SC}}\big) - \big(f_1 + f_2\big) \ \text{ a } \ f^{\mathrm{B}} - f_3$$

konstantní na $[a,b]$. Protože

$$f^{\,\mathrm{AC}} + f^{\,\mathrm{SC}} + f^{\,\mathrm{B}} = f_1 + f_2 + f_3,$$

znamená to, že existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\big(f^{\,\mathrm{AC}} + f^{\,\mathrm{SC}}\big) - \big(f_1 + f_2\big) = f_3 - f^{\,\mathrm{B}} = c.$$

Tudíž

$$\big(f^{\,\mathrm{AC}} - f_1\big) = c - \big(f^{\,\mathrm{SC}} - f_2\big) \quad \text{a} \quad \big(f^{\,\mathrm{AC}} - f_1\big)' = 0 \quad \text{s.v. na } [a,b].$$

Protože obě funkce $f^{\,\mathrm{AC}}$ i f_1 jsou absolutně spojité na intervalu $[a,b]$, plyne odtud podle věty 3.18 (viz též cvičení 3.19), že také rozdíl $f^{\,\mathrm{AC}} - f_1$ je konstantní na $[a,b]$. Tím jsme dokončili důkaz. □

3.21 Definice. Jestliže $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, pak funkce $f^{\,\mathrm{AC}}$, resp. $f^{\,\mathrm{SC}}$, resp. $f^{\,\mathrm{B}}$ z věty 3.20 nazýváme *absolutně spojitá část*, resp. *spojitá singulární část*, resp. *skoková část* funkce f.

3.22 Cvičení. Dokažte následující tvrzení:

Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a každé* $x \in [a,b]$ *platí*

$$f^{\,\mathrm{AC}}(x) - f^{\,\mathrm{AC}}(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Kapitolu uzavřeme ještě jedním doplňkem ke větě 3.20.

3.23 Věta. *Je-li* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *neklesající na* $[a,b]$, *pak jsou neklesající na* $[a,b]$ *i funkce* $f^{\,\mathrm{AC}}, f^{\,\mathrm{SC}}$, *a* $f^{\,\mathrm{B}}$ *z věty* 3.20.

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ je neklesající na $[a,b]$ a funkce $f^{\,\mathrm{AC}}$, $f^{\,\mathrm{SC}}$, $f^{\,\mathrm{B}}$ jsou přiřazeny funkci f podle věty 3.20. Dále nechť $\{s_k\}$ je množina bodů nespojitosti funkce f a x, y je libovolná dvojice bodů z $[a,b]$ taková, že $x \le y$.

Protože f je neklesající na $[a,b]$, máme

$$\Delta^+ f(t) \ge 0 \ \text{ a } \ \Delta^- f(s) \ge 0 \text{ pro } \ t \in [a,b),\ \ s \in (a,b],$$

a proto

$$f^{\,\mathrm{B}}(y) - f^{\,\mathrm{B}}(x) = \sum_{x < s_k \le y} \Delta^- f(s_k) + \sum_{x \le s_k < y} \Delta^+ f(s_k) \ge 0.$$

Skoková část $f^{\,\mathrm{B}}$ funkce f je tedy neklesající na $[a,b]$.

Označme dále symbolem g spojitou část funkce f, tj. $g = f - f^{\,\mathrm{B}}$. Podle důsledku 2.30 máme

$$f^{\,\mathrm{B}}(y) - f^{\,\mathrm{B}}(x) \le \operatorname{var}_x^y f = f(y) - f(x),$$

a tudíž

$$g(y) - g(x) = \big(f(y) - f(x)\big) - \big(f^{\mathrm{B}}(y) - f^{\mathrm{B}}(x)\big) \geq 0.$$

Spojitá část funkce f je tedy neklesající na $[a,b]$.

Pro s.v. $t \in [a,b]$ je

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(s) - f(t)}{s - t} \in \mathbb{R}.$$

Protože je f neklesající na $[a,b]$, platí $f'(t) \geq 0$ pro s.v. $t \in [a,b]$. Podle důkazu věty 3.20 tedy dostaneme

$$f^{\mathrm{AC}}(y) - f^{\mathrm{AC}}(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}\,t \geq 0, \quad \text{jakmile } x, y \in [a,b] \text{ a } x \leq y.$$

To znamená, že f^{AC} je neklesající na $[a,b]$.

Podle věty 2.40 je $(f^{\mathrm{B}})' = 0$ s.v. na $[a,b]$, a tudíž

$$g' = f' - (f^{\mathrm{B}})' = f' \quad \text{s.v. na } [a,b].$$

Odtud použitím (3.8) a důkazu věty 3.20 odvodíme, že platí

$$g(y) - g(x) \geq \int_x^y g'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}\,t = f^{\mathrm{AC}}(y) - f^{\mathrm{AC}}(x)$$

neboli

$$\begin{aligned} f^{\mathrm{SC}}(y) - f^{\mathrm{SC}}(x) &= \big(g(y) - f^{\mathrm{AC}}(y)\big) - \big(g(x) - f^{\mathrm{AC}}(x)\big) \\ &= \big(g(y) - g(x)\big) - \big(f^{\mathrm{AC}}(y) - f^{\mathrm{AC}}(x)\big) \geq 0. \end{aligned}$$

Spojitá singulární část f^{SC} funkce f je tedy také neklesající na $[a,b]$. Tím je důkaz dokončen. □

Další podrobnosti o funkcích absolutně spojitých lze nalézt v monografiích V. Jarníka *Diferenciální počet* II [15, V.9], *Integrální počet* II [16, V.5], A. N. Kolmogorova a S. V. Fomina *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy* [17, Sec. 33.2] a Š. Schwabika *Integrace v* $\mathbb{R}$ (*Kurzweilova teorie*) [49, XIII.4] a ve skriptech [35] J. Lukeše a J. Malého *Measure and Integral*.

Kapitola 4

Regulované funkce

4.1 Definice a základní vlastnosti

4.1 Definice. Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se nazývá *regulovaná* na $[a,b]$, jestliže pro každé $t\in(a,b]$ a každé $s\in[a,b)$ existují konečné limity

$$f(t-)=\lim_{\tau\to t-}f(\tau)\ \text{ a }\ f(s+)=\lim_{\tau\to s+}f(\tau),$$

tj. má-li funkce f na intervalu $[a,b]$ nespojitosti nejvýše *1. druhu*. Množinu funkcí regulovaných na $[a,b]$ značíme $\mathbb{G}[a,b]$.

4.2 Poznámka. Zřejmě platí

$$\mathbb{BV}[a,b]\cup\mathbb{C}[a,b]\subset\mathbb{G}[a,b],\ \ \mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{C}[a,b]\neq\emptyset\ \text{ a }\ \mathbb{G}[a,b]\setminus\mathbb{BV}[a,b]\neq\emptyset.$$

4.3 Věta. *Jestliže posloupnost $\{f_n\}$ regulovaných funkcí konverguje stejnoměrně na intervalu $[a,b]$ k funkci f, potom $f\in\mathbb{G}[a,b]$.*

D ů k a z . Nechť $x\in[a,b)$ a nechť $\{x_k\}\subset(x,b]$ je libovolná posloupnost taková, že $x_k>x$ pro všechna $k\in\mathbb{N}$ a $x_k\to x$ pro $k\to\infty$. Dále, předpokládejme, že je dáno libovolné $\varepsilon>0$. Zvolme $n_0\in\mathbb{N}$ a $k_0\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo současně

$$\|f-f_{n_0}\|<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{ a }\ |f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{pro všechna } k,\ell\geq k_0.$$

Potom bude

$$\begin{aligned}&|f(x_k)-f(x_\ell)|\\&\quad\leq|f(x_k)-f_{n_0}(x_k)|+|f_{n_0}(x_k)-f_{n_0}(x_\ell)|+|f(x_\ell)-f_{n_0}(x_\ell)|<\varepsilon\end{aligned}$$

pro všechna $k,\ell\geq k_0$, tj. existuje konečná limita $f(x+)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)$. Podobně bychom ukázali, že pro každé $x\in(a,b]$ existuje konečná limita $f(x-)$. $\square$

Připomeňme si nyní několik pojmů z matematické analýzy.

4.4 Definice. Nechť $\mathbb{K}\subset\mathbb{N}$. Systém $\mathcal{J}=\{J_k:k\in\mathbb{K}\}$ podmnožin J_k intervalu $[a,b]$ se nazývá *pokrytí intervalu* $[a,b]$, jestliže $[a,b]=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{K}}J_k$. Řekneme, že systém $\mathcal{J}$ je *otevřené pokrytí* intervalu $[a,b]$, jestliže jsou všechny jeho prvky otevřené množiny v $[a,b]$. (Intervaly typu $[a,c)$ a $(d,b]$, kde $c\in(a,b]$ a $d\in[a,b)$, jsou otevřené v $[a,b]$.) Jestliže nějaká část $\mathcal{M}$ pokrytí $\mathcal{J}$ intervalu $[a,b]$ je sama také pokrytím intervalu $[a,b]$, říkáme, že $\mathcal{M}$ je *podpokrytím* pokrytí $\mathcal{J}$.

Fundamentální význam v matematice má následující tvrzení. Jeho důkaz lze nalézt např. v [15, věta 70]. Připomeňme ovšem, že interval $[a,b]$ předpokládáme stále ohraničený.

4.5 Věta (HEINE-BOREL)**.** *Z každého otevřeného pokrytí intervalu $[a,b]$ můžeme vybrat jeho konečné podpokrytí.*

4.6 Definice. Pro funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, interval $J\subset[a,b]$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ definujeme

$$\omega_J(f)=\sup_{x',x''\in J}|f(x')-f(x'')| \text{ a } \omega_{\boldsymbol{\sigma}}(f)=\max_{j=1,2,\dots,m}\omega_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}(f).$$

Číslo $\omega_J(f)$ bývá nazýváno *modul oscilace funkce f na intervalu J.*

Stěžejním tvrzením této kapitoly je následující věta.

4.7 Věta (HÖNIG)**.** *Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $f\in\mathbb{G}[a,b]$.

(ii) *Existuje posloupnost $\{f_n\}\subset\mathbb{S}[a,b]$ (jednoduchých skokových funkcí), která konverguje stejnoměrně k f na $[a,b]$.*

(iii) *Pro každé $\varepsilon>0$ existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ takové, že $\omega_{\boldsymbol{\sigma}}(f)<\varepsilon$.*

D ů k a z . a) Implikace (ii) $\implies$ (i) je dokázána větou 4.3.
b) Předpokládejme, že platí (i), a nechť je dáno libovolné $\varepsilon>0$. Potom pro každé $x\in[a,b]$ existuje $\delta(x)>0$ takové, že platí

$$x-\delta(x)>a \text{ pro všechna } x\in(a,b], \quad x+\delta(x)<b \text{ pro všechna } x\in[a,b)$$

a

$$\left.\begin{aligned}&\omega_{(a,a+\delta(a))}(f)<\varepsilon,\ \omega_{(b-\delta(b),b)}(f)<\varepsilon,\\&\omega_{(x-\delta(x),x)}(f)<\varepsilon,\ \omega_{(x,x+\delta(x))}(f)<\varepsilon \text{ pro všechna } x\in(a,b).\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

Intervaly

$$[a,a+\delta(a)),\ (x-\delta(x),x+\delta(x)),\ x\in(a,b),\ (b-\delta(b),b]$$

tvoří otevřené pokrytí intervalu $[a,b]$, ze kterého lze podle Heinovy-Borelovy věty 4.5 vybrat pokrytí konečné, tj. konečný systém intervalů

$$[x_0,x_0+\delta(x_0)),\ (x_i-\delta(x_i),x_i+\delta(x_i)),\ i=1,2,\dots,m-1,\ (x_m-\delta(x_m),x_m],$$

takový, že $a=x_0<x_1<\dots<x_m=b$ a

$$[x_0,x_0+\delta(x_0))\cup\bigcup_{i=1}^{m-1}(x_i-\delta(x_i),x_i+\delta(x_i))\cup(x_m-\delta(x_m),x_m]=[a,b].$$

Zvolme $\sigma_i,\ i=1,2,\dots,m,$ tak, aby platilo

$$\sigma_i \in (x_i-\delta(x_i), x_{i-1}+\delta(x_{i-1}))\cap(x_{i-1},x_i) \quad \text{pro} \quad i=1,2,\dots,m.$$

a označme $\boldsymbol{\sigma}=\{x_0,\sigma_1,x_1,\dots,x_{m-1},\sigma_m,x_m\}$. Podle (4.1) máme

$$\omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f)<\varepsilon \qquad \text{a} \qquad \omega_{(x_j,x_j+\delta(x_j))}(f)<\varepsilon$$

pro $i=1,2,\dots,m$ a $j=0,1,\dots m{-}1$. Tudíž

$$\omega_{(x_0,\sigma_1)}(f)\le\omega_{(x_0,x_0+\delta(a))}(f)<\varepsilon,\quad \omega_{(\sigma_m,b)}(f)\le\omega_{(x_m-\delta(x_m),x_m)}(f)<\varepsilon,$$
$$\omega_{(\sigma_i,x_i)}(f)\le\omega_{(x_i-\delta(x_i),x_i)}(f)<\varepsilon,\ \omega_{(x_i,\sigma_{i+1})}(f)\le\omega_{(x_i,x_i+\delta(x_i))}(f)<\varepsilon$$

pro $i=1,2,\dots,m,$ tj. $\omega_{\boldsymbol{\sigma}}(f)<\varepsilon.$

c) Předpokládejme, že platí (iii). Nechť je dáno $n\in\mathbb{N}$ a nechť

$\boldsymbol{\sigma}^n=\{\sigma_0^n,\sigma_1^n,\dots,\sigma_{m_n}^n\}\in\mathscr{D}[a,b]$

je dělení $[a,b]$ takové, že $\omega_{\boldsymbol{\sigma}^n}(f)<\frac{1}{n}$. Pro každé $i\in\{1,2,\dots,m_n\}$ zvolme $\xi_i^n\in(\sigma_{i-1}^n,\sigma_i^n)$ a definujme

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x) & \text{pro} \ \ x\in\boldsymbol{\sigma}^n,\\ f(\xi_i^n) & \text{pro} \ \ x\in(\sigma_{i-1}^n,\sigma_i^n).\end{cases}$$

Zřejmě $f_n\in\mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n\in\mathbb{N}$. Dále, pro každé $x\in[a,b]$ máme $|f(x)-f_n(x)|<\frac{1}{n}$, a tudíž také $\|f-f_n\|<\frac{1}{n}$. To znamená, že $f_n\rightrightarrows f$ na $[a,b]$ pro $n\to\infty$. Platí tedy (ii). □

4.8 Důsledek. *Každá funkce regulovaná na* $[a,b]$ *je na* $[a,b]$ *ohraničená.*

D ů k a z . Podle tvrzení (iii) z Hönigovy věty 4.7 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$|f(x)|\le\Big|f\Big(\frac{\sigma_{j-1}+\sigma_j}{2}\Big)\Big|+1 \quad \text{pro} \ \ x\in(\sigma_{j-1},\sigma_j) \ \ \text{a} \ \ j\in\{1,2,\dots,m\}.$$

Odtud plyne, že $|f(x)|\le M$ pro všechna $x\in[a,b]$, kde

$$M=\max\Big\{|f(a)|,\Big|f\Big(\frac{\sigma_{j-1}+\sigma_j}{2}\Big)\Big|+1,\big|f(\sigma_j)\big|:j=1,2,\dots,m\Big\}<\infty.$$ □

4.9 Důsledek. *Jestliže* $f\in\mathbb{G}[a,b]$, *pak pro každé* $\varepsilon>0$ *existuje nejvýše konečně mnoho* $x\in[a,b]$ *takových, že platí*

$$x\in[a,b) \ \ \textit{a} \ \ |\Delta^+f(x)|>\varepsilon \quad \textit{nebo} \quad x\in(a,b] \ \ \textit{a} \ \ |\Delta^-f(x)|>\varepsilon\,.$$

D ů k a z . Podle tvrzení (iii) z Hönigovy věty 4.7 můžeme ke každému $\varepsilon>0$ najít dělení

$$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$$

intervalu $[a,b]$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{pro} \;\; x, y \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j) \;\; \text{a} \;\; j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Speciálně, $|\Delta^+ f(x)| = |f(x+) - f(x)| \leq \varepsilon$ a $|\Delta^- f(x)| = |f(x) - f(x-)| \leq \varepsilon$ pro všechna $x \in [a, b] \setminus \boldsymbol{\sigma}$. Platí tedy tvrzení tohoto důsledku. □

Následující tvrzení plyne okamžitě z lemmatu 2.22. Poměrně jednoduše ho ale můžeme dokázat i pomocí důsledku 4.9.

4.10 Věta. *Každá funkce regulovaná na $[a, b]$ má na $[a, b]$ nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.*

D ů k a z . Nechť f je regulovaná na $[a, b]$. Pro $k \in \mathbb{N}$ položme

$$D_k^+ = \{t \in [a, b) : |\Delta^+ f(t)| > \tfrac{1}{k}\} .$$

Potom

$$D^+ = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k^+ = \{t \in [a, b) : |\Delta^+ f(t)| > 0\}$$

je množina všech bodů z intervalu $[a, b)$, ve kterých má f nespojitosti zprava. Podobně

$$D^- = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k^- = \{t \in (a, b] : |\Delta^- f(t)| > 0\},$$

kde

$$D_k^- = \{t \in (a, b] : |\Delta^- f(t)| > \tfrac{1}{k}\},$$

je množina všech bodů z intervalu $(a, b]$, ve kterých má f nespojitosti zleva. Zřejmě, $D = D^+ \cup D^-$ je množina všech bodů nespojitosti funkce f v intervalu $[a, b]$.

Podle důsledku 4.9 má každá množina D_k^+, D_k^-, $k \in \mathbb{N}$, nejvýše konečný počet prvků. Tudíž D musí být nejvýše spočetná. □

4.11 Důsledek. *Nechť $f \in \mathbb{G}[a, b]$ a*

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+), & \textit{když} \;\; x \in [a, b), \\ f(b), & \textit{když} \;\; x = b, \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\widehat{f}(x) = \begin{cases} f(a), & \textit{když} \;\; x = a, \\ f(x-), & \textit{když} \;\; x \in (a, b]. \end{cases} \tag{4.3}$$

Potom obě funkce $\widetilde{f}$ i $\widehat{f}$ jsou regulované na $[a, b]$ a

$$\widetilde{f}(x-) = f(x-), \; \textit{když} \;\; x \in (a, b], \;\; \widetilde{f}(x+) = f(x+), \; \textit{když} \;\; x \in [a, b), \tag{4.4}$$

a

$$\widehat{f}(x-) = f(x-), \; \textit{když} \;\; x \in (a, b], \;\; \widehat{f}(x+) = f(x+), \; \textit{když} \;\; x \in [a, b). \tag{4.5}$$

D ů k a z. a) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k ekvivalenci tvrzení (i) a (iii) z Hönigovy věty 4.7, existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ intervalu $[a, b]$ takové, že nerovnost

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí, jakmile je $t, s \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j)$ pro nějaké $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Speciálně,

$$|f(t+\delta) - f(s+\delta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, každou dvojici $t, s \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j)$ a každé $\delta > 0$ takové, že $t+\delta, s+\delta \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j)$. Pro libovolná $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $t, s \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j)$ tedy platí také

$$|f(t+) - f(s+)| = \lim_{\delta \to 0+} |f(t+\delta) - f(s+\delta)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tudíž

$$\left.\begin{aligned} &|\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(s)| < \varepsilon \\ &\qquad \text{pro každé } j \in \{1, 2, \ldots, , m\} \text{ a každou dvojici } t, s \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j). \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Podobně bychom ukázali, že platí

$$\left.\begin{aligned} &|\widehat{f}(t) - \widehat{f}(s)| < \varepsilon \\ &\qquad \text{pro každé } j \in \{1, 2, \ldots, , m\} \text{ a každou dvojici } t, s \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j]. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Odtud, vzhledem k ekvivalenci tvrzení (i) a (iii) z Hönigovy věty 4.7, plyne, že obě funkce $\widetilde{f}$ i $\widehat{f}$ jsou regulované na $[a, b]$.

b) Nechť jsou dány $x \in [a, b)$ a $\varepsilon > 0$ a nechť $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ je dělení intervalu $[a, b]$ takové, že

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ platí pro každou dvojici } t, s \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j) \text{ a každé } j \in \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Existuje právě jeden index $j \in \{1, 2, \ldots, , m\}$ takový, že $x \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j)$. V důsledku tvrzení (4.6) máme

$$|\widetilde{f}(t) - f(x+)| = |\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(x)| < \varepsilon \quad \text{pro každé } t \in (x, \sigma_j).$$

Platí tedy

$$\lim_{t \to x+} |\widetilde{f}(t) - f(x+)| \leq \varepsilon \quad \text{pro každé } \varepsilon > 0$$

neboli $\widetilde{f}(x+) = f(x+)$. Druhé z tvrzení obsažených v (4.4) je dokázáno.

c) Analogicky, nechť $x \in (a,b]$, $\varepsilon > 0$ a $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ takové, že

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro každou dvojici } t, s \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j) \text{ a každé } j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Existuje právě jedno $j \in \{1, 2, \dots, , m\}$ takové, že $x \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j]$. Nechť $t \in (\sigma_{j-1}, x)$ a

$$0 < \delta < \min\{x - t, x - \sigma_{j-1}\}.$$

Potom $x - \delta$, $t + \delta \in (\sigma_{j-1}, x)$ a podle definice dělení $\boldsymbol{\sigma}$ platí

$$|f(x-\delta) - f(t+\delta)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tudíž

$$|f(x-) - \widetilde{f}(t)| = \lim_{\delta \to 0+} |f(x-\delta) - f(t+\delta)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí $\widetilde{f}(x-) = f(x-)$. Dokázali jsme tedy i první tvrzení z (4.4).

d) Analogicky bychom dokázali i vztahy (4.5). □

4.12 Cvičení. Nechť $h(x) = 1$, je-li $x = 1/k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a $h(x) = 0$ pro ostatní $x \in [0,1]$. Rozhodněte, zda je funkce h regulovaná na $[0,1]$.

4.2 Prostor regulovaných funkcí a některé jeho podprostory

4.13 Věta. $\mathbb{G}[a,b]$ *je Banachův prostor vzhledem k normě*

$$\|f\|_{\mathbb{G}} = \|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

D ů k a z. Předpokládejme, že posloupnost $\{f_n\} \subset \mathbb{G}[a,b]$ je cauchyovská v prostoru $\mathbb{G}[a,b]$. Jako v částech a) a b) důkazu věty II.2.20 můžeme dokázat, že posloupnost $\{f_n\}$ stejnoměrně konverguje k nějaké funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Podle věty 4.3 je $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a tím je věta dokázána. □

4.14 Poznámka. (i) Podle definice II.2.36 je $f \in \mathbb{S}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ takové, že f je konstantní na každém podintervalu (σ_{j-1}, σ_j). Každá funkce z $\mathbb{S}[a,b]$ je konečná lineární kombinace funkcí tvaru $\chi_{(\alpha,\beta)}$ a $\chi_{[\tau]}$, kde (α,β) může být libovolný podinterval v $[a,b]$ a τ může být libovolný bod v $[a,b]$. Platí ovšem

$$\chi_{(\alpha,\beta)} = \chi_{(\alpha,b]} - \chi_{[\beta,b]} \quad \text{pro libovolná } \alpha, \beta \in [a,b],\ \alpha < \beta$$

a

$$\chi_{[\tau]} = \chi_{[\tau,b]} - \chi_{(\tau,b]} \quad \text{pro každé } \tau \in [a,b).$$

Tudíž $f \in \mathbb{S}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když f je konečná lineární kombinace charakteristických funkcí intervalů $[\tau,b]$, $(\tau,b]$, kde τ může být libovolný bod v $[a,b)$ a charakteristické funkce jednobodového intervalu $[b]$, tj.

$$\mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]},\ \chi_{(\tau,b]},\ \tau \in [a,b),\ \chi_{[b]}\Big),$$

kde $\mathrm{Lin}\,(M)$ značí lineární obal množiny M. Podobně bychom ukázali, že je také

$$\mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]},\ \chi_{[a,\tau)},\ \tau \in (a,b],\ \chi_{[a]}\Big).$$

(ii) Díky ekvivalenci tvrzení (i) a (ii) z Hönigovy věty 4.7 je množina $\mathbb{S}[a,b]$ hustá v $\mathbb{G}[a,b]$, tj. $\overline{\mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}[a,b]$, kde $\overline{\mathbb{S}[a,b]}$ značí uzávěr $\mathbb{S}[a,b]$ v $\mathbb{G}[a,b]$.

4.15 Lemma. *Nechť* $\{f_n\} \subset \mathbb{G}[a,b]$ *a* $f_n \rightrightarrows f$ *na* $[a,b]$. *Potom platí také*

$$f_n(x-) \rightrightarrows f(x-) \ \text{ a } \ f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \ \text{ na } [a,b],$$

kde $f(a-) = f(a),\ f(b+) = f(b)$ *a* $f_n(a-) = f_n(a),\ f_n(b+) = f_n(b)$ *pro* $n \in \mathbb{N}$.

D ů k a z . Pro $n \in \mathbb{N}$ položme

$$\widetilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x+), & \text{když } x \in [a,b), \\ f_n(b), & \text{když } x = b \end{cases}$$

a

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x+), & \text{když } x \in [a,b), \\ f(b), & \text{když } x = b. \end{cases}$$

Podle důsledku 4.11 jsou všechny funkce $\widetilde{f},\ \widetilde{f}_n,\ n \in \mathbb{N}$, regulované na $[a,b]$.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že je $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon/2$ pro každé $n \ge n_\varepsilon$ a každé $t \in [a,b]$. Odtud limitním přechodem $t \to x$ zprava $(t \to x+)$ dostaneme, že pro každé $x \in [a,b)$ a každé $n \ge n_\varepsilon$ platí také

$$|\widetilde{f}_n(x) - \widetilde{f}(x)| = \lim_{t \to x+} |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \|\widetilde{f}_n - \widetilde{f}\| = 0 \ \text{ neboli } \ f_n(x+) \rightrightarrows f(x+) \quad \text{na } [a,b].$$

Podobně bychom ukázali, že platí i $f_n(x-) \rightrightarrows f(x-)$ na $[a,b]$. □

Na závěr tohoto odstavce ještě uvedeme několik tvrzení, která budou později užitečná. Nejprve shrneme důsledky lemmatu 4.15 pro některé podmnožiny prostoru $\mathbb{G}[a,b]$.

4.16 Důsledky. *Množiny*

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{f\in\mathbb{G}[a,b] : f(x-)=f(x) \textit{ pro } x\in(a,b)\},\\
&\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{f\in\mathbb{G}[a,b] : f(x-)=f(x) \textit{ pro } x\in(a,b]\},\\
&\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{f\in\mathbb{G}[a,b] : f(x+)=f(x) \textit{ pro } x\in(a,b)\},\\
&\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{f\in\mathbb{G}[a,b] : f(x+)=f(x) \textit{ pro } x\in[a,b)\},\\
&\mathbb{G}_{reg}[a,b] = \{f\in\mathbb{G}[a,b] : f(x-)+f(x+)=2\,f(x) \textit{ pro } x\in(a,b)\},\\
&\widetilde{\mathbb{G}}_{reg}[a,b] = \{f\in\mathbb{G}[a,b] : f(a+)=f(a),\ f(b-)=f(b),\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad f(x-)+f(x+)=2\,f(x) \textit{ pro } x\in(a,b)\}
\end{aligned}\right\}\tag{4.8}$$

jsou uzavřené v $\mathbb{G}[a,b]$, *a tudíž jsou to také Banachovy prostory vzhledem k operacím a normě indukovaným z* $\mathbb{G}[a,b]$.

4.17 Poznámka. Jestliže regulovaná funkce f splňuje na intervalu (a,b) podmínku

$$f(x-)+f(x+)=2\,f(x),$$

říkáme, že f je *regulární* na (a,b). O funkcích z prostoru $\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ pak říkáme, že jsou regulární na intervalu $[a,b]$.

4.18 Lemma.

$$\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\qquad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b],\qquad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b],$$

$$\overline{\mathbb{G}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\mathbb{G}_{reg}[a,b].\qquad \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]}=\widetilde{\mathbb{G}}_{reg}[a,b].$$

D ů k a z . Dokážeme pouze první a poslední tvrzení. Zbývající vztahy se dokážou analogicky.

a) Nechť $f\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a $\varepsilon>0$. Podle věty 4.7 (ii) existuje $\varphi\in\mathbb{S}[a,b]$ takové, že

$$|f(x)-\varphi(x)|\le\|f-\varphi\|<\varepsilon\quad\text{pro } x\in[a,b].\tag{4.9}$$

Dále pro každé $x\in(a,b)$ existuje $\delta(x)>0$ takové, že $x-\delta(x)>a$ a

$$|f(x)-f(t)|=|f(x-)-f(t)|<\varepsilon\quad\text{pro } t\in(x-\delta(x),x).$$

Pro každé $x\in(a,b)$ a $t\in(x-\delta(x),x]$ tedy máme

$$|\varphi(x)-\varphi(t)|\le|\varphi(x)-f(x)|+|f(x)-f(t)|+|f(t)-\varphi(t)|<3\,\varepsilon,$$

tj.

$$|\varphi(x)-\varphi(x-)|\le 3\,\varepsilon.$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{pro } x = a \text{ nebo } x = b, \\ \varphi(x-) & \text{pro } x \in (a,b). \end{cases}$$

Potom $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{G}_{\rm L}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$,

$$|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| = |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad \text{když } x = a \text{ nebo } x = b,$$

a

$$|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| \\ \leq |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x-)| < 4\,\varepsilon, \quad \text{když } x \in (a,b).$$

Odtud už plyne, že množina $\mathbb{G}_{\rm L}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ je hustá v $\mathbb{G}_{\rm L}[a,b]$.

b) Nechť $f \in \mathbb{G}_{\rm reg}[a,b]$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a funkce $\varphi \in \mathbb{S}[a,b]$ je taková, že platí (4.9). Potom musí být také

$$\left. \begin{aligned} & |f(x-) - \varphi(x-)| \leq \varepsilon \quad \text{pro } x \in [a,b), \\ \text{a} \quad & \\ & |f(x+) - \varphi(x+)| \leq \varepsilon \quad \text{pro } x \in (a,b]. \end{aligned} \right\} \tag{4.10}$$

Položme

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(a), & \text{když } x = a, \\ \tfrac{1}{2}\Big(\varphi(x+) + \varphi(x-)\Big), & \text{když } x \in (a,b), \\ \varphi(b), & \text{když } x = b. \end{cases} \tag{4.11}$$

Potom $\widetilde{\varphi} \in \mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\rm reg}[a,b]$. Dále vzhledem k (4.10) a (4.11),

$$|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| = \left|\tfrac{1}{2}\,[f(x+) + f(x-)] - \tfrac{1}{2}\,[\varphi(x+) + \varphi(x-)]\right| \\ \leq \tfrac{1}{2}\,\Big(\big|f(x+) - \varphi(x+)\big| + \big|f(x-) - \varphi(x-)\big|\Big) \leq \varepsilon$$

když $x \in (a,b)$. Konečně, podle (4.9) a (4.11) máme

$$|f(x) - \widetilde{\varphi}(x)| = |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad \text{když } x = a \text{ nebo } x = b.$$

Odtud už plyne, že platí $\overline{\mathbb{G}_{\rm reg}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \mathbb{G}_{\rm reg}[a,b]$. □

4.19 Lemma.

$$\mathbb{G}_{\rm L}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b),\ \chi_{[b]}\Big),$$

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\rm L}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(\chi_{[a,\tau]}, \tau \in [a,b]\Big),$$

$$\mathbb{G}_{\rm R}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{[a]}, \chi_{[a,\tau)}, \tau \in (a,b]\Big),$$

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]=\mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]},\tau\in[a,b]\Big),$$
$$\mathbb{G}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]=\mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(a,b]},\ \frac{1}{2}\chi_{[\tau]}+\chi_{(\tau,b]},\tau\in(a,b),\ \chi_{[b]}\Big),$$
$$\widetilde{\mathbb{G}}_{reg}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]=\mathrm{Lin}\Big(1,\ \frac{1}{2}\chi_{[\tau]}+\chi_{(\tau,b]},\ \tau\in(a,b)\Big).$$

D ů k a z . První tvrzení je obsaženo v poznámce 4.14 (i). Dokážeme ještě např. předposlední z uvedených relací.

Nechť tedy $f\in\mathbb{S}[a,b]\cap\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$. Potom existují

$$m\in\mathbb{N},\ c_0,c_1,\dots,c_{m+1}\in\mathbb{R}\ \text{ a }\ \boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}\in\mathscr{D}[a,b]$$

takové, že

$$f(x)=\begin{cases} c_0, & \text{když } x=a,\\ c_j, & \text{když } x\in(\sigma_{j-1},\sigma_j) \text{ pro nějaké } j=1,2,\dots,m,\\ \tfrac{1}{2}(c_j+c_{j+1}), & \text{když } x=\sigma_j \text{ pro nějaké } j=1,2,\dots,m-1,\\ c_{m+1}, & \text{když } x=b,\end{cases}$$

tj.

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=c_0\,\chi_{[a]}(x)+\sum_{j=1}^{m}c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}(x)\\ &\quad+\frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{m-1}\big(c_j+c_{j+1}\big)\,\chi_{[\sigma_j]}(x)\Big)+c_{m+1}\chi_{[b]}(x) \text{ pro } x\in[a,b].\end{aligned}\right\}\tag{4.12}$$

Pravou stranu vztahu (4.12) můžeme upravit takto

$$\begin{aligned} f&=c_0\,\chi_{[a,b]}-c_0\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=1}^{m}c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},b]}-\sum_{j=1}^{m-1}c_j\,\chi_{[\sigma_j,b]}-c_m\,\chi_{[b]}\\ &\quad+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}c_j\,\chi_{[\sigma_j]}+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}c_{j+1}\,\chi_{[\sigma_j]}+c_{m+1}\,\chi_{[b]}\\ &=c_0\,\chi_{[a,b]}-c_0\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=1}^{m}c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},b]}-\sum_{j=1}^{m-1}c_j\,\big(\chi_{(\sigma_j,b]}+\chi_{[\sigma_j]}\big)\\ &\quad+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}c_j\,\chi_{[\sigma_j]}+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}c_{j+1}\,\chi_{[\sigma_j]}+\big(c_{m+1}-c_m\big)\,\chi_{[b]}\\ &=c_0\,\chi_{[a,b]}-c_0\,\chi_{(a,b]}+\sum_{j=0}^{m-1}c_{j+1}\,\chi_{(\sigma_j,b]}-\sum_{j=1}^{m-1}c_j\,\chi_{(\sigma_j,b]}\\ &\quad-\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}c_j\,\chi_{[\sigma_j]}+\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}c_{j+1}\,\chi_{[\sigma_j]}+\big(c_{m+1}-c_m\big)\,\chi_{[b]}\end{aligned}$$

$$= c_0\chi_{[a,b]} + (c_1 - c_0)\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=1}^{m-1}(c_{j+1} - c_j)\left(\chi_{(\sigma_j,b]} + \tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]}\right)$$
$$+ (c_{m+1} - c_m)\,\chi_{[b]}$$
$$= d_0\chi_{[a,b]} + d_1\,\chi_{(a,b]} + \sum_{j=2}^{m} d_j\left(\chi_{(\sigma_{j-1},b]} + \tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]}\right) + d_{m+1}\,\chi_{[b]},$$

kde

$$d_0 = c_0,\ \ d_j = c_j - c_{j-1} \text{ pro } \ j = 1, 2, \dots, m+1. \tag{4.13}$$

Máme tedy $f \in \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \tfrac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big)$. Navíc vztahy (4.13) určují vzájemně jednoznačnou korespondenci mezi vektory

$$(c_0, c_1, \dots, c_m, c_{m+1}) \ \text{ a } \ (d_0, d_1, \dots, d_m, d_{m+1}).$$

Tudíž

$$\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b] = \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{(a,b]}, \frac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}, \tau \in (a,b), \chi_{[b]}\Big).$$

□

4.3 Relativní kompaktnost v prostoru $\mathbb{G}[a,b]$

Připomeňme, že podmnožina $\mathscr{M}$ Banachova prostoru $\mathbb{X}$ je *relativně kompaktní* jestliže z každé posloupnosti jejích prvků lze vybrat posloupnost konvergentní v $\mathbb{X}$. Je známo, že podmnožina $\mathscr{M}$ Banachova prostoru $\mathbb{X}$ je *relativně kompaktní* tehdy a jen tehdy, když je *totálně ohraničená*, tj. když platí

$$\left.\begin{array}{l} \text{pro každé } \ \varepsilon > 0 \ \text{ existuje konečná množina } \ D_\varepsilon \subset \mathbb{X} \ \text{ taková, že} \\ \text{pro každé } \ x \in \mathscr{M} \ \text{ lze najít } \ d \in D_\varepsilon \ \text{ pro které platí } \ \|x - d\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon. \end{array}\right\} \tag{4.14}$$

Množinu D_ε s vlastnostmi z (4.14) budeme nazývat ε-*síť* pro M v prostoru $\mathbb{X}$.

Platí následující očekávatelné tvrzení

4.20 Lemma. *Každá totálně ohraničená podmnožina Banachova prostoru* $\mathbb{X}$ *je také ohraničená.*

D ů k a z . Nechť $\mathscr{M} \subset \mathbb{X}$ je totálně ohraničená. Potom existuje konečná množina

$$D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\} \subset \mathbb{X}$$

taková, že pro každé $x \in M$ existuje $\widetilde{d}_x \in D$, pro které platí $\|x - \widetilde{d}_x\|_{\mathbb{X}} < 1$. Pro libovolné $x \in M$ tedy máme

$$\|x\|_{\mathbb{X}} \le \|x - \widetilde{d}_x\|_{\mathbb{X}} + \|\widetilde{d}_x\|_{\mathbb{X}} \le K,$$

kde konstanta

$$K = 1 + \max\{\|d_k\|_{\mathbb{X}} : k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

nezávisí na $x \in \mathscr{M}$ a je evidentně konečná. $\square$

Na prostoru spojitých funkcí $\mathbb{C}[a,b]$ platí kriterium relativní kompaktnosti známé jako věta Arzelàova-Ascoliova. Jeho důkaz je obsažen ve většině učebnic funkcionální analýzy, viz např. Věta 4 v odstavci II.7.4 v monografii [17].

4.21 Věta (ARZELÀ-ASCOLI)**.** *Podmnožina $\mathscr{M}$ prostoru $\mathbb{C}[a,b]$ je relativně kompaktní tehdy a jen tehdy, když jsou splněny obě následující podmínky*

(i) *Existuje konstanta $c^* \in [0,\infty)$ taková, že je $\|f\| \le c^*$ pro každou funkci $f \in \mathscr{M}$.*

(ii) *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ platí pro všechny body $t, s \in [a,b]$ takové, že je $|t - s| < \delta$ a pro všechny funkce $f \in \mathscr{M}$.*

Je-li splněna podmínka (i) z věty Arzelàovy-Ascoliovy, říkáme, že množina $\mathscr{M}$ je *stejně ohraničená*, zatímco je-li splněna podmínka (ii), říkáme, že množina $\mathscr{M}$ je *stejně spojitá*. Větu můžeme tedy přeformulovat takto:

Podmnožina $\mathscr{M}$ prostoru $\mathbb{C}[a,b]$ je relativně kompaktní tehdy a jen tehdy, když je to množina stejně ohraničená a stejně spojitá.

Pro podmnožiny prostoru $\mathbb{G}[a,b]$ regulovaných funkcí platí analogické tvrzení. Jenom stejnou spojitost je třeba nahradit stejnou regulovatelností. Stejnou regulovatelnost definujeme podobně jako stejnou spojitost. Jenom oboustranné limity jsou nahrazeny limitami jednostrannými.

4.22 Definice. Řekneme, že podmnožina $\mathscr{M}$ prostoru $\mathbb{G}[a,b]$ regulovaných funkcí je *stejně regulovaná* jestliže

$$\left.\begin{array}{l} \text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ a každé } \tau \in (a,b] \text{ existuje } \delta_1 \in (0, \tau - a) \text{ takové, že} \\ \qquad |f(\tau-) - f(t)| < \varepsilon \\ \text{platí pro všechny } t \in (\tau - \delta_1, \tau) \text{ a pro všechny funkce } f \in \mathscr{M} \end{array}\right\} \tag{4.15}$$

a

$$\left.\begin{array}{l} \text{pro každé } \varepsilon > 0 \text{ a každé } \tau \in [a,b) \text{ existuje } \delta_2 \in (0, b - \tau) \text{ takové, že} \\ \qquad |f(\tau+) - f(t)| < \varepsilon \\ \text{platí pro všechny } t \in (\tau, \tau + \delta_2) \text{ a pro všechny funkce } f \in \mathscr{M}. \end{array}\right\} \tag{4.16}$$

Nyní můžeme zformulovat obdobu Arzelàovy-Ascoliovy věty pro množiny regulovaných funkcí.

4.23 Věta (FRAŇKOVÁ)**.** *Podmnožina $\mathscr{M}$ prostoru $\mathbb{G}[a,b]$ regulovaných funkcí je relativně kompaktní v $\mathbb{G}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když je stejně ohraničená a stejně regulovaná.*

Při důkazu věty 4.23 se nám bude pohodlněji pracovat s ekvivalentní definicí stejné regulovanosti, kterou nám poskytne následující lemma.

4.24 Lemma. *Množina $\mathscr{M} \subset \mathbb{G}[a,b]$ je stejně regulovaná tehdy a jen tehdy, když je splněna podmínka*

$$\left.\begin{aligned} &\text{pro každé } \varepsilon>0 \text{ existuje dělení } \boldsymbol{\sigma} \text{ intervalu } [a,b] \text{ takové, že} \\ &\qquad \omega_{\boldsymbol{\sigma}}(f)<\varepsilon \\ &\text{platí pro každou funkci } f\in\mathscr{M}, \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

kde symbol $\omega_{\boldsymbol{\sigma}}(f)$ má stejný význam jako v definici 4.6, tj.

$$\omega_{\boldsymbol{\sigma}}(f)=\max_{j=1,2,\dots,m}\sup\{|f(t)-f(s)|: t,s\in(\sigma_{j-1},\sigma_j)\}.$$

Důkaz. i) Předpokládejme nejprve, že $\mathscr{M} \subset \mathbb{G}[a,b]$ je stejně regulovaná. Buď dáno $\varepsilon>0$. Nechť B je množina všech bodů $\tau\in(a,b]$ pro něž existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,\tau]$ takové, že platí (4.17).

a) Nejprve ukážeme, že množina B je neprázdná.

Podle definice 4.22 existuje $\delta_a\in(0,b-a)$ takové, že

$$|f(s)-f(a+)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{platí pro všechna } s\in(a,a+\delta_a) \text{ a každou funkci } f\in\mathscr{M}.$$

Pro libovolná $t,s\in(a,a+\delta_a)$ a $f\in\mathscr{M}$ tedy máme

$$|f(t)-f(s)|\le|f(t)-f(a+)|+|f(s)-f(a+)|<\varepsilon.$$

Položme $\tau=a+\delta_a$. Potom $\{a,\tau\}$ je dělení intervalu $[a,\tau]$, pro které platí (4.17). To znamená, že množina B je neprázdná a $\tau^*:=\sup B\in(a,b]$.

b) Dokážeme, že $\tau^*\in B$. Vskutku, podle definice 4.22 existuje $\delta_1\in(0,\tau^*-a)$ takové, že

$$|f(s)-f(\tau^*-)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{platí pro všechna } s\in(\tau^*-\delta_1,\tau^*) \text{ a každou funkci } f\in\mathscr{M}.$$

Pro libovolná $t,s\in(\tau^*-\delta_1,\tau^*)$ a $f\in\mathscr{M}$ tedy máme

$$|f(t)-f(s)|\le|f(t)-f(\tau^*-)|+|f(s)-f(\tau^*-)|<\varepsilon. \tag{4.18}$$

Dále, podle definice suprema existuje $\tau\in B\cap(\tau^*-\delta_1,\tau^*)$. Existuje tedy dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,\tau]$ takové, že platí (4.17). Nechť $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma}\cup\{\tau^*\}$. Potom

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\tau,\tau^*\}$$

je dělení intervalu $[a,\tau^*]$, přičemž $\nu(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}})=\nu(\boldsymbol{\sigma})+1$. Označme

$$\widetilde{\sigma}_j=\begin{cases}\sigma_j & \text{když } j\in\{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\},\\ \tau^* & \text{když } j=\nu(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}).\end{cases}$$

Vzhledem k (4.17) a (4.18) tedy máme

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon$$

pro všechna $t, s \in (\widetilde{\sigma}_{j-1}, \widetilde{\sigma}_j)$, $j = 1, 2, \dots, \nu(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}})$, a každou funkci $f \in \mathscr{M}$, tj. $\omega_{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}(f) < \varepsilon$ pro každou funkci $f \in \mathscr{M}$. To ovšem znamená, že $\tau^* \in B$.

c) Dokážeme, že je $\tau^* = b$. Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme tedy, že je $\tau^* < b$. Zvolme $\delta_2 \in (0, b - \tau^*)$ tak, aby platilo

$$|f(s) - f(\tau^*+)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro každé } s \in (\tau^*, \tau^* + \delta_2) \text{ a každou funkci } f \in \mathscr{M}.$$

Takové δ_2 existuje podle definice 4.22. Podobně jako v částech a) i b) tohoto důkazu, odtud odvodíme, že platí

$$|f(t) - f(s)| \le |f(t) - f(\tau^*+)| + |f(s) - f(\tau^*+)| < \varepsilon \tag{4.19}$$

pro libovolná $t, s \in (\tau^*, \tau^* + \delta_2)$ a každou funkci $f \in \mathscr{M}$. Nechť $\boldsymbol{\sigma}$ je dělení intervalu $[a, \tau^*]$ takové, že platí (4.17). Položme $\tau = \tau^* + \delta_2$ a definujme $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \cup \{\tau\}$. Potom

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \tau^*, \tau\}$$

je dělení intervalu $[a, \tau]$ a $\nu(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \nu(\boldsymbol{\sigma}) + 1$. Označme

$$\widetilde{\sigma}_j = \begin{cases} \sigma_j & \text{když } j \in \{1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\sigma})\}, \\ \tau & \text{když } j = \nu(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}). \end{cases}$$

Vzhledem k (4.17) a (4.19) máme

$$|f(t) - f(s)| < \varepsilon$$

pro všechna $t, s \in (\widetilde{\sigma}_{j-1}, \widetilde{\sigma}_j)$, $j = 1, 2, \dots, \nu(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}})$ a každou funkci $f \in \mathscr{M}$ tj.

$$\omega_{\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}}(f) < \varepsilon \quad \text{pro každou funkci } f \in \mathscr{M}.$$

Tudíž $\tau \in B$. To je ovšem, vzhledem k tomu, že je $\tau > \tau^*$, spor s definicí $\tau^* = \sup B$. Musí tedy být $\tau^* = b$. Dokázali jsme, že platí (4.17).

ii) Předpokládejme, že je splněna podmínka (4.17). Buď dáno $\eta > 0$. Položme $\varepsilon = \eta/2$ a nechť $\boldsymbol{\sigma}$ je příslušné dělení s vlastnostmi z podmínky (4.17).

Nechť $\tau \in (a, b]$. Pak existuje právě jeden index $j \in \{1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\sigma})\}$ takový, že $\tau \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j]$. Pro libovolná $t, s \in (\sigma_{j-1}, \tau)$ a každou funkci $f \in \mathscr{M}$ tedy máme

$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Limitním přechodem $s \to \tau-$ dostaneme, že platí

$$|f(\tau-) - f(t)| \le \varepsilon < \eta \quad \text{pro každé } t \in (\sigma_{j-1}, \tau).$$

Zvolíme-li $\delta = \tau - \sigma_{j-1}$, bude platit (4.15), kde píšeme η místo ε.

Analogicky, je-li $\tau \in [a,b)$, existuje právě jeden index $j \in \{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\}$ takový, že $\tau \in [\sigma_{j-1},\sigma_j)$. Pro libovolná $t,s \in (\tau,\sigma_j)$ a každou funkci $f \in \mathscr{M}$ je tudíž

$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Limitním přechodem $s \to \tau+$ dostaneme, že platí

$$|f(\tau+) - f(t)| \le \varepsilon < \eta \quad \text{pro každé } t \in (\tau,\sigma_j).$$

Zvolíme-li $\delta = \sigma_j - \tau$, bude platit (4.16), kde píšeme η místo ε.

Tím je dokončen důkaz lemmatu. $\square$

Důkaz věty 4.23.

a) Předpokládejme, že $\mathscr{M} \subset \mathbb{G}[a,b]$ je relativně kompaktní v $\mathbb{G}[a,b]$. Ukážeme, že potom je $\mathscr{M}$ stejně ohraničená a stejně regulovaná. Stejná ohraničenost funkcí z množiny $\mathscr{M}$ plyne z lemmatu 4.20. Zbývá tedy dokázat, že $\mathscr{M}$ je stejně regulovaná.

Buďte tedy dány $\varepsilon > 0$ a $\tau \in [a,b]$ a nechť $\mathscr{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ je $\varepsilon/3$–síť pro množinu $\mathscr{M}$ v $\mathbb{G}[a,b]$, tj.

$$\text{pro každou } f \in \mathscr{M} \text{ existuje } \widetilde{f} \in \mathscr{F} \text{ taková, že } \|f - \widetilde{f}\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.20}$$

Navíc, vzhledem k lemmatu 4.15, pro každou funkci f a funkci $\widetilde{f}$ k ní přiřazenou podle (4.20) platí také

$$\left.\begin{aligned} &|f(t-) - \widetilde{f}(t-)| \le \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{když } t \in (a,b] \\ \text{a}\quad & \\ &|f(t+) - \widetilde{f}(t+)| \le \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{když } t \in [a,b). \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

Funkce $f_k \in \mathscr{F}$ jsou regulované na $[a,b]$. Proto, je-li $\tau \in (a,b]$, pak pro každý index $k \in \{1,2,\dots,m\}$ existuje $\delta_k^1 \in (0,\tau - a)$ takové, že

$$|f_k(t) - f_k(\tau-)| < \varepsilon \quad \text{pro } t \in (\tau - \delta_k^1, \tau). \tag{4.22}$$

Podobně, je-li $\tau \in [a,b)$, pak pro každé $k \in \{1,2,\dots,m\}$ existuje $\delta_k^2 \in (0, b-\tau)$ takové, že

$$|f_k(t) - f_k(\tau+)| < \varepsilon \quad \text{pro } t \in (\tau, \tau + \delta_k^2). \tag{4.23}$$

Položme

$$\delta(\tau) = \begin{cases} \min\{\delta_k^i : i = 1,2,\ k = 1,2,\dots,m\} & \text{když } \tau \in (a,b), \\ \min\{\delta_k^1 : k = 1,2,\dots,m\} & \text{když } \tau = b, \\ \min\{\delta_k^2 : k = 1,2,\dots,m\} & \text{když } \tau = a. \end{cases}$$

Nechť $a \le \tau - \delta < t < \tau \le b$. Pak podle (4.20)–(4.23) nerovnosti

$$|f(t) - f(\tau-)| \le |f(t) - \widetilde{f}(t)| + |\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(\tau-)| + |\widetilde{f}(\tau-) - f(\tau-)| < \varepsilon,$$

platí pro libovolnou funkci $f \in \mathscr{M}$ a každou funkci $\widetilde{f}$ splňující (4.20).

Podobně dokážeme, že nerovnosti $|f(t) - f(\tau+)| < \varepsilon$ platí pro každou funkci $f \in \mathscr{M}$ a každou dvojici bodů t, τ takových, že $a \le \tau - \delta < t < \tau \le b$.

Množina $\mathscr{M}$ je tedy stejně regulovaná.

b) Předpokládejme, že $\mathscr{M}$ je stejně ohraničená a stejně regulovaná. Dokážeme, že potom je $\mathscr{M}$ je relativně kompaktní v $\mathbb{G}[a,b]$. Stačí ovšem dokázat, že $\mathscr{M}$ je totálně ohraničená, tj. pro každé kladné ε existuje v prostoru $\mathbb{G}[a,b]$ konečná ε–síť pro množinu $\mathscr{M}$.

Mějme libovolné $\varepsilon > 0$. Podle lemmatu 4.24 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$\omega_{\boldsymbol{\sigma}}(f) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{platí pro každou funkci } f \in \mathscr{M}.$$

Podle předpokladu existuje konstanta $c^* > 0$ taková, že $\|f\| \le c^*$ pro všechny $f \in \mathscr{M}$. Nechť $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ je dělení intervalu $[-c^*, c^*]$ takové, že $|\mathbf{z}| < \varepsilon/2$. Nyní, nechť $\mathscr{F}$ je množina všech funkcí $\widetilde{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, které jsou konstantní na každém z intervalů $(\sigma_{j-1}, \sigma_j), j=1,2,\dots,m$, přičemž všechny jejich hodnoty leží v množině $\mathbf{z}$. Počet prvků množiny $\mathscr{F}$ je zřejmě konečný. Ukážeme, že $\mathscr{F}$ tvoří ε–síť pro $\mathscr{M}$ v $\mathbb{G}[a,b]$. Nechť f je libovolná funkce z množiny $\mathscr{M}$. Potom, vzhledem k definici dělení $\mathbf{z}$, platí

$$\left.\begin{aligned} &\text{pro každé } j \in \{0,1,\dots,m\} \text{ existuje } k_j \in \{0,1,\dots,n\} \text{ takové, že} \\ &\qquad \big|f(\sigma_j) - z_{k_j}\big| < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}\right\}$$

a

$$\left.\begin{aligned} &\text{pro každé } j \in \{1,2,\dots,m\} \text{ existuje } \ell_j \in \{0,1,\dots,n\} \text{ takové, že} \\ &\qquad \Big|f\Big(\frac{\sigma_{j-1}+\sigma_j}{2}\Big) - z_{\ell_j}\Big| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}\right\}$$

Vzhledem k definici dělení $\boldsymbol{\sigma}$, máme dále

$$|f(t) - z_{\ell_j}| \le \Big|f(t) - f\Big(\frac{\sigma_{j-1}+\sigma_j}{2}\Big)\Big| + \Big|f\Big(\frac{\sigma_{j-1}+\sigma_j}{2}\Big) - z_{\ell_j}\Big| < \varepsilon$$

pro každé $j \in \{1,2,\dots,m\}$ a $t \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j)$. Definujeme-li tedy

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} z_{k_j} & \text{když } \ t = \sigma_j \quad \text{pro nějaké } j \in \{0,1,\dots,m\}, \\[1ex] z_{\ell_j} & \text{když } \ t \in (\sigma_{j-1}, \sigma_j) \quad \text{pro nějaké } j \in \{1,2,\dots,m\}, \end{cases}$$

bude platit $|f(t) - \widetilde{f}(t)| < \varepsilon$ pro každé $t \in [a,b]$, tj. bude $\|f - \widetilde{f}\| < \varepsilon$. Zřejmě je $\widetilde{f} \in \mathscr{F}$. Dokázali jsme tedy, že $\mathscr{F}$ je ε–síť pro $\mathscr{M}$ v $\mathbb{G}[a,b]$. Tím je také dokončen důkaz věty. □

Není bez zajimavosti, že, podmínka stejné regulovanosti umožňuje poněkud zeslabit podmínku stejné ohraničenosti.

4.25 Důsledek. *Podmnožina* $\mathscr{M}$ *prostoru* $\mathbb{G}[a,b]$ *regulovaných funkcí je relativně kompaktní v* $\mathbb{G}[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když je stejně regulovaná a při tom platí*

$$\text{pro každé } t\in[a,b] \text{ je množina } \{f(t): f\in\mathscr{M}\} \text{ ohraničená.} \tag{4.24}$$

D ů k a z . Je-li $\mathscr{M}$ relativně kompaktní, je podle Fraňkové věty 4.23 stejně regulovaná a stejně ohraničená. Tím spíše tedy platí (4.24). Zbývá dokázat obrácenou implikaci.

Předpokládejme, že $\mathscr{M}$ je stejně regulovaná a splňuje (4.24). Dokážeme, že potom už je množina $\mathscr{M}$ také stejně ohraničená. Podle lemmatu 4.24 můžeme zvolit dělení $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$|f(t)-f(s)|<1 \quad \text{pro } t,s\in(\sigma_{j-1},\sigma_j),\ j\in\{1,2,\dots,m\} \text{ a } f\in\mathscr{M}. \tag{4.25}$$

Podle předpokladu (4.24) existuji konečné konstanty

$$\gamma_j,\ j=0,1,\dots,m, \text{ a } \widetilde{\gamma}_j,\ j=1,2,\dots,m,$$

takové, že pro každou funkci $f\in\mathscr{M}$ platí

$$\left.\begin{aligned} &|f(\sigma_j)|\le\gamma_j \quad \text{pro } j=0,1,\dots,m\\ \text{a}\\ &\Big|f\big(\tfrac12(\sigma_{j-1}+\sigma_j)\big)\Big|\le\widetilde{\gamma}_j \quad \text{pro } j=1,2,\dots,m \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

Odtud a z (4.25) vyplývá, že platí

$$\left.\begin{aligned} &|f(t)|<\Big|f\big(\tfrac12(\sigma_{j-1}+\sigma_j)\big)\Big|+1\le\widetilde{\gamma}_j+1\\ &\quad\text{jestliže } t\in(\sigma_{j-1},\sigma_j),\ j\in\{1,2,\dots,m\} \text{ a } f\in\mathscr{M}. \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

Položme

$$\gamma^*=\max\{\gamma_j: j=0,1,\dots,m\},\quad \widetilde{\gamma}^*=\max\{\widetilde{\gamma}_j: j=1,2,\dots,m\}$$

a

$$c^*=\max\{\gamma^*,\widetilde{\gamma}^*\}+1.$$

Potom bude podle (4.26) a (4.27) platit $|f(t)|<c^*$ pro $t\in[a,b]$ a $f\in\mathscr{M}$.

Množina $\mathscr{M}$ je tedy stejně ohraničená a důkaz je hotov. □

Další zjednodušení kriteria pro relativní kompaktnost poskytuje následující užitečné tvrzení.

4.26 Důsledek. *Předpokládejme, že pro podmnožinu* $\mathscr{M}$ *prostoru* $\mathbb{G}[a,b]$ *regulovaných funkcí platí*

$$\text{množina } \{f(a): f\in\mathscr{M}\} \text{ je ohraničená} \tag{4.28}$$

a

$$\left.\begin{aligned} &\text{existuje funkce } h \text{ neklesající na } [a,b] \text{ a taková, že platí}\\ &\quad |f(t)-f(s)|\le|h(t)-h(s)| \quad \text{pro libovolná } t,s\in[a,b] \text{ a } f\in\mathscr{M}. \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

Potom je $\mathscr{M}$ *relativně kompaktní v* $\mathbb{G}[a,b]$.

D ů k a z. Podle (4.28) existuje $K \in [0, \infty)$ takové, že $|f(a)| \le K$ platí pro každou $f \in \mathscr{M}$. Pak ovšem podle (4.29) pro každé $x \in [a,b]$ a každé $f \in \mathscr{M}$ máme také

$$|f(x)| \le K + h(b) - h(a) < \infty\,.$$

Množina $\mathscr{M}$ je tedy stejně ohraničená.

Nyní, buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Pak, protože je zřejmě $h \in \mathbb{G}[a,b]$, existuje podle Hönigovy věty 4.7 dělení $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že je $\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(h) < \varepsilon$, t.j.

$$|h(t) - h(s)| < \varepsilon \text{ pro libovolná } t, s \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j) \text{ a pro každé } j \in \{1, 2, \ldots, m\}\,.$$

Vzhledem k (4.29) tedy pro každou funkci $f \in \mathscr{M}$ máme

$$|f(t) - f(s)| \le |h(t) - h(s)| < \varepsilon$$

jakmile $t, s \in (\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ pro nějaké $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, neboli $\omega_{\boldsymbol{\alpha}}(f) < \varepsilon$. Podle lemmatu 4.24 je tedy množina $\mathscr{M}$ stejně regulovaná a je tudíž podle Fraňkové věty 4.23 také relativně kompaktní v $\mathbb{G}[a,b]$. $\square$

4.27 Poznámka. Důsledek 4.26 nám poskytuje formálně jednoduché postačující podmínky pro relativní kompaktnost podmnožin prostoru $\mathbb{G}[a,b]$. Je přirozené se ptát zda tyto podmínky nejsou dokonce ekvivalentní s relativní kompaktností. Snadno ale ověříme, že splnění podmínky (4.29) má za následek, že pro každou funkci f z množiny $\mathscr{M}$ musí platit $\operatorname{var}_a^b f \le h(b) - h(a)$. Tudíž podmínky (4.28) a (4.29) se fakticky vztahují pouze na množiny obsahující pouze funkce s konečnou variací (a dokonce ohraničené v prostoru $\mathbb{BV}[a,b]$) a nemohou být tedy ekvivalentní s relativní kompaktností.

Další podrobnosti týkající se regulovaných funkcí lze najít zejména v monografii *Volterra Stieltjes-Integral Equations* [13, sec.3] Ch. Höniga. Užitečné speciální dodatky (např. charakterizace prekompaktních množin v prostoru $\mathbb{G}[a,b]$, zobecnění Hellyovy věty o výběru) jsou obsaženy také v práci D. Fraňkové [7].

Kapitola 5

Riemannův-Stieltjesův integrál

Odpověď na některé úlohy zmíněné v úvodní kapitole dává integrál Riemannův-Stieltjesův, který je přirozeným zobecněním známého integrálu Riemannova.

5.1 Definice a základní vlastnosti

Připomeňme (viz Úmluvy a označení (iii)), že množinu $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ bodů intervalu $[a,b]$ nazýváme *dělením intervalu* $[a,b]$, jestliže platí

$$a=\sigma_0<\sigma_1<\cdots<\sigma_m=b.$$

Množinu všech dělení intervalu $[a,b]$ značíme $\mathscr{D}[a,b]$,

$$|\boldsymbol{\sigma}|=\max_{j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})}(\sigma_j-\sigma_{j-1})$$

a $\nu(\boldsymbol{\sigma})$ je počet podintervalů generovaných dělením $\boldsymbol{\sigma}$ (zde $\nu(\boldsymbol{\sigma})=m$). Říkáme, že $\boldsymbol{\sigma}'$ je *zjemnění* $\boldsymbol{\sigma}$, jestliže $\boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}$.

5.1 Definice. Dvojici $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{D}[a,b]\times\mathbb{R}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}$ nazveme *značeným dělením* intervalu $[a,b]$, jestliže platí

$$\sigma_{j-1}\le\xi_j\le\sigma_j\quad\text{pro všechna } j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma}).$$

$\mathscr{T}[a,b]$ je množina všech značených dělení intervalu $[a,b]$. Říkáme také, že ξ_j je *značka* podintervalu $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$ a $\boldsymbol{\xi}$ je *vektor značek*.

Pro dané dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ značíme symbolem $\tau(\boldsymbol{\sigma})$ množinu všech $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}$ takových, že $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$.

Abychom zabránili záměně s elementy množin $\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\sigma},\dots$ či vektorů $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\dots,$ budeme posloupnosti dělení, resp. značených dělení zapisovat jako např. $\{\boldsymbol{\sigma}^n\}$, resp. $(\boldsymbol{\rho}^n,\boldsymbol{\eta}^n)$. Záměna s mocninami zde zajisté nehrozí.

5.2 Definice. Pro dané funkce $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ a značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi};[a,b]):=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})].$$

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme psát krátce $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi};[a,b])$, resp. $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ místo $S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi};[a,b])$.

5.3 Definice. Nechť $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$.
(i) Řekneme, že existuje *Riemannův-Stieltjesův* (δ)*-integrál* (krátce (δ)RS-integrál) funkce f vzhledem k funkci g

$$(\delta)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,] \quad \Big(\text{značíme též } (\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big)$$

a má hodnotu $I\in\mathbb{R}$, jestliže

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0:\\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]\ \text{ a }\ |\boldsymbol{\sigma}|<\delta\Big)\implies|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

(ii) Řekneme, že existuje *Riemannův- Stieltjesův* (σ)*-integrál* (krátce (σ)RS-integrál) funkce f vzhledem k funkci g

$$(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,] \quad \Big(\text{značíme též } (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big)$$

a má hodnotu $I\in\mathbb{R}$, jestliže

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]:\\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]\ \text{ a }\ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big)\implies|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{5.2}$$

(iii) Jestliže $c\in[a,b]$ a funkce $f,\ g$ jsou definovány v bodě $c,$ klademe

$$(\delta)\int_c^c f\,\mathrm{d}g\ =\ (\sigma)\int_c^c f\,\mathrm{d}g=0.$$

Existuje-li integrál $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g,$ pak definujeme $(\delta)\int_b^a f\,\mathrm{d}\,g\ =\ -(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a existuje-li integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g,$ definujeme $(\sigma)\int_b^a f\,\mathrm{d}\,g=-(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$

5.4 Poznámka. Pojem (δ)RS-integrálu odpovídá původní Stieltjesově definici, zatímco (σ)RS-integrál bývá někdy nazýván též *Mooreův-Pollardův* integrál.

Klasický Riemannův integrál je speciálním případem (δ)RS-integrálu, pokud $g(x)\equiv x$ pro $x\in[a,b].$

Vyskytne-li se v některých tvrzeních pojem RS-integrál bez rozlišení, zda se jedná o (δ)RS-integrál či o (σ)RS-integrál, bude to znamenat, že dané tvrzení platí pro oba pojmy. V takových a dalších případech, kdy nehrozí nedorozumění, také nepřipojujeme symboly (δ) či (σ) k symbolům integrálů. Funkce f v integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ se nazývá *integrand*, zatímco funkce g se nazývá *integrátor*.

5.5 Cvičení. Dokažte, že pro oba typy RS-integrálu platí:

(i) *je-li funkce* g *konstantní na* $[a,b]$, *pak* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = 0$ *pro libovolnou funkci* f *definovanou na* $[a,b]$,

(ii) *je-li funkce* f *konstantní na* $[a,b]$, *pak* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = f(a)\,[g(b)-g(a)]$ *pro libovolnou funkci* g *definovanou na* $[a,b]$.

Z definice 5.3 zřejmě plyne, že (δ)RS-integrál je speciálním případem (σ)RS-integrálu.

5.6 Věta. *Je-li* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I \in \mathbb{R}$, *pak platí také* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$.

D ů k a z. Pro každá dvě dělení $\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\sigma}'' \in \mathscr{D}[a,b]$ taková, že $\boldsymbol{\sigma}''$ je zjemnění $\boldsymbol{\sigma}'$, platí $|\boldsymbol{\sigma}''| \le |\boldsymbol{\sigma}'|$. Věta je tedy přímým důsledkem definice 5.3. □

5.7 Poznámka. Budiž dáno libovolné $\delta_0 > 0$. Potom v definici 5.1 (i) můžeme podmínku (5.1) nahradit následující trochu zeslabenou podmínkou

$$\left.\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in (0,\delta_0):\\ &\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \ \text{ a } \ |\boldsymbol{\sigma}| < \delta\Big) \implies |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon.\end{aligned}\right\} \tag{5.1'}$$

Podobně, je-li dáno $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathscr{D}[a,b]$, můžeme v definici 5.3 (ii) podmínku (5.2) nahradit podmínkou

$$\left.\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0\ \exists \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]:\\ &\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \supset \boldsymbol{\sigma}_0 \ \text{ a } \Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \text{ a } \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \implies |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon.\end{aligned}\right\} \tag{5.2'}$$

5.8 Cvičení. Rozmyslete si podrobně, proč platí tvrzení uvedená v poznámce 5.7.

5.9 Příklad. Nechť $a = -1,\ b = 1$ a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{když } x \le 0,\\ 1, & \text{když } x > 0\end{cases} \quad \text{a} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{když } x < 0,\\ 0, & \text{když } x \ge 0.\end{cases}$$

Položme $\boldsymbol{\sigma}_0 = \{-1,0,1\}$. Potom pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[-1,1]$, které je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}_0$ (a tedy $0 \in \boldsymbol{\sigma}$), a každé $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$ máme

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(\xi_k)\,[g(0) - g(\sigma_{k-1})] + f(\xi_{k+1})\,[g(\sigma_{k+1}) - g(0)] = 0,$$

kde $0 = \sigma_k,\ \xi_k \in [\sigma_{k-1}, 0],\ \xi_{k+1} \in [0, \sigma_{k+1}]$ a tedy

$$f(\xi_k) = 0 \quad \text{a} \quad g(\sigma_{k+1}) - g(0) = 0.$$

Vzhledem ke druhé části poznámky 5.7 vidíme, že $(\sigma)\displaystyle\int_{-1}^1 f\,\mathrm{d}\,g = 0$.

Na druhou stranu, pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[-1,1]$ takové, že $0\notin\boldsymbol{\sigma}$, tj. $\sigma_{k-1}<0<\sigma_k$ pro nějaké $k\in\mathbb{N}$, platí

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(\xi_k)\,[g(\sigma_k)-g(\sigma_{k-1})] = -f(\xi_k) = -\begin{cases} 0, & \text{když } \xi_k\le 0,\\ 1, & \text{když } \xi_k>0.\end{cases}$$

Odtud je zřejmé, že $(\delta)\displaystyle\int_{-1}^{1} f\,\mathrm{d}\,g$ nemůže existovat.

Následující dvě lemmata platí pro oba typy RS-integrálů a jsou přímými důsledky definice 5.3.

5.10 Lemma. (i) *Jestliže existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, *pak platí*

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\right| \le \|f\|\operatorname{var}_a^b g.$$

(ii) *Jestliže navíc* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^x g\big]$, *pak platí*

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^x g\big] \le \|f\|\operatorname{var}_a^b g.$$

5.11 Poznámka. Uvidíme později (viz důsledek 5.42), že je-li f ohraničená na $[a,b]$, pak pro oba typy RS-integrálů platí, že z existence integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ už plyne, že také integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^x g\big]$ existuje.

5.12 Lemma. *Nechť* $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a nechť existují integrály:*

$$\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g,\ \int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g,\ \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_1 \ \ \textit{a}\ \ \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_2.$$

Potom pro libovolná $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ *platí*

$$\int_a^b (c_1\,f_1+c_2\,f_2)\,\mathrm{d}\,g = c_1\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g + c_2\int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\,c_1\,g_1+c_2\,g_2] = c_1\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_1 + c_2\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_2.$$

□

5.13 Cvičení. (i) Dokažte lemmata 5.10 a 5.12.

Dokažte, že následující tvrzení platí pro oba typy RS-integrálů:

(ii) *Jestliže* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je taková, že existuje integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, *pak*

$$\Big(\inf_{x\in[a,b]} f(x)\Big)\,[g(b)-g(a)] \le \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \le \Big(\sup_{x\in[a,b]} f(x)\Big)\,[g(b)-g(a)].$$

(iii) *Definice 5.3 je korektní v tom smyslu, že určuje hodnotu integrálu jednoznačně. Jinak řečeno, jestliže* $I_1\in\mathbb{R}$ *a* $I_2\in\mathbb{R}$ *splňují* (5.1) $($*s* I_1, *resp.* I_2 *na místě* $I)$, *pak musí být* $I_1=I_2$ $($*a podobně pro* (5.2)$)$.

Oba pojmy RS-integrálu představují jakési zobecněné limity posloupnosti integrálních součtů $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ vzhledem k značeným dělením. Nepřekvapí tedy, že platí následující tvrzení analogická klasické Bolzanově- Cauchyově podmínce.

5.14 Věta (BOLZANOVA-CAUCHYOVA PODMÍNKA)**.**
Pro dané funkce $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *existuje* $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *právě tehdy, když je splněna následující podmínka*

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon>0:\\ &\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})\in\mathscr{T}[a,b],\ |\boldsymbol{\sigma}|<\delta_\varepsilon\ \ a\ \ |\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}|<\delta_\varepsilon\Big)\\ &\qquad\Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})|<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{5.3}$$

Podobně integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje právě tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]:\\ &\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})\in\mathscr{T}[a,b],\ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\ \ a\ \ \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big)\\ &\qquad\Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})|<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{5.4}$$

D ů k a z . Nutnost splnění uvedených podmínek pro existenci příslušných integrálů je zřejmá z definice 5.3.

Dokážeme, že podmínka (5.4) zaručuje existenci integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Nechť tedy platí (5.4). Potom existuje posloupnost $\{(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)\}$ značených dělení intervalu $[a,b]$ taková, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)|<\frac{1}{k}\quad\text{pro každé } \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}^k\ \text{ a }\ \boldsymbol{\xi}\in\tau(\boldsymbol{\sigma})\tag{5.5}$$

a přitom současně

$$\boldsymbol{\sigma}^k\subset\boldsymbol{\sigma}^\ell\ \text{ a }\ |S(\boldsymbol{\sigma}^k,\boldsymbol{\xi}^k)-S(\boldsymbol{\sigma}^\ell,\boldsymbol{\xi}^\ell)|<\frac{1}{k}\quad\text{pro každé } k\in\mathbb{N}\ \text{ a }\ \ell\ge k.\tag{5.6}$$

Posloupnost $\{S(\boldsymbol{\sigma}^k, \boldsymbol{\xi}^k)\}$ je cauchyovská posloupnost reálných čísel a existuje tedy reálné číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^k, \boldsymbol{\xi}^k) = I.$$

Nyní, nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme k_ε tak, aby bylo současně

$$\frac{1}{k_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}^{k_\varepsilon}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.7}$$

Potom, díky (5.5) a (5.7), odvodíme, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| \le |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}^{k_\varepsilon})| + |S(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}, \boldsymbol{\xi}^{k_\varepsilon}) - I| < \varepsilon$$

platí pro každé $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}$ a $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$. To znamená, že $I = (\sigma)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$.

Podobně bychom dokázali, že podmínka (5.3) implikuje existenci integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$.
□

5.15 Cvičení. (i) Dokažte větu 5.14 pro (δ)RS-integrály.

(ii) Dokažte, že podmínky (5.3), resp. (5.4) jsou ekvivalentní s podmínkami :

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0 : \\ &\quad \Big((\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}'), (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[a,b],\ |\boldsymbol{\sigma}'| < \delta_\varepsilon,\ \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}'\Big) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'')| < \varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{5.3'}$$

resp.

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] : \\ &\quad \Big((\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}'), (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[a,b],\ \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow\ |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'')| < \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{5.4'}$$

(Návod: nechť $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\rho}$, pak $\boldsymbol{\sigma}' \in \mathscr{D}[a,b]$, $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\rho}$ a

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\big| \le \big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')\big| + \big|S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})\big|$$

pro libovolná $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$, $\boldsymbol{\eta} \in \tau(\boldsymbol{\rho})$ a $\boldsymbol{\xi}' \in \tau(\boldsymbol{\sigma}')$.)

Následující věta je přímým důsledkem věty 5.14. Platí ve stejném znění pro oba typy RS-integrálů.

5.16 Věta. *Jestliže existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a jestliže* $[c,d] \subset [a,b]$, *pak existuje také integrál* $\displaystyle\int_c^d f \,\mathrm{d}\, g$.

D ů k a z . Předpokládejme, že integrál $(\sigma)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ existuje. Podle věty 5.14 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')| < \varepsilon \tag{5.8}$$

platí pro všechna značená dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,b]$ taková, že $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Vzhledem k tvrzení obsaženém v poznámce 5.7, můžeme předpokládat, že $\{c,d\} \subset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a můžeme tedy rozložit $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ tak, že bude

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \boldsymbol{\rho}^- \cup \boldsymbol{\rho}_\varepsilon \cup \boldsymbol{\rho}^+, \text{ kde } \boldsymbol{\rho}^- \in \mathscr{D}[a,c],\ \boldsymbol{\rho}_\varepsilon \in \mathscr{D}[c,d],\ \boldsymbol{\rho}^+ \in \mathscr{D}[d,b].$$

Nyní, nechť $\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}' \in \mathscr{D}[c,d]$, $\boldsymbol{\rho} \supset \boldsymbol{\rho}_\varepsilon$, $\boldsymbol{\rho}' \supset \boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ a $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}), (\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}') \in \mathscr{T}[c,d]$. Definujme

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\rho}^- \cup \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\rho}^+,\ \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\eta}^-,\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}^+) \text{ a } \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\rho}^- \cup \boldsymbol{\rho}' \cup \boldsymbol{\rho}^+,\ \boldsymbol{\xi}' = (\boldsymbol{\eta}^-,\boldsymbol{\eta}',\boldsymbol{\eta}^+),$$

kde $\boldsymbol{\eta}^-,\boldsymbol{\eta}^+$ jsou takové vektory, že $(\boldsymbol{\rho}^-,\boldsymbol{\eta}^-) \in \mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\rho}^+,\boldsymbol{\eta}^+) \in \mathscr{T}[d,b]$. Zřejmě je $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,b]$, $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$,

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\rho}^-,\boldsymbol{\eta}^-) + S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) + S(\boldsymbol{\rho}^+,\boldsymbol{\eta}^+)$$

a

$$S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') = S(\boldsymbol{\rho}^-,\boldsymbol{\eta}^-) + S(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}') + S(\boldsymbol{\rho}^+,\boldsymbol{\eta}^+).$$

Podle (5.8) tedy máme $|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) - S(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')| = |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')| < \varepsilon$ a odtud podle věty 5.14 plyne existence integrálu $(\sigma)\int_c^d f \, \mathrm{d}\, g$. Důkaz tvrzení věty pro (δ)RS-integrál se provede analogicky a je ponechán čtenáři jako cvičení. □

5.17 Cvičení. Dokažte větu 5.16 pro (δ)RS-integrály.

Také následující tvrzení platí ve stejné podobě pro oba typy RS-integrálu.

5.18 Věta. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ *a* $c \in [a,b]$, *pak existují také integrály* $\int_a^c f \, \mathrm{d}\, g$ *a* $\int_c^b f \, \mathrm{d}\, g$ *a platí* $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = \int_a^c f \, \mathrm{d}\, g + \int_c^b f \, \mathrm{d}\, g.$

D ů k a z . Je-li $c = a$ nebo $c = b$, je tvrzení věty triviální. Nechť je tedy $c \in (a,b)$. Dále předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$. Potom existence integrálů $(\sigma)\int_a^c f \, \mathrm{d}\, g$ a $(\sigma)\int_c^b f \, \mathrm{d}\, g$ je zaručena větou 5.16.

Nechť $\varepsilon > 0$. Zvolme značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\left.\begin{aligned} &\Big|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') - \int_a^c f \, \mathrm{d}\, g\Big| + \Big|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') - \int_c^b f \, \mathrm{d}\, g\Big| \\ &\qquad\qquad + \Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g\Big| < \varepsilon, \\ &\text{kde } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}'' \in \mathscr{D}[a,b] \text{ a } \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi}'') \in \tau(\boldsymbol{\sigma}). \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Zřejmě platí $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') + S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')$. Tudíž

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - \int_a^c f \,\mathrm{d}\, g - \int_c^b f \,\mathrm{d}\, g\right| \\
&\quad \le \left|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\right| + \left|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') - S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')\right| \\
&\qquad + \left|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') - \int_a^c f \,\mathrm{d}\, g\right| + \left|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') - \int_c^b f \,\mathrm{d}\, g\right| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, důkaz je dokončen. □

5.19 Cvičení. Rozmyslete si, proč z existence integrálů

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g, \quad \int_a^c f \,\mathrm{d}\, g, \quad \int_c^b f \,\mathrm{d}\, g$$

plyne existence značených dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c,b]$ takových, že platí (5.9).

Implikace obrácená ke tvrzení věty 5.18 se pro (σ) RS-integrál dokáže snadno.

5.20 Věta. *Jestliže $c \in [a,b]$ a jestliže existují integrály*

$$I_1 = (\sigma)\int_a^c f \,\mathrm{d}\, g \quad a \quad I_2 = (\sigma)\int_c^b f \,\mathrm{d}\, g,$$

pak existuje také integrál $I = (\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ a platí $I = I_1 + I_2$.

Důkaz. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,c]$ a $\boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon \in \mathscr{D}[c,b]$ tak, aby platilo

$$\left|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') - I_1\right| < \varepsilon \ \text{ pro } \ (\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,c] \ \text{ takové, že } \ \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon,$$

a

$$\left|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') - I_2\right| < \varepsilon \ \text{ pro } \ (\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c,b] \ \text{ takové, že } \ \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon.$$

Nyní, nechť $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon \cup \boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon$. Protože $c \in \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ splňující $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ můžeme rozdělit

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}'' \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\xi}'')$$

tak, že bude platit

$$(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,c], \ (\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c,b], \ \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\sigma}'' \supset \boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon.$$

Navíc $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') + S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'')$. Vzhledem k definici $\boldsymbol{\sigma}'_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\sigma}''_\varepsilon$, tedy pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$, kde $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, máme

$$\left|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - (I_1 + I_2)\right| \le \left|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') - I_1\right| + \left|S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') - I_2\right| < 2\,\varepsilon,$$

tj. dokázali jsme tvrzení věty. □

5.21 Poznámka. Aby mohlo platit analogické tvrzení také pro (δ)RS-integrál, je třeba přidat předpoklad o pseudoaditivitě funkcí f, g v bodě c, viz cvičení 5.34.

Pro existenci (δ)RS-integrálu máme také následující přirozenou a lépe ověřitelnou nutnou a postačující podmínku.

5.22 Věta. *Pro dané funkce* f, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje právě tehdy, když pro každou posloupnost* $\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b]$ *značených dělení intervalu* $[a,b]$ *takovou, že* $\lim\limits_{n\to\infty}|\boldsymbol{\sigma}^n|=0$, *má posloupnost* $\{S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}$ *konečnou limitu.*

D ů k a z . Nutnost uvedené podmínky je zřejmá. Zbývá dokázat její postačitelnost.

Předpokládejme tedy, že limita $\lim\limits_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)$ existuje (a je konečná) pro každou posloupnost $\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b]$ takovou, že $\lim\limits_{n\to\infty}|\boldsymbol{\sigma}^n|=0$.

Nechť existují dvě posloupnosti značených dělení

$$\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b] \quad \text{a} \quad \{(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b]$$

takové, že $\lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{\sigma}^n|=\lim_{n\to\infty}|\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n|=0$ a

$$\lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)=I\in\mathbb{R} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^n)=\widetilde{I}\in\mathbb{R}.$$

Sestavme nyní novou posloupnost

$$\{S(\boldsymbol{\rho}^n,\boldsymbol{\eta}^n)\}=\Big\{S(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\xi}^1),S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^1,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^1),S(\boldsymbol{\sigma}^2,\boldsymbol{\xi}^2),S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^2,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^2),\dots\Big\}$$

Podle našeho předpokladu má také posloupnost $\big\{S(\boldsymbol{\rho}^n,\boldsymbol{\eta}^n)\big\}$ konečnou limitu $J\in\mathbb{R}$, a protože obsahuje obě posloupnosti

$$\{S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\} \text{ a } \{S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^n,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^n)\},$$

musí platit $I=\widetilde{I}=J$. To znamená, že hodnota limity

$$I=\lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)$$

nezávisí na volbě posloupnosti $\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}$ značených dělení intervalu $[a,b]$, pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty}|\boldsymbol{\sigma}^n|=0$.

Nyní, nechť $\{(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\}\subset\mathscr{T}[a,b]$ je libovolná posloupnost taková, že

$$\lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{\sigma}^n|=0, \qquad \lim_{n\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)=I\in\mathbb{R},$$

a nechť

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\neq I\,.$$

Pak existuje $\widetilde{\varepsilon} > 0$ takové, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ lze najít $(\boldsymbol{\sigma}^{n_k}, \boldsymbol{\xi}^{n_k}) \in \mathscr{T}[a,b]$, pro něž platí $|\boldsymbol{\sigma}^{n_k}| < 1/k$ a $|S(\boldsymbol{\sigma}^{n_k}, \boldsymbol{\xi}^{n_k}) - I| > \widetilde{\varepsilon}$. Našli jsme podposloupnost

$$\{(\boldsymbol{\sigma}^{n_k}, \boldsymbol{\xi}^{n_k}) : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathscr{T}[a,b]$$

posloupnosti $\{(\boldsymbol{\sigma}^n, \boldsymbol{\xi}^n)\}$ takovou, že $\lim\limits_{k\to\infty} |\boldsymbol{\sigma}^{n_k}| = 0$ a přitom neplatí $\lim\limits_{k\to\infty} S(\boldsymbol{\sigma}^{n_k}, \boldsymbol{\xi}^{n_k}) = I$. To je ale spor s naším předpokladem. Platí tedy $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$. Důkaz věty je dokončen. □

Nyní naznačíme, jakou roli hrají v teorii Stieltjesova integrálu ohraničené funkce. Následující tvrzení platí pro oba typy RS-integrálů.

5.23 Věta. *Nechť existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. *Potom je buďto* g *konstantní na* $[a,b]$, *nebo je* f *ohraničená na množině* $[a,b]\setminus A$, *kde* A *značí sjednocení všech podintervalů* $[a,b]$ *otevřených v* $[a,b]$, *na kterých je funkce* g *konstantní.* [1]

D ů k a z . Podle věty 5.6 stačí dokázat tvrzení věty pro (σ) integrál.

Nechť g není konstantní na $[a,b]$ a f není ohraničená na $B = [a,b]\setminus A$. Pak je množina B neprázdná a existuje posloupnost $\{x_n\} \subset B$ taková, že

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \infty.$$

Nechť x^* je libovolný hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}$ v intervalu $[a,b]$. Předpokládejme, že $x^* \in (a,b]$. Potom alespoň jedna z množin $\{x_n\} \cap [a, x^*)$ nebo $\{x_n\} \cap (x^*, b]$ (je-li $x^* < b$) musí mít nekonečně mnoho prvků. Nechť je to například množina $\{x_n\} \cap [a, x^*)$. Potom můžeme z posloupnosti $\{x_n\}$ vybrat rostoucí podposloupnost $\{x_{n_k}\} \subset [a, x^*)$ takovou, že platí $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$ a $\lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = \infty$. Speciálně pro každé $K > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\big|f(x_{n_p})\big| > K \quad \text{pro každé } p \geq k_0. \tag{5.10}$$

Na druhou stranu, podle vět 5.14 a 5.16 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}^*$ intervalu $[a, x^*]$ takové, že je

$$\big|S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\big| < 1 \tag{5.11}$$

pro všechna značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})$ intervalu $[a, x^*]$ taková, že $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}^*$ a $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma}^*$. Nechť $\boldsymbol{\sigma}^* = \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_m\}$.

Protože $\{x_{n_k}\} \cap A = \emptyset$ a $x_{n_k} \in (\tau_{m-1}, x^*)$ pro všechna k dostatečně velká, není g konstantní na (τ_{m-1}, x^*). Existuje tedy bod $t^* \in (\tau_{m-1}, x^*)$ takový, že je $g(t^*) \neq g(x^*)$.

Nyní, nechť $\sigma_j = \tau_j$ pro $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $\sigma_m = t^*$, $\sigma_{m+1} = x^*$ a

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{m+1}\}.$$

[1] Otevřeným podintervalem v $[a,b]$ zde rozumíme také celý interval $[a,b]$ a intervaly tvaru $[a,c)$, $(d,b]$, kde $c \in (a,b]$ a $d \in [a,b)$ mohou být libovolné.

Potom $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,x^*]$ a $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}^*$. Dále nechť $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{m+1})$ je libovolný vektor značek takový, že $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,x^*]$ a nechť $k_0\in\mathbb{N}$ je takové, že platí (5.10) pro

$$K=|f(\xi_{m+1})|+\frac{1}{|g(x^*)-g(t^*)|}.$$

Konečně, zvolme $p\ge k_0$ tak, aby $x_{n_p}\in(t^*,x^*)$, a položme

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{\sigma},\ \widetilde{\xi}_{m+1}=x_{n_p}\quad\text{a}\quad\widetilde{\boldsymbol{\xi}}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m,\widetilde{\xi}_{m+1})\,.$$

Potom $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})\in\mathscr{T}[a,x^*]$ a $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}\supset\boldsymbol{\sigma}^*$.

Pro takto konstruovaná rozšířená dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})$ intervalu $[a,x^*]$ platí

$$\begin{aligned}\big|S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})-S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| &= |f(\xi_{m+1})-f(x_{n_p})|\,|g(x^*)-g(t^*)|\\ &\ge \big(|f(x_{n_p}|-|f(\xi_{m+1})|\big)\,|g(x^*)-g(t^*)|\\ &> \big(K-|f(\xi_{m+1})|\big)\,|g(x^*)-g(t^*)|=1,\end{aligned}$$

což je ve sporu s (5.11).

Podobně bychom dovedli ke sporu předpoklad, že f není ohraničená na B, i v případech, kdy množina $\{x_n\}\cap[a,x^*)$ má konečně mnoho prvků nebo $x^*=a$. $\square$

5.24 Poznámka. (i) Nechť $f\in\mathbb{G}[a,b]$, $x_0\in(a,b)$, $c,\ d\in\mathbb{R}$ a

$$g(x)=\begin{cases}c & \text{když } x\in[a,x_0),\\ (c+d)/2 & \text{když } x=x_0,\\ d & \text{když } x\in(x_0,d].\end{cases}$$

Dále nechť $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ má jednostranné limity $f(x_0-),f(x_0+)\in\mathbb{R}$.

Pro $n\in\mathbb{N}$ uvažujme posloupnost dělení $\{\boldsymbol{\sigma}^n\}$ intervalu $[a,b]$ takových, že $|\boldsymbol{\sigma}^n|\to 0$, přičemž pro každé $n\in\mathbb{N}$ existuje k_n, pro které platí $\sigma^n_{k_n-1}<x_0<\sigma^n_{k_n}$. Dále nechť vektory značek $\boldsymbol{\theta}^n$, $\boldsymbol{\eta}^n$ a $\boldsymbol{\zeta}^n$ jsou takové, že pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\theta}^n),\ (\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\eta}^n),\ (\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\zeta}^n)\in\mathscr{T}[a,b],\\ &\theta^n_{k_n}=x_0,\ \sigma^n_{k_n-1}\le\eta^n_{k_n}<x_0\quad\text{a}\quad x_0<\zeta^n_{k_n}\le\sigma^n_k.\end{aligned}$$

Potom dostaneme

$$S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\theta}^n)=f(x_0)\,(d-c),\ S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\eta}^n)=f(\eta^n_{k_n})\,(d-c)\quad\text{a}\quad S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\zeta}^n)=f(\zeta^n_{k_n})\,(d-c)$$

pro každé $n\in\mathbb{N}$. Tudíž

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\theta}^n)=f(x_0)\,(d-c),\qquad \lim_{n\to\infty}S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\eta}^n)=f(x_0-)\,(d-c),\\ &\lim_{n\to\infty}S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\zeta}^n))=f(x_0+)\,(d-c).\end{aligned}$$

Odtud plyne, že k tomu, aby každá posloupnost $S(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)$ taková, že

$$(\boldsymbol{\sigma}^n,\boldsymbol{\xi}^n)\in\mathscr{T}[a,b] \quad \text{a} \quad |\boldsymbol{\sigma}^n|\to 0,$$

konvergovala pro $n\to\infty$ k nějaké konečné (a jednoznačně určené) hodnotě $I,$ je nutné, aby platilo

$$\text{buď} \quad g(x_0-)=c=g(x_0)=d=g(x_0+), \quad \text{nebo} \quad f(x_0-)=f(x_0)=f(x_0+).$$

Vzhledem k větě 5.22 lze tedy očekávat, že pro existenci integrálu $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ bude nutné, aby funkce f a g neměly žádný společný bod nespojitosti.

(ii) Nyní, nechť $\boldsymbol{\sigma}_0\in\mathscr{D}[a,b]$ je libovolné dělení obsahující $x_0.$ Pro každé jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma}$ potom existuje $k=k(\boldsymbol{\sigma})$ takové, že $x_0=\sigma_k.$ Máme

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} (f(\xi_{k-1})+f(\xi_k)\,\dfrac{d-c}{2}, & \text{jestliže } \xi_{k-1}<x_0<\xi_k,\\ (f(x_0)+f(\xi_k))\,\dfrac{d-c}{2}, & \text{jestliže } \xi_{k-1}=x_0<\xi_k,\\ (f(\xi_{k-1})+f(x_0))\,\dfrac{d-c}{2}, & \text{jestliže } \xi_{k-1}<x_0=\xi_k,\\ f(x_0)\,(d-c), & \text{jestliže } \xi_{k-1}=x_0=\xi_k. \end{cases}$$

Bude-li tedy funkce f regulovaná na $[a,b],$ bude množina $\mathcal{Q}$ hromadných bodů množiny $\{S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}):(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}\,[a,b] \text{ a } \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_0\}$ nejvýše čtyřbodová :

$$\mathcal{Q}=\Big\{(f(x_0-)+f(x_0+))\,\frac{d-c}{2},\ (f(x_0)+f(x_0+))\,\frac{d-c}{2},\\ (f(x_0-)+f(x_0))\,\frac{d-c}{2},\ 2\,f(x_0)\,\frac{d-c}{2}\Big\},$$

kde $\frac{d-c}{2}=\Delta^+g(x_0)=\Delta^-g(x_0).$ Pro existenci integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ je ovšem nutné, aby se množina $\mathcal{Q}$ redukovala na jednobodovou množinu. Snadno nahlédneme, že toto nastane právě tehdy, když pro funkce f a g bude platit současně

$$\Delta^+f(x_0)\,\Delta^+g(x_0)=0 \quad \text{a} \quad \Delta^-f(x_0)\,\Delta^-g(x_0)=0.$$

5.2 Podmínka pseudoaditivity a její důsledky

Podrobněji vyjasnit vzájemný vztah mezi (δ)RS a (σ)RS-integrálem umožní pojem *pseudoaditivity*.

5.25 Definice. Řekneme, že funkce f, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ splňují v bodě $x\in(a,b)$ podmínku pseudoaditivity, jestliže

$$\left.\begin{aligned}&\text{pro každé } \varepsilon>0 \text{ existuje } \delta_\varepsilon>0 \text{ takové, že je-li}\\ &\delta',\delta''\in(0,\delta_\varepsilon),\ \xi\in[x-\delta',x+\delta''],\ \xi'\in[x-\delta',x] \text{ a } \xi''\in[x,x+\delta''],\\ &\text{pak platí}\\ &\big|f(\xi)\,[g(x+\delta'')-g(x-\delta')]-f(\xi')\,[g(x)-g(x-\delta')]\\ &\qquad\qquad\qquad -f(\xi'')\,[g(x+\delta'')-g(x)]\big|<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{PA}$$

5.26 Poznámka. Použití podmínky (PA) může být někdy pohodlnější, pokud ji přeformulujeme do následující ekvivalentní podoby:

$$\left.\begin{aligned}&\text{pro každé } \varepsilon>0 \text{ existuje } \delta_\varepsilon>0 \text{ takové, že je-li}\\ &x'\in(x-\delta_\varepsilon,x),\ x''\in(x,x+\delta_\varepsilon),\ \xi\in[x',x''],\ \xi'\in[x',x] \text{ a } \xi''\in[x,x''],\\ &\text{pak platí}\\ &\big|f(\xi)\,[g(x'')-g(x')]-f(\xi')\,[g(x)-g(x')]-f(\xi'')\,[g(x'')-g(x)]\big|<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{PA'}$$

5.27 Příklad. Nechť

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{když } x\le 0,\\ 1, & \text{když } x>0\end{cases}\quad\text{a}\quad g(x)=\begin{cases}1, & \text{když } x\le 0,\\ 0, & \text{když } x>0\end{cases}$$

a $x'<0<x''$, $\xi\in[x',x'']$, $\xi'\in[x',0]$ a $\xi''\in[0,x'']$. Potom

$$\begin{aligned}&\big|f(\xi)\,[g(x'')-g(x')]-f(\xi')\,[g(0)-g(x')]-f(\xi'')\,[g(x'')-g(0)]\big|\\ &\qquad=\big|f(\xi)-f(\xi'')\big|=1\end{aligned}$$

vždy, když bude $\xi\le 0$ a $\xi''>0$. Vidíme, že funkce f, g nesplňují podmínku (PA) v bodě 0.

5.28 Lemma. *Jestliže funkce f, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ splňují v bodě $x\in(a,b)$ podmínku pseudoaditivity, pak alespoň jedna z funkcí f, g je v bodě x spojitá.*

Na druhou stranu, je-li jedna z funkcí f, g spojitá v bodě x a druhá je ohraničená na jeho okolí, pak funkce f, g splňují podmínku pseudoaditivity v bodě x.

D ů k a z . a) Nechť f, g splňují podmínku (PA') pseudoaditivity v bodě x. Dosadíme-li $\xi=\xi'$, dostaneme

$$\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon>0:\\ &\qquad\Big(x'\in(x-\delta_\varepsilon,x),\ x''\in(x,x+\delta_\varepsilon),\ \xi'\in[x',x],\ \xi''\in[x,x'']\Big)\\ &\qquad\qquad\qquad\implies \big|f(\xi')-f(\xi'')\big|\,\big|g(x'')-g(x)\big|<\varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud je zřejmé, že není-li funkce g v bodě x spojitá zprava, musí být v bodě x spojitá funkce f. Podobně, položíme-li v (PA') $\xi=\xi''$, dokážeme, že není-li g spojitá zleva v x, musí být f spojitá v x.

b) Nechť

$$x \in (a,b),\ x' \in [a,x),\ x'' \in (x,b],\ \xi \in [x',x''],\ \xi' \in [x',x] \quad \text{a} \quad \xi'' \in [x,x''].$$

Potom

$$\begin{aligned}
&\big|f(\xi)\,[g(x'') - g(x')] - f(\xi')\,[g(x) - g(x')] - f(\xi'')\,[g(x'') - g(x)]\big| \\
&\quad = \big|\big(f(\xi) - f(\xi')\big)\,\big(g(x) - g(x')\big) - \big(f(\xi'') - f(\xi)\big)\,\big(g(x'') - g(x)\big)\big| \\
&\quad \le \big|f(\xi) - f(\xi')\big|\,\big|g(x) - g(x')\big| + \big|f(\xi'') - f(\xi)\big|\,\big|g(x'') - g(x)\big| \\
&\quad \le \big(|f(\xi) - f(x)| + |f(x) - f(\xi')|\big)\,\big|g(x) - g(x')\big| \\
&\qquad\quad + \big(|f(\xi'') - f(x)| + |f(x) - f(\xi)|\big)\,\big|g(x'') - g(x)\big|.
\end{aligned}$$

Odtud už plyne, že platí i druhé tvrzení lemmatu. □

5.29 Lemma. *Nechť* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a nechť existuje integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. *Potom dvojice* $f,\ g$ *splňuje v každém bodě* $x \in (a,b)$ *podmínku pseudoaditivity.*

D ů k a z. Předpokládejme, že integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ existuje a přitom v nějakém bodě $x \in (a,b)$ neplatí (PA’). To znamená, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ lze najít body

$$x' \in (x-\delta, x),\ x'' \in (x, x+\delta),\ \eta \in [x',x''],\ \eta' \in [x',x] \quad \text{a} \quad \eta'' \in [x,x'']$$

takové, že

$$\big|f(\eta)\,[g(x'') - g(x')] - f(\eta')\,[g(x) - g(x')] - f(\eta'')\,[g(x'') - g(x)]\big| \ge \varepsilon. \tag{5.12}$$

Buď dáno libovolné $\delta > 0$. Nechť $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{D}[a,b]$ je takové, že $\nu(\boldsymbol{\sigma}) = m$, $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta$ a pro nějaké $k \in \{1,2,\dots,m\}$ je $\sigma_{k-1} = x' < x < x'' = \sigma_k$ a $\xi_k = \eta$. Definujme $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} \cup \{x\}$ a $\widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\xi_1,\dots,\xi_{k-1},\eta',\eta'',\xi_{k+1},\dots,\xi_m)$. Podle (5.12) máme

$$\begin{aligned}
&|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}})| \\
&\quad = \big|f(\xi_k)\,[g(\sigma_k) - g(\sigma_{k-1})] \\
&\qquad\qquad - f(\eta')\,[g(x) - g(\sigma_{k-1})] - f(\eta'')\,[g(\sigma_k) - g(x)]\big| \\
&\quad = \big|f(\eta)[g(x'') - g(x')] - f(\eta')\,[g(x) - g(x')] - f(\eta'')[g(x'') - g(x)]\big| \ge \varepsilon.
\end{aligned}$$

To znamená, že není splněna podmínka (5.3’), a tudíž podle věty 5.14 a cvičení 5.15 (ii) neexistuje integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. □

Následující tvrzení je důsledkem věty 5.14 a lemmat 5.28 a 5.29.

5.30 Věta. *Nechť* $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a nechť existuje integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. *Potom v každém bodě* $x\in(a,b)$ *je alespoň jedna z funkcí* $f,\ g$ *spojitá.*

Víme, že (δ)RS-integrál je speciálním případem (σ)RS-integrálu (viz větu 5.6). Na druhou stranu, jak ukáže následující věta, pojem pseudoaditivity nám poskytuje možnost objasnit i vztah mezi těmito integrály v opačném směru.

5.31 Věta. *Nechť* $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$. *Pak integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje právě tehdy, když existuje integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a funkce* $f,\ g$ *splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě* $x\in(a,b)$.

D ů k a z. Předpokládejme nejprve, že existuje $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Podle věty 5.6 potom existuje i $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a má stejnou hodnotu. Dále podle lemmatu 5.29 musí funkce $f,\ g$ splňovat podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x\in(a,b)$. Stačí tedy dokázat, že když existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a funkce $f,\ g$ splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x\in(a,b)$, pak existuje i integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$.

Předpokládejme tedy, že integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I$ existuje a že funkce $f,\ g$ splňují podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x\in(a,b)$. Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a nechť dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon=\{s_0,s_1,\dots,s_r\}\in\mathscr{D}[a,b]$ je takové, že $r\ge 2$ a platí

$$|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-I|<\varepsilon,\quad \text{jakmile } \boldsymbol{\rho}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \text{ a } \boldsymbol{\eta}\in\tau(\boldsymbol{\rho}). \tag{5.13}$$

Označme

$$\delta_*:=\min\{s_i-s_{i-1}:\ i=1,2,\dots,r\}. \tag{5.14}$$

Protože funkce $f,\ g$ splňují podmínku pseudoaditivity na (a,b), nutně existuje $\delta_\varepsilon\in(0,\delta_*)$ takové, že pro každé $i=1,2,\dots,r-1$ platí

$$\left.\begin{aligned}&\Big|f(\xi)\,[g(s_i'')-g(s_i')]\\&\qquad-f(\xi')\,[g(s_i)-g(s_i')]-f(\xi'')\,[g(s_i'')-g(s_i)]\Big|<\frac{\varepsilon}{r-1}\\ \text{pro}\\&\qquad s_i'\in(s_i-\delta_\varepsilon,s_i),\ \ s_i''\in(s_i,s_i+\delta_\varepsilon),\\&\qquad \xi\in[s_i',s_i''],\ \ \xi'\in[s_i',s_i],\ \ \xi''\in[s_i,s_i''].\end{aligned}\right\} \tag{5.15}$$

Nechť $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$, $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ a $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta_\varepsilon$.

Podle (5.14) je pro každé $j \in \{1,2,\dots,m\}$ množina $(\sigma_{j-1},\sigma_j)\cap\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ buď jednobodová, nebo prázdná. Nechť

U_1 je množina těch $j \in \{1,2,\dots,m\}$, pro která $(\sigma_{j-1},\sigma_j)\cap\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon=\emptyset$,
$U_2=\{1,2,\dots,m\}\setminus U_1$.

Potom pro každé $j\in U_2$ existuje právě jedno $i(j)\in\{1,2,\dots,r-1\}$ takové, že

$$s_{i(j)}\in(\sigma_{j-1},\sigma_j)\,.$$

Počet prvků množiny U_2 tedy není větší než $r-1$.

Položme nyní $\boldsymbol{\rho}=\boldsymbol{\sigma}\cup\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Potom

$$|\boldsymbol{\rho}|<\delta_\varepsilon<\delta_* \tag{5.16}$$

a pro každé $j\in U_1$ existuje právě jedno $k(j)\in\{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})\}$ takové, že

$$[\rho_{k(j)-1},\rho_{k(j)}]=[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]. \tag{5.17}$$

Pokud $j\in U_2$, pak existuje právě jedno $\ell(j)\in\{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})-1\}$ takové, že

$$\rho_{\ell(j)-1}=\sigma_{j-1},\;\;\rho_{\ell(j)}=s_{i(j)},\;\;\rho_{\ell(j)+1}=\sigma_j. \tag{5.18}$$

Zvolme vektor $\boldsymbol{\eta}$ tak, aby bylo $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{T}[a,b]$ a

$$\eta_{k(j)}=\xi_j,\quad \text{když}\;\; j\in U_1, \tag{5.19}$$

a porovnejme integrální součty $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ a $S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$. Máme

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=\sum_{j\in U_1}f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]+\sum_{j\in U_2}f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})].$$

Nechť $V_1=\{k(j):j\in U_1\}$ a $V_2=\{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})\}\setminus V_1$. Pak podle (5.17)–(5.19)

$$\begin{aligned}
S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})&=\sum_{k\in V_1}f(\eta_k)\,[g(\rho_k)-g(\rho_{k-1})]+\sum_{k\in V_2}f(\eta_k)\,[g(\rho_k)-g(\rho_{k-1})]\\
&=\sum_{j\in U_1}f(\eta_{k(j)})\,[g(\rho_{k(j)})-g(\rho_{k(j)-1})]+\sum_{k\in V_2}f(\eta_k)\,[g(\rho_k)-g(\rho_{k-1})]\\
&=\sum_{j\in U_1}f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\\
&\quad+\sum_{j\in U_2}\big[f(\eta_{\ell(j)})[g(\rho_{\ell(j)})-g(\rho_{\ell(j)-1})]+f(\eta_{\ell(j)+1})\,[g(\rho_{\ell(j)+1})-g(\rho_{\ell(j)})]\big]\\
&=\sum_{j\in U_1}f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\\
&\quad+\sum_{j\in U_2}\big[f(\eta_{\ell(j)})\,[g(s_{i(j)})-g(\sigma_{j-1})]+f(\eta_{\ell(j)+1})\,[g(\sigma_j)-g(s_{i(j)})]\big].
\end{aligned}$$

Tudíž

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) = \sum_{j\in U_2} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]$$
$$-\sum_{j\in U_2}\Big[f(\eta_{\ell(j)})[g(s_{i(j)})-g(\sigma_{j-1})]+f(\eta_{\ell(j)+1})[g(\sigma_j)-g(s_{i(j)})]\Big],$$

tj. $\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\big| \le \sum_{j\in U_2} \big|W_j\big|,$ kde

$$W_j = f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]$$
$$- f(\eta_{\ell(j)})\,[g(s_{i(j)}) - g(\sigma_{j-1})] - f(\eta_{\ell(j)+1})\,[g(\sigma_j) - g(s_{i(j)})].$$

Připomeňme, že vzhledem k (5.16) a (5.18) máme

$$[\sigma_{j-1},\sigma_j\,] \subset (s_{i(j)} - \delta_\varepsilon, s_{i(j)} + \delta_\varepsilon),\;\; \xi_j \in [\sigma_{j-1},\sigma_j],$$
$$\eta_{\ell(j)} \in [\sigma_{j-1}, s_{i(j)}],\;\;\; \eta_{\ell(j)+1} \in [s_{i(j)},\sigma_j].$$

Podle (5.15) je tedy $|W_j| < \dfrac{\varepsilon}{r-1}$ pro každé $j \in U_2,$ a tudíž (také díky tomu, že počet elementů množiny U_2 není větší než $r-1$) dostáváme, že

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\big| \le \sum_{j\in U_2}\big|W_j\big| < \varepsilon.$$

Konečně, vzhledem k (5.13) a vzhledem k definici $\boldsymbol{\rho}$, platí

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I\big| \le \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\big| + \big|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) - I\big| < 2\,\varepsilon.$$

Dokázali jsme tedy, že $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I.$ □

5.32 Důsledek. *Nechť* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I \in \mathbb{R}$ *a nechť v každém bodě intervalu* (a,b) *je alespoň jedna z funkcí* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *spojitá a druhá je ohraničená na jeho okolí. Potom je také* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I.$

D ů k a z . Podle lemmatu 5.28 splňují funkce $f,\ g$ podmínku pseudoaditivity v každém bodě $x \in (a,b),$ a tudíž podle věty 5.31 existuje také $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a platí

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$$ □

5.33 Poznámka. Speciálně jestliže $g(x) \equiv x$ a f je ohraničená na $[a,b]$ (tj. pro Riemannův integrál), jsou definice integrálů $(\delta)\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ekvivalentní.

5.34 Cvičení. Dokažte tvrzení*:*

Nechť $c\in[a,b]$, $(\delta)\displaystyle\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g=I_1\in\mathbb{R}$ *a* $(\delta)\displaystyle\int_c^b f\,\mathrm{d}\,g=I_2\in\mathbb{R}$ *a nechť* f, g *splňují podmínku pseudoaditivity v* c. *Potom integrál* $I=(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje a platí* $I=I_1+I_2$.

(Návod: využijte věty 5.20 a 5.31.)

5.3 Absolutní integrovatelnost

Nyní uvedeme další potřebný pomocný pojem.

5.35 Definice. Nechť $-\infty<c<d<\infty$ a $f,\ g:[c,d]\to\mathbb{R}$. Potom definujeme

$$\mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d]=\big\{|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')|:(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}),(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')\in\mathscr{T}[c,d]\big\}$$

a

$$\omega\,(S_{f\Delta g};[c,d])=\sup\,\mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d].$$

Platí následující modifikace Bolzanových-Cauchyových podmínek.

5.36 Věta. *Nechť* $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Potom:*

(i) *Integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon>0:\\&\Big(\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\ \textit{a}\ |\boldsymbol{\sigma}|<\delta_\varepsilon\Big)\implies\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega\,(S_{f\Delta g};[\sigma_{j-1},\sigma_j])<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{5.20}$$

(ii) *Integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\in\mathscr{D}[a,b]:\\&\Big(\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\ \textit{a}\ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon\Big)\implies\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega\,(S_{f\Delta g};[\sigma_{j-1},\sigma_j])<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{5.21}$$

D ů k a z . a) Ukážeme, že podmínka (5.20) je ekvivalentní s Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou pro existenci (δ) RS-integrálu.

α) Předpokládejme, že platí (5.3). Nechť $\widetilde{\varepsilon}>0$ je dáno, $\varepsilon=\widetilde{\varepsilon}/2$ a nechť δ_ε je určeno podmínkou (5.3). Mějme dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta_\varepsilon$. Označme $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$ a pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ vyberme značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)$, $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)\in\mathscr{T}[\sigma_{j-1},\sigma_j]$ tak, aby platilo

$$\omega\,(S_{f\Delta g},[\sigma_{j-1},\sigma_j])<S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)-S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j,\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)+\frac{\varepsilon}{m}.\tag{5.22}$$

Definujme

$$\boldsymbol{\rho} = \bigcup_{j=1}^{m} \boldsymbol{\sigma}^j, \quad \widetilde{\boldsymbol{\rho}} = \bigcup_{j=1}^{m} \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \quad \boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \dots, \boldsymbol{\xi}^m) \quad \text{a} \quad \widetilde{\boldsymbol{\eta}} = (\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^1, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^2, \dots, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^m).$$

Potom

$$(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{T}[a,b], \ (\widetilde{\boldsymbol{\rho}}, \widetilde{\boldsymbol{\eta}}) \in \mathscr{T}[a,b], \ |\boldsymbol{\rho}| < \delta_\varepsilon \ \text{ a } \ |\widetilde{\boldsymbol{\rho}}| < \delta_\varepsilon.$$

Tudíž podle (5.3) a (5.22) dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} \omega\,(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]) &< \sum_{j=1}^{m} \Big[S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j) - S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j) + \frac{\varepsilon}{m}\Big] \\ &= S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\rho}}, \widetilde{\boldsymbol{\eta}}) + \varepsilon < 2\,\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Protože $\widetilde{\varepsilon} > 0$ mohlo být libovolné, plyne odtud, že podmínka (5.20) je splněna.

β) Pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že platí (5.20). Dokážeme, že potom je splněna podmínka (5.3').

Mějme $\varepsilon > 0$. Nechť δ_ε je určeno podmínkou (5.20) a značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$, $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})$ intervalu $[a,b]$ jsou taková, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta_\varepsilon$ a $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma}$. Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Pak pro každé $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ existuje $(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j) \in \mathscr{T}[\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]$ takové, že

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \bigcup_{j=1}^{m} \boldsymbol{\sigma}^j, \quad \widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\boldsymbol{\xi}^1, \boldsymbol{\xi}^2, \dots, \boldsymbol{\xi}^m).$$

Díky předpokladu (5.20) a s přihlédnutím k (5.35) dostaneme

$$\begin{aligned} &|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})| \\ &\qquad \le \sum_{j=1}^{m} \big| f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^j, \boldsymbol{\xi}^j) \big| \\ &\qquad \le \sum_{j=1}^{m} \omega\,(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Platí tedy (5.3').

b) Analogicky by se dokázala ekvivalence podmínky (5.21) s Bolzanovou-Cauchyovou podmínkou pro existenci (σ) RS-integrálu. Podrobný důkaz je ponechán čtenáři jako cvičení. □

5.37 Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.36 pro (σ) RS-integrály.

5.38 Lemma. *Nechť* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a* $[c,d] \subset [a,b]$. *Potom*

$$\omega_{[c,d]}(f)\,|g(d) - g(c)| \le \omega\,(S_{f\Delta g}; [c,d\,]) \le \omega_{[c,d]}(f)\,\operatorname{var}_c^d g. \tag{5.23}$$

D ů k a z . a) Nechť $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}=\{c,d\}$, $\xi,\eta\in[c,d]$ a $\boldsymbol{\xi}=(\xi),\boldsymbol{\eta}=(\eta)$. Potom

$$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{T}[c,d] \quad\text{a}\quad |f(\xi)-f(\eta)|\,|g(d)-g(c)|\in\mathfrak{S}_{f\Delta g}([c,d])$$

a tudíž

$$\omega_{[c,d]}(f)\,|g(d)-g(c)|\le\sup\,\mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d]=\omega\,(S_{f\Delta g};[c,d]).$$

b) Na druhou stranu, jestliže $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}),(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\theta})\in\mathscr{T}[c,d]$ a položíme-li $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\rho}\cup\boldsymbol{\tau}$, bude $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[c,d]$ a

$$\big|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\theta})\big|=\Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\big(f(\eta_j')-f(\theta_j')\big)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\Big|,$$

kde $\eta_j'=\eta_k$ když $[\sigma_{j-1},\sigma_j]\subset[\rho_{k-1},\rho_k]$ a $\theta\,'_j=\theta_k$ když $[\sigma_{j-1},\sigma_j]\subset[\tau_{k-1},\tau_k]$. Odtud dostáváme dále

$$\begin{aligned}\big|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\theta})\big|&\le\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\big|f(\eta_j')-f(\theta_j')\big|\,\big|g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big|\\&\le\omega_{[c,d]}(f)\,V(g,\boldsymbol{\sigma})\le\omega_{[c,d]}(f)\,\mathrm{var}_c^d\,g,\end{aligned}$$

neboli

$$\omega\,(S_{f\Delta g};[c,d])=\sup\,\mathfrak{S}_{f\Delta g}[c,d]\le\omega_{[c,d]}(f)\,\mathrm{var}_c^d\,g.$$

Dokázali jsme platnost nerovností (5.23). □

5.39 Poznámka. Je-li $\mathrm{var}_c^d\,g=\infty$, pak je ovšem druhá z nerovností v (5.23) triviální.

Následující tvrzení poskytuje další nutné a postačující podmínky pro existenci obou typů RS-integrálů.

5.40 Věta. *Nechť* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a* $v(x)=\mathrm{var}_a^x\,g$ *pro* $x\in[a,b]$. *Potom:*

(i) *Integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když existuje integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}v$.

(ii) *Je-li* f *ohraničená na* $[a,b]$, *pak integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když existuje integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$.

D ů k a z . a) Pro každý interval $[c,d]\subset[a,b]$ máme $\mathrm{var}_c^d\,v=v(d)-v(c)$. Tudíž podle lemmatu 5.38 musí platit

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,\big[v(\sigma_j)-v(\sigma_{j-1})\big]=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\omega\,(S_{f\Delta v};[\sigma_{j-1},\sigma_j])$$

pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$. Podle lemmatu 5.38 tedy dále dostáváme

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,g};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]) \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\ \mathrm{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\, g$$
$$= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,\big[v(\sigma_j)-v(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,v};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]).$$

Nerovnost

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,g};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]) \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,v};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,])$$

tedy platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$. Pomocí věty 5.36 nyní už snadno dokážeme, že z existence integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$ plyne existence integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ (a to pro oba typy RS-integrálu).

b) Předpokládejme, že existuje integrál $\displaystyle(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$ Dokážeme, že pak existuje také integrál $\displaystyle(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v.$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle věty 5.36 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\Delta\,g};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]) < \varepsilon \tag{5.24}$$

platí pro každé jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Zřejmě můžeme též předpokládat, že také

$$0 \le \mathrm{var}_a^b\, g - V(g,\boldsymbol{\sigma}) < \varepsilon \tag{5.25}$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ takové, že $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. (Zdůvodněte!)

Nechť $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Potom podle lemmatu 5.38 máme

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,v};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]) \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\ \mathrm{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\, g$$

a dále, podle (5.24), (5.25) a lemmatu 5.38

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{f\,\Delta\,v};[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]) \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big]$$
$$+ \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,\Big(\mathrm{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\, g - [g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\Big)$$
$$< \varepsilon + \omega_{[a,b]}(f)\,\Big(\mathrm{var}_a^b\, g - V(g,\boldsymbol{\sigma})\Big) < \varepsilon\,(1+\omega_{[a,b]}(f)).$$

Podle věty 5.36 můžeme tedy uzavřít, že existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$.

c) Zbývá dokázat, že je-li f ohraničená na $[a,b]$, pak z existence integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\mathrm{d}g$ plyne, že existuje také integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v \in \mathbb{R}$.

Nechť je tedy f ohraničená na $[a,b]$ a nechť existuje integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Potom podle vět 5.6 a 5.30 existuje $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a funkce f, g nemají společný bod nespojitosti v (a,b). Dále, podle lemmatu 2.24 také funkce f, v nemají společný bod nespojitosti v (a,b). Konečně, protože podle části b) tohoto důkazu existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$, existence integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v$ plyne z důsledku 5.32. (Protože $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, jsou funkce g i v ohraničené na $[a,b]$.) □

5.41 Věta. *Nechť* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. *Potom existuje také integrál* $\displaystyle\int_a^b |f|\,\mathrm{d}\,g$.

D ů k a z . Podle věty 2.14 a lemmatu 5.12 se můžeme omezit na případ, že g je neklesající na $[a,b]$. Potom je $\operatorname{var}_c^d g = g(d) - g(c)$ pro libovolná $c, d \in [a,b]$ taková, že $c \leq d$. Podle lemmatu 5.38 tedy pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ platí

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big]$$

a

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{|f|\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(|f|)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big].$$

Na druhou stranu, zřejmě

$$\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leq |f(x) - f(y)| \quad \text{pro libovolná } x, y \in [a,b].$$

Máme tedy $\omega_{[c,d]}(|f|) \leq \omega_{[c,d]}(f)$ pro libovolný interval $[c,d] \subset [a,b]$. Tudíž

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{|f|\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(|f|)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big]\\ &\leq \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right).\end{aligned}$$

Tvrzení věty nyní už plyne okamžitě z věty 5.36. □

Přímým důsledkem lemmatu 5.10 a vět 5.40 a 5.41 je následující tvrzení.

5.42 Důsledek. *Nechť* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a nechť* $v(x) = \operatorname{var}_a^x g$ *pro* $x \in [a,b]$. *Potom:*

(i) *Jestliže existuje integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$, *pak existuje také* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, v$ *a platí*

$$\left|(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\right| \le (\sigma)\int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, v \le \|f\| \operatorname{var}_a^b g.$$

(ii) *Jestliže existuje integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a funkce* f *je ohraničená na* $[a,b]$, *pak existuje také integrál* $(\delta)\displaystyle\int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, v$ *a platí*

$$\left|(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\right| \le (\delta)\int_a^b |f| \,\mathrm{d}\, v \le \|f\| \operatorname{var}_a^b g.$$

□

5.4 Substituce

Všechna tvrzení tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS-integrálu. Začneme dalším důsledkem definice 5.35.

5.43 Lemma. *Jestliže existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a* $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ *je libovolné značené dělení intervalu* $[a,b]$, *pak platí*

$$\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\right| \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\left(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j]\right). \tag{5.26}$$

D ů k a z . Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Nezávisle na tom, o jaký typ RS-integrálu se jedná, můžeme zvolit značené dělení $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathscr{T}[a,b]$ tak, aby bylo $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma}$ a

$$\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})\right| < \varepsilon.$$

Protože $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}$, můžeme ho rozdělit tak, že bude

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \bigcup_{j=1}^{m} \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \quad \text{kde } \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j \in \mathscr{D}[\sigma_{j-1}, \sigma_m] \text{ pro } j = 1, 2, \dots, m.$$

Podobně $\widetilde{\boldsymbol{\xi}} = (\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^1, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^2, \dots, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)$, kde $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j$ jsou reálné vektory takové, že

$$(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j) \in \mathscr{T}\,[\sigma_{j-1}, \sigma_j\,] \ \text{ pro } j = 1, 2, \dots, m.$$

Máme tedy

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\Big| \\
&\qquad \le \Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})\Big| + \Big|S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\Big| \\
&\qquad < \varepsilon + \sum_{j=1}^m \big|f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}^j, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}^j)\big| \\
&\qquad < \varepsilon + \sum_{j=1}^m \omega\,(S_{f\Delta g}; [\sigma_{j-1}, \sigma_j\,]).
\end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí (5.26). □

5.44 Důsledek. *Jestliže integrál* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *existuje a* $[c,d] \subset [a,b]$, *pak pro každé* $\xi \in [c,d]$ *platí*

$$\Big|\int_c^d f \,\mathrm{d}\, g - f(\xi)\,[g(d) - g(c)]\Big| \le \omega\,(S_{f\Delta g}; [c,d\,]).$$

Následující speciální forma věty o substituci je také důsledkem lemmatu 5.43.

5.45 Věta (SUBSTITUCE)**.** *Nechť* $f,\ g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$, *přičemž* f *je ohraničená na intervalu* $[a,b]$ *a integrál* $\displaystyle\int_a^b g \,\mathrm{d}\, h$ *existuje. Potom jeden z integrálů*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g \,\mathrm{d}\, h\Big] \quad \textit{a} \quad \int_a^b f\, g \,\mathrm{d}\, h$$

existuje (má konečnou hodnotu) právě tehdy, když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x g \,\mathrm{d}\, h\Big] = \int_a^b f\, g \,\mathrm{d}\, h. \tag{5.27}$$

D ů k a z . Nejprve si všimněme, že z existence integrálu $\displaystyle\int_a^b g \,\mathrm{d}\, h$ plyne, že funkce

$$w : x \in [a,b] \to w(x) = \int_a^x g \,\mathrm{d}\, h$$

je definována na celém intervalu $[a,b]$ a má konečné hodnoty pro každé $x \in [a,b]$ (viz větu 5.16). Pro libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ máme

$$
\begin{aligned}
&|S_{fg\Delta h}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta w}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| \\
&\quad = \Big| \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\, g(\xi_j)\, [h(\sigma_j) - h(\sigma_{j-1})] - \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\, [w(\sigma_j) - w(\sigma_{j-1})] \Big| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\xi_j)| \Big| g(\xi_j)\, [h(\sigma_j) - h(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g \,\mathrm{d}\, h \Big| \\
&\quad \le \|f\| \left(\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| g(\xi_j)\, [h(\sigma_j) - h(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g \,\mathrm{d}\, h \Big| \right).
\end{aligned}
$$

Podle důsledku 5.44 dostáváme dále

$$
\big|S_{fg\Delta h}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta w}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| \le \|f\| \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega\,(S_{g\Delta h}; [\sigma_{j-1},\sigma_j\,]).
$$

Odtud podle věty 5.36 už plyne relace (5.27). (Přesvědčte se, že důkaz opravdu umíte dokončit.) □

Položíme-li ve větě 5.45 $h(t) \equiv t$, dostaneme následující tvrzení.

5.46 Důsledek. Je-li f ohraničená na $[a,b]$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$ a $p(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, pak jeden z integrálů

$$
\int_a^b f \,\mathrm{d}\, p \quad \text{a} \quad \int_a^b f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x
$$

existuje právě tehdy, když existuje i ten druhý. V takovém případě pak platí

$$
\int_a^b f \,\mathrm{d}\, p = \int_a^b f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x.
$$

5.47 Věta. *Předpokládejme, že funkce ϕ je na $[\alpha,\beta]$ ryze monotónní a spojitá a zobrazuje interval $[\alpha,\beta]$ na interval $[a,b]$. Potom pro libovolné $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí:*

$$
\textit{existuje-li} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,[g(x)], \ \textit{existuje také} \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}\,[g(\phi(x))]
$$

a

$$
\pm \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}\,[g(\phi(x))] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,[g(x)], \tag{5.28}
$$

kde „+“ platí, je-li ϕ rostoucí a „-“ platí, je-li ϕ klesající.

D ů k a z. Předpokládejme například, že ϕ je klesající. Potom $b{=}\phi(\alpha)$ a $a{=}\phi(\beta)$. Pro dané značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[\alpha,\beta]$ položme

$$\rho_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-j}=\phi(\sigma_j) \quad \text{a} \quad \eta_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-j}=\phi(\xi_j) \quad \text{pro } j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma}).$$

Potom $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$, $\boldsymbol{\rho}=\{\rho_0,\rho_1,\dots,\rho_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$, $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{\nu(\boldsymbol{\sigma})})$ je značené dělení intervalu $[a,b]$. Píšeme $\boldsymbol{\rho}=\phi(\boldsymbol{\sigma})$ a $\boldsymbol{\eta}=\phi(\boldsymbol{\xi})$. Zřejmě, je-li $\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\sigma}'$, pak je také $\phi(\boldsymbol{\sigma})\supset\phi(\boldsymbol{\sigma}')$. Podobně, protože ϕ je stejnoměrně spojitá na $[\alpha,\beta]$, platí $|\phi(\boldsymbol{\sigma})|\to 0$, jakmile $|\boldsymbol{\sigma}|\to 0$. Navíc

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\phi(\xi_j))\,\big[g(\phi(\sigma_j))-g(\phi(\sigma_{j-1})\big] = -\sum_{i=1}^{\nu(\boldsymbol{\rho})} f(\eta_j)\,\big[g(\rho_j)-g(\rho_{j-1})\big]$$

platí pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[\alpha,\beta]$. Teď už zajisté každý čtenář, který pozorně prostudoval většinu důkazů této kapitoly, samostatně dokončí důkaz rovnosti (5.28) pro oba integrály (včetně případu, že ϕ je nerostoucí). □

Další variantou věty o substituci je následující věta. Její důkaz můžeme ponechat čtenáři jako cvičení.

5.48 Věta. *Nechť funkce* $\phi:[a,b]\to[\phi(a),\phi(b)]$ *je rostoucí a spojitá na* $[a,b]$, *funkce* $\psi:[\phi(a),\phi(b)]\to[a,b]$ *je inverzní k* ϕ *a nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Pak existuje-li jeden z integrálů*

$$(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x, \quad (\sigma)\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\psi(x))\,\mathrm{d}\,[\psi(x)],$$

existuje i ten druhý a platí rovnost

$$(\sigma)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x=(\sigma)\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(\psi(x))\,\mathrm{d}\,[\psi(x)].$$

5.49 Cvičení. Dokažte větu 5.48. Zformulujte a dokažte analogické tvrzení pro (δ)RS-integrály.

5.5 Integrace per-partes

Následující tvrzení je zobecněním věty o integraci per-partes pro Riemannův integrál. Platí ve stejném znění pro oba typy RS-integrálu.

5.50 Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES)**.** *Existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g, \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f,$$

existuje i druhý a platí

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g + \int_a^b g \,\mathrm{d}\, f = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a). \tag{5.29}$$

D ů k a z . a) Buď dáno libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$. Položme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Přeorganizováním členů v součtu $S_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ dostaneme

$$\begin{aligned} S_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) &= f(\xi_1)\,[g(\sigma_1) - g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\sigma_2) - g(\sigma_1)] \\ &\qquad + \cdots + f(\xi_m)\,[g(b) - g(\sigma_{m-1})] \\ &= -f(a)\, g(a) - [f(\xi_1) - f(a)]\, g(a) - [f(\xi_2) - f(\sigma_1)]\, g(\sigma_1) \\ &\quad -[f(\sigma_1) - f(\xi_1)]\, g(\sigma_1) - \cdots - [f(\xi_m) - f(\sigma_{m-1})]\, g(\sigma_{m-1}) \\ &\quad -[f(\sigma_{m-1}) - f(\xi_{m-1})]\, g(\sigma_{m-1}) \\ &\quad -[f(b) - f(\xi_m)]\, g(b) + f(b)\, g(b) \\ &= f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \end{aligned}$$

neboli

$$S_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}'), \tag{5.30}$$

kde

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}' &= \{a, \xi_1, \sigma_1, \xi_2, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m-1},\ \xi_m,\ b\}, \\ \boldsymbol{\xi}' &= (a, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m-1}, \sigma_{m-1}, b), \end{aligned}$$

$(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma}'$ je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}$. (Stane-li se, že $\xi_j = \sigma_{j-1}$, resp. $\xi_j = \sigma_j$ pro nějaké j, musíme ovšem tyto body ξ_j v $\boldsymbol{\sigma}'$ a jim odpovídající body v $\boldsymbol{\xi}'$ vynechat.)

b) Předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b g \,\mathrm{d}\, f$.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ tak, aby pro každé jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma}'$ a všechna příslušná značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}\,[a,b]$ platilo

$$\left| S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - (\sigma)\int_a^b g \,\mathrm{d}\, f \right| < \varepsilon.$$

Podle (5.30) pro každé $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a příslušné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ platí

$$\begin{aligned} S_{f\Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - f(b)\, g(b) + f(a)\, g(a) + (\sigma)\int_a^b g \,\mathrm{d}\, f& \\ = (\sigma)\int_a^b g \,\mathrm{d}\, f - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')&, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, a tudíž

$$\Big|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - f(b)\,g(b) + f(a)\,g(a) + (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f\Big| \\ = \Big|(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f - S_{g\Delta f}(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\Big| < \varepsilon.$$

Odtud plyne existence integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a relace (5.29). To, že z existence integrálu $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ plyne existence integrálu $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$ a platí rovnost (5.29), by se dokazovalo analogicky.

c) Tvrzení věty pro (δ)RS-integrály plyne ze vztahu (5.30) podobně jako v druhé části důkazu pro (σ)RS-integrály a detailní důkaz můžeme nechat čtenáři jako cvičení. □

5.51 Cvičení. Dokažte větu 5.50 pro (δ)RS-integrály.

5.6 Stejnoměrná konvergence a existence integrálu

Až na větu 5.55 a cvičení 5.56 všechna tvrzení tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS-integrálu.

5.52 Věta. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, f *je ohraničená na* $[a,b]$ *a nechť posloupnost funkcí* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *je taková, že integrál* $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0. \tag{5.31}$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g = \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g. \tag{5.32}$$

D ů k a z . a) Jestliže je $\operatorname{var}_a^b g = 0$, pak podle lemmatu 2.13 musí být g konstantní na $[a,b]$ a tvrzení věty je evidentní. Předpokládejme tedy, že $\operatorname{var}_a^b g > 0$.

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k předpokladu (5.31) můžeme zvolit $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$n \ge n_\varepsilon \implies \Big(\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{var}_a^b g}\Big) \text{ a } \Big(\|f_n\| < \|f\| + 1\Big). \tag{5.33}$$

Dále za našich předpokladů je podle lemmatu 5.10 (i)

$$\Big|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g\Big| \le \|f_n\| \operatorname{var}_a^b g \le (\|f\| + 1) \operatorname{var}_a^b g$$

pro $n \geq n_\varepsilon$. Můžeme tedy vybrat rostoucí posloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a $I \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}\, g = I.$$

Speciálně existuje $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon \quad \text{a} \quad \left| \int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}\, g - I \right| < \varepsilon. \tag{5.34}$$

Dále nechť $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ je takové dělení intervalu $[a, b]$, že

$$\Big((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, b] \ \text{ a } \ \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \Big) \implies \left| S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \, \mathrm{d}\, g \right| < \varepsilon. \tag{5.35}$$

Protože je $n_{k_\varepsilon} \geq n_\varepsilon$ (viz (5.34)), plyne z (5.33), že pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$, kde $\boldsymbol{\sigma}$ je zjemněním $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, platí

$$\left| S_{f \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \right| \leq \| f - f_{n_{k_\varepsilon}} \| \operatorname{var}_a^b g < \varepsilon.$$

Vzhledem k (5.34)–(5.35) tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \left| S_{f \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I \right| \leq \left| S_{f \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \right| & \\ + \left| S_{f_{n_{k_\varepsilon}} \Delta\, g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \, \mathrm{d}\, g \right| + \left| \int_a^b f_{n_{k_\varepsilon}} \, \mathrm{d}\, g - I \right| &< 3\, \varepsilon \end{aligned}$$

pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$, kde $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$. Odtud okamžitě plyne, že platí

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = I.$$

Konečně, protože podle lemmat 5.10 a 5.12 máme

$$\left| \int_a^b f_n \, \mathrm{d}\, g - \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g \right| \leq \| f_n - f \| \, (\operatorname{var}_a^b g),$$

rovnost (5.32) nyní plyne z předpokladu (5.31). Důkaz byl proveden pro (σ)RS-integrál.

b) Důkaz pro (δ)RS-integrály je analogický a ponecháváme ho jako cvičení. □

5.53 Cvičení. Dokažte tvrzení věty 5.52 pro (δ)RS-integrály.

5.54 Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{C}[a, b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a, b]$. *Potom existují oba integrály*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g \quad \textit{a} \quad \int_a^b g \, \mathrm{d}\, f.$$

D ů k a z. Vzhledem ke větám 2.14, 5.6 a 5.50 a lemmatu 5.12 stačí dokázat existenci integrálu $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ pro případ, že g je neklesající na $[a,b]$.

Nechť je tedy f spojitá na $[a,b]$, g neklesající na $[a,b]$ a $\varepsilon > 0$ je dáno.

Je-li $g(b)=g(a)$, pak g je nutně konstantní na $[a,b]$, a tudíž $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme tedy předpokládat, že $g(b)-g(a)>0$. Dále využijeme toho, že každá funkce spojitá na kompaktním intervalu je na tomto intervalu také stejnoměrně spojitá. Existuje tedy $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$\left.\begin{array}{l} |f(x)-f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \\ \qquad\text{pro všechna } x,y\in[a,b] \text{ taková, že } |x-y|<\delta_\varepsilon. \end{array}\right\} \tag{5.36}$$

Mějme dvě značená dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a,b]$ taková, že $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}$. Ukážeme, že platí $|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')|<\varepsilon$. Podle věty 5.14 to už bude znamenat, že existuje $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. (Viz také cvičení 5.15 (ii).)

Nechť $\nu(\boldsymbol{\sigma})=m$. Označme prvky dělení $\boldsymbol{\sigma}'$ a složky vektoru $\boldsymbol{\xi}'$ tak, že bude

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}' &= \left\{\sigma_0,\sigma_1^1,\ldots,\sigma_{n_1-1}^1,\sigma_1,\sigma_1^2,\ldots,\sigma_{m-1},\sigma_1^m,\ldots,\sigma_{n_m-1}^m,\sigma_m\right\},\\ \boldsymbol{\xi}' &= \left(\xi_1^1,\quad\ldots,\quad\xi_{n_1}^1,\xi_1^2,\quad\ldots,\quad\xi_1^m,\quad\ldots,\quad\xi_{n_m}^m\right).\end{aligned}$$

Potom

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})] = \sum_{j=1}^m f(\xi_j)\sum_{i=1}^{n_j}[g(\sigma_i^j)-g(\sigma_{i-1}^j)]$$

a

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')| \le \sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^{n_j}|f(\xi_j)-f(\xi_i^j)|\,[g(\sigma_i^j)-g(\sigma_{i-1}^j)],$$

kde klademe $\sigma_0^j=\sigma_{j-1}$ a $\sigma_{n_j}^j=\sigma_j$ pro $j=1,2,\ldots,m$. Protože

$$|\xi_j-\xi_i^j|<|\boldsymbol{\sigma}|<\delta_\varepsilon \ \text{ pro všechna } j\in\{1,2,\ldots,m\} \text{ a } i\in\{1,2,\ldots,n_j\},$$

odvodíme pomocí nerovnosti (5.36) vztah

$$\begin{aligned}|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')| &< \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^{n_j}[g(\sigma_i^j)-g(\sigma_{i-1}^j)]\\ &= \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\,[g(b)-g(a)] = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

5.55 Věta. (i) *Jestliže* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *je zleva spojitá na intervalu* $(a,b]$, *pak pro každou funkci* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *zprava spojitou na intervalu* $[a,b)$ *existují oba integrály*

$$(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad a \quad (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}f.$$

(ii) *Jestliže* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *je zprava spojitá na intervalu* $[a,b)$, *pak pro každou funkci* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *zleva spojitou na intervalu* $(a,b]$ *existují oba integrály*

$$(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad a \quad (\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}f.$$

D ů k a z . Díky větě o integraci per-partes (věta 5.50) stačí v obou případech dokázat existenci integrálu $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$.

Nechť $g \in \mathbb{G}[a,b]$ je zprava spojitá na intervalu $[a,b)$, tj. $g \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b]$ (viz (4.8)). Podle lemmat 4.18 a 4.19 máme

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] = \overline{\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]} = \overline{\mathrm{Lin}\big(\chi_{[\tau,b]},\, \tau \in [a,b]\big)}.$$

Podle lemmatu 5.12 a věty 5.52 tedy stačí dokázat, že integrál $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f$ existuje jestliže $g \equiv \chi_{[\tau,b]}$ pro nějaké $\tau \in [a,b]$.

Je-li $g = \chi_{[a,b]}$, neboli $\tau = a$ a $g = 1$ na $[a,b]$, pak $(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f = f(b) - f(a)$ (viz cvičení 5.5 (ii)). Předpokládejme tedy, že $\tau \in (a,b]$ a $g = \chi_{[\tau,b]}$. Dokážeme, že je

$$(\sigma)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f = f(b) - f(\tau). \tag{5.37}$$

Podle poznámky 5.7 se můžeme omezit na značená dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$, která obsahují bod τ. Pro každé takové značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ označme symbolem $k(\boldsymbol{\sigma})$ ten index $k \in \{1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\}$, pro který platí $\tau = \sigma_k$. (Takový index existuje vždy právě jeden.) Potom pro všechna tato dělení dostáváme

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} f(b) - f(\tau) & \text{je-li } \xi_{k(\boldsymbol{\sigma})} < \tau, \\ f(b) - f(\sigma_{k(\boldsymbol{\sigma})-1}) & \text{je-li } \xi_{k(\boldsymbol{\sigma})} = \tau \end{cases}$$

a tudíž

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \big(f(b) - f(\tau)\big)\big| = \begin{cases} 0 & \text{je-li } \xi_{k(\boldsymbol{\sigma})} < \tau, \\ |f(\tau) - f(\sigma_{k(\boldsymbol{\sigma})-1})| & \text{je-li } \xi_{k(\boldsymbol{\sigma})} = \tau. \end{cases} \tag{5.38}$$

Díky spojitosti funkce f v bodě τ zleva můžeme zvolit dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b]$ obsahující bod τ a takové, že platí

$$|f(\tau) - f(\sigma_{k(\boldsymbol{\sigma})-1})| < \varepsilon$$

pro libovolné jeho zjemnění $\boldsymbol{\sigma}$. Vzhledem k (5.38) to znamená, že pak bude platit

$$\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \big(f(b) - f(\tau)\big)\big| < \varepsilon \text{ pro všechna } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \text{ taková, že } \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon.$$

Odtud plyne, že platí (5.37). Dokázali jsme tedy tvrzení (i).

Druhé tvrzení by se dokazovalo podobně. □

5.56 Cvičení. (i) Pro oba typy RS-integrálu dokažte:

Jestliže $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *má konečnou variaci na* $[a,b]$ *a je spojitá na* $[a,b]$, *pak integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každou funkci* g *regulovanou na* $[a,b]$.

(ii) Proveďte podrobný důkaz tvrzení (ii) věty 5.55.

5.57 Poznámka. Připomeňme ještě bez důkazu jeden ze známých zajímavých existenčních výsledků. Dokázal ho v roce 1936 jeden z klasiků teorie integrace L. C. Young (viz [68]).

Jestliže funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *splňují podmínky*

$$|f(x)-f(y)| \le K\,|x-y|^\alpha \quad \textit{a} \quad |g(x)-g(y)| \le L\,|x-y|^\beta \quad \textit{pro} \ x,y\in[a,b],$$

kde $K,L\in[0,\infty)$, $\alpha,\beta\in(0,\infty)$, $\alpha+\beta>1$, *pak existuje integrál* $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$.

5.7 Bodová konvergence

Důkaz věty o konvergenci posloupnosti integrálů $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g$, ve které by nebyla nutná stejnoměrná konvergence $f_n \rightrightarrows f$, nám usnadní zavedení Darbouxových horních a dolních integrálů.

5.58 Definice. Nechť $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ je neklesající na $[a,b]$. Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ a funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ položme

$$\overline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big(\sup_{x\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x)\Big)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]$$

a

$$\underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big(\inf_{x \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j]} f(x) \Big) \, [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})]$$

a definujme

$$\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g = \inf \Big\{ \overline{S}_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \Big\}$$

a

$$\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g = \sup \Big\{ \underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \Big\}.$$

Veličiny $\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g$ resp. $\underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g$ nazýváme *horní, resp. dolní integrál* f vzhledem ke g.

5.59 Lemma. *Nechť* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Potom platí*

$$\overline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g = \underline{\int_a^b} f \, \mathrm{d}\, g = I \in \mathbb{R} \tag{5.39}$$

právě tehdy, když $(\sigma)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = I$.

D ů k a z . a) Předpokládejme, že platí (5.39). Protože g je neklesající, plyne přímo z definice 5.58, že

$$\underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) \le S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \le \overline{S}_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) \quad \text{pro } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \text{ a } \boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma}),$$

a

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} \supset \boldsymbol{\sigma} \implies \Big(\underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) \ge \underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) \text{ a } \overline{S}_{f\Delta\,g}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) \le \overline{S}_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}) \Big).$$

Pomocí těchto základních faktů není obtížné ověřit (proveďte !), že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}^k \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že nerovnosti

$$I - \frac{1}{k} < \underline{S}_{\,f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}^k) \le S_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}^k, \boldsymbol{\xi}^k) \le \overline{S}_{f\Delta\,g}(\boldsymbol{\sigma}^k) < I + \frac{1}{k}$$

platí pro každé $\boldsymbol{\xi}^k \in \tau(\boldsymbol{\sigma}^k)$. Pro dané $\varepsilon > 0$ zvolme $k_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$ a položme $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}$. Potom bude pro každé $\boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a $\boldsymbol{\xi} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$ platit

$$I - \varepsilon < \underline{S}(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}) \le \underline{S}(\boldsymbol{\sigma}) \le S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \le \overline{S}(\boldsymbol{\sigma}) \le \overline{S}(\boldsymbol{\sigma}^{k_\varepsilon}) < I + \varepsilon.$$

Odtud plyne rovnost $(\sigma)\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = I$.

b) Předpokládejme nyní, že existuje $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle věty 5.14 existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}$ takové, že nerovnost $\left|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\eta})\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ neboli

$$\Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\big(f(\xi_j) - f(\eta_j)\big)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big]\Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro jakákoliv $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta} \in \tau(\boldsymbol{\sigma})$. Přechodem k supremům a infimům na každém intervalu $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$ získáme nerovnost

$$\begin{aligned}
0 &\le \overline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) - \underline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma})\\
&= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\Big(\sup_{x\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x) - \inf_{x\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]} f(x)\Big)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big] \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme $\displaystyle\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g \le \overline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) < \underline{S}_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g + \varepsilon$ a konečně také

$$0 \le \overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g - \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g < \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že je $\displaystyle\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g = \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g$. Podle první části důkazu tedy platí (5.39). □

5.60 Poznámka. Jestliže $\displaystyle\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g = \underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}\,g = I \in \mathbb{R}$, bývá jejich společná hodnota I nazývána *Darbouxův-Stieltjesův integrál*. Lemma 5.59 říká, že tento integrál je ekvivalentní se (σ)RS-integrálem.

Nyní dokážeme dvě hlavní věty tohoto odstavce: Osgoodovu větu o dominované konvergenci a Hellyovu větu o konvergenci. Obě tyto věty platí ve stejném znění pro oba typy RS-integrálů.

5.61 Věta (OSGOODOVA KONVERGENČNÍ VĚTA). *Nechť funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a posloupnost $\{f_n\}$ funkcí definovaných na $[a,b]$ splňují vztahy*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \textit{a} \quad |f_n(x)| \le M < \infty \ \textit{ pro } \ x \in [a,b] \ \textit{ a } \ n \in \mathbb{N} \tag{5.40}$$

a nechť funkce $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ je taková, že integrály $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a $\displaystyle\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g$ existují pro každé $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g = \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g. \tag{5.41}$$

D ů k a z . a) Podle důsledku 5.42 integrál $\int_a^b |f_n(x) - f(x)| \, \mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^x\, g]$ existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ a platí nerovnost

$$\Big|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,] - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,]\Big| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^x\, g]. \tag{5.42}$$

Stačí tedy dokázat, že tvrzení věty platí, jestliže funkce f_n jsou nezáporné, $f = 0$ a g je neklesající. K tomu potřebujeme následující tvrzení známé z teorie množin jako Arzelàovo lemma. Jeho důkaz lze nalézti např. v [12, lemma II.15.8].

Lemma. (ARZELÀ). *Nechť* $\big\{\{J_{k,j}\} : k \in \mathbb{N},\ j \in U_k\big\}$ *je posloupnost konečných množin podintervalů* $[a,b]$ *takových, že pro každé* $k \in \mathbb{N}$ *jsou intervaly z množiny* $\{J_{k,j} : j \in U_k\}$ *navzájem disjunktní a*

$$\sum_{j \in U_k} |J_{k,j}| > C > 0 \quad \textit{pro každé} \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Potom existují posloupnosti indexů $\{k_\ell\}$ *a* $\{j_\ell\}$ *takové, že* $j_\ell \in U_{k_\ell}$ *pro každé* $\ell \in \mathbb{N}$ *a* $\bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} J_{k_\ell, j_\ell} \neq \emptyset$.

b) Předpokládejme tedy, že g je neklesající na $[a,b]$ a $\{f_n\}$ je posloupnost funkcí definovaných na $[a,b]$ a takových, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{a} \quad 0 \le f_n(x) \le M < \infty \ \text{ pro } \ x \in [a,b] \ \text{ a } \ n \in \mathbb{N}.$$

Dokážeme, že musí platit

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g = 0. \tag{5.43}$$

Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy neplatí (5.43). Potom, vzhledem k lemmatu 5.59, existují $\varepsilon > 0$ a rostoucí posloupnost $\{n_k\}$ takové, že

$$\underline{\int_a^b} f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g > \varepsilon \quad \text{pro všechna} \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Vzhledem k definici 5.58 to znamená, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje $\boldsymbol{\sigma}^k \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že $\underline{S}_{\,k}(\boldsymbol{\sigma}^k) > \varepsilon$, kde značíme $\underline{S}_{\,k}(\boldsymbol{\sigma}^k) = \underline{S}_{\,f_{n_k} \Delta g}(\boldsymbol{\sigma}^k)$. Položme ještě

$$m_k = \nu(\boldsymbol{\sigma}^k) \quad \text{a} \quad \varphi_{k,j} = \inf_{x \in [\sigma_{j-1}^k, \sigma_j^k]} f_{n_k}(x) \quad \text{pro} \ \ k \in \mathbb{N} \ \ \text{a} \ \ j \in \{1, 2, \dots, m_k\}.$$

Pro dané $\eta > 0$ označme U_k množinu indexů j takových, že $\varphi_{k,j} > \eta$, zatímco

$$V_k = \{1, 2, \dots, m_k\} \setminus U_k\,.$$

Zřejmě

$$M\sum_{j\in U_k}[g(\sigma_j^k)-g(\sigma_{j-1}^k)]+\eta\sum_{j\in V_k}[g(\sigma_j^k)-g(\sigma_{j-1}^k)]>\varepsilon$$

neboli

$$M\sum_{j\in U_k}[g(\sigma_j^k)-g(\sigma_{j-1}^k)]>\varepsilon-\eta\,[g(b)-g(a)].$$

Pro $\eta=\dfrac{\varepsilon}{2\,[g(b)-g(a)]}$ dostaneme $\displaystyle\sum_{j\in U_k}[g(\sigma_j^k)-g(\sigma_{j-1}^k)]>\frac{\varepsilon}{2\,M}>0$ neboli

$$\sum_{j\in U_k}\big|J_{k,j}\big|>\frac{\varepsilon}{2\,M}>0,\quad \text{kde } J_{k,j}=[g(\sigma_{j-1}^k),g(\sigma_j^k)\,]\quad \text{pro } j\in U_k.$$

Podle Arzelàova lemmatu tedy existují bod y_0 a posloupnosti $\{k_\ell\}$ a $\{j_\ell\}$ takové, že $j_\ell\in U_{k_\ell}$ pro každé $\ell\in\mathbb{N}$ a $y_0\in\bigcap_{\ell\in\mathbb{N}}J_{k_\ell,j_\ell}$. To znamená, že $y_0\in[g(\sigma_{j_\ell-1}^{k_\ell}),g(\sigma_{j_\ell}^{k_\ell})\,]$ pro každé $\ell\in\mathbb{N}$. Protože g je neklesající na $[a,b]$, existuje právě jeden bod $x_0\in[a,b]$ takový, že

$$y_0\in[g(x_0-),g(x_0+)\,],\ \ x_0\in[\sigma_{j_\ell-1}^{k_\ell},\sigma_{j_\ell}^{k_\ell}\,]\ \ \text{a}\ \ j_\ell\in U_{k_\ell}\ \text{pro každé}\ \ell\in\mathbb{N}.$$

Podle definice množin U_k to znamená, že $f_{n_{k_\ell}}(x_0)>\eta$ pro každé $\ell\in\mathbb{N}$. To ale není možné vzhledem k předpokladu $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$. Platí tedy (5.43).

c) Podle části b) tohoto důkazu a lemmatu 5.59 máme

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}\,[\operatorname{var}_a^x g\,]&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}\,[\operatorname{var}_a^x g\,]\\&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,]=0,\end{aligned}$$

a tudíž ze vztahu (5.42) bezprostředně vyplývá, že platí také

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Další věta o konvergenci posloupnosti integrálů $\left\{\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n\right\}$ je doplňkem k větě Osgoodově. Z jejího důkazu bude zřejmé, že platí pro oba integrály.

5.62 Věta (HELLYOVA VĚTA O KONVERGENCI). *Nechť funkce* $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ *a posloupnost* $\{g_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$ *jsou takové, že*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x) \text{ pro } x\in[a,b] \quad a \quad \operatorname{var}_a^b g_n \le \gamma < \infty.$$

Potom $\operatorname{var}_a^b g \le \gamma$ *a* $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_n = \int_a^b f\,\mathrm{d}\, g$ *platí pro každou funkci* f *spojitou na* $[a,b]$.

D ů k a z. Nechť f je spojitá na $[a,b]$. Podle věty 2.47 je $\operatorname{var}_a^b g\le\gamma$ a podle věty 5.54 existují všechny integrály $\int_a^b f\,\mathrm{d}\, g_n$, $n\in\mathbb{N}$, a $\int_a^b f\,\mathrm{d}\, g$. Buď dáno $\varepsilon>0$. Ze spojitosti funkce f na $[a,b]$ plyne, že existuje $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_m\}\in\mathscr{D}[a,b]$ takové, že pro každé $j\in\{1,2,\ldots,m\}$ platí

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3\,\gamma} \qquad \text{pro všechny } x,y\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]. \tag{5.44}$$

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ máme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \Big(\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f(x)\,\mathrm{d}\,[\,g_n(x)\,] - f(\sigma_j)\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\mathrm{d}\,[\,g_n(x)\,]\Big)\\ =\sum_{j=1}^m\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\big(f(x)-f(\sigma_j)\big)\,\mathrm{d}\,[\,g_n(x)\,],\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,[\,g_n(x)\,] - S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\\ =\sum_{j=1}^m\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\big(f(x)-f(\sigma_j)\big)\,\mathrm{d}\,[\,g_n(x)\,],\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\xi}=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m)$. Pomocí (5.44) a lemmatu 5.10 tedy dostáváme

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\, g_n(x) - S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\Big| \le \frac{\varepsilon}{3\,\gamma}\sum_{j=1}^m \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g \le \frac{\varepsilon}{3\,\gamma}\,\gamma = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Podobně odvodíme i analogickou nerovnost s funkcí g na místě g_n, tj.

$$\Big|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,] - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\Big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Protože $g_n(x)\to g(x)$ pro každé $x\in[a,b]$, snadno ověříme také rovnost

$$\lim_{n\to\infty}\big|S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| = 0.$$

Existuje tedy $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\left|S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{pro } n \geq n_0.$$

Pomocí posledních tří nerovností konečně dostaneme pro $n \geq n_0$

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\right| \leq \left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n - S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\right|$$
$$+ \left|S_{f\,\Delta g_n}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\right| + \left|S_{f\,\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\right| < \varepsilon.$$

Platí tedy $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n = \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. □

5.8 Další věty o existenci integrálu

Nejprve pomocí vět 5.36 a 5.40 a lemmatu 5.38 upřesníme pohled na roli ohraničených funkcí v teorii Stieltjesova integrálu, který nám poskytla věta 5.23. Následující tvrzení platí pro oba typy RS-integrálů.

5.63 Věta. *Nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a nechť existuje* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. *Potom je buďto funkce* f *ohraničená na intervalu* $[a,b]$, *nebo existuje konečný systém bodů* $\alpha_i, \beta_i \in [a,b]$, $i = 1,2,\ldots,k$, *takových, že platí*

(i) $a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_k < \beta_k \leq b$,

(ii) *funkce* g *je na každém intervalu* $[\alpha_i,\beta_i]$, $i = 1,2,\ldots,k$, *konstantní,*

(iii) *funkce* f *je ohraničená na množině* $[a,b] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k}[\alpha_i,\beta_i]$.

D ů k a z . a) Předpokládejme, že existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a že funkce f není ohraničená na $[a,b]$. Potom podle věty 5.40 existuje také integrál

$$(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,v, \quad \text{kde } v(x) = \operatorname{var}_a^x g \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Podle věty 5.36 a lemmatu 5.38 tedy existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,[v(\sigma_j) - v(\sigma_{j-1})] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \omega(S_{f\Delta\,v};[\sigma_{j-1},\sigma_j]) < 1.$$

Speciálně pro každé $j=1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ musí platit

$$\omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)\,[v(\sigma_j)-v(\sigma_{j-1})]<1. \tag{5.45}$$

Není-li f ohraničená na intervalu $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$, pak je ovšem

$$\omega_{[\sigma_{j-1},\sigma_j]}(f)=\sup_{x',x''\in[\sigma_{j-1},\sigma_j]}|f(x')-f(x'')|=\infty$$

a (5.45) může platit jenom tehdy, když bude $0=v(\sigma_j)-v(\sigma_{j-1})=\operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} g$. Podle lemmatu 2.13 to znamená, že funkce g musí být konstantní na intervalu $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$. Nyní, nechť $\mathfrak{J}$ je množina všech intervalů $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$, na kterých je funkce f neohraničená (a tedy funkce g konstantní), a nechť k je počet prvků této množiny. Důkaz dokončíme, označíme-li krajní body intervalů z $\mathfrak{J}$ symboly $\alpha_i,\beta_i,\ i=1,2,\ldots,k,$ tak, aby byly uspořádány jako v podmínce (i) a současně platilo $\mathfrak{J}=\big\{[\alpha_i,\beta_i]:i=1,2,\ldots,k\big\}$.

b) Jestliže existuje $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g,$ pak podle věty 5.6 existuje také $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a tvrzení věty plyne z první části důkazu. □

5.64 Poznámka. Protože hodnota integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ se nezmění, jestliže libovolně pozměníme hodnotu funkce f na intervalech, na kterých je g konstantní, vidíme z věty 5.63, že jestliže integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ existuje, pak vždy můžeme najít funkci $\widetilde{f}$ ohraničenou na $[a,b]$ a takovou, že $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b \widetilde{f}\,\mathrm{d}\,g.$

5.65 Věta. *Jestliže integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každou funkci* f *spojitou na* $[a,b]$, *pak* g *má konečnou variaci na* $[a,b]$.

Důkaz se opírá o následující dvě pomocná tvrzení.

Tvrzení 1. *Je-li* $a_n\ge 0$ *pro všechna* $n\in\mathbb{N}$ *a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty,$ *pak existuje posloupnost* $\{c_n\}$ *taková, že platí*

$$c_n>0 \ \textit{pro všechna}\ n\in\mathbb{N},\quad \lim_{n\to\infty}c_n=0\ \ \textit{a}\ \ \sum_{n=1}^{\infty}c_n\,a_n=\infty. \tag{5.46}$$

D ů k a z . Posloupnost $\{s_n\}=\Big\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\Big\}$ je neklesající a platí

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty. \tag{5.47}$$

Speciálně pro dostatečně velká n $(n\ge n_0)$ bude $s_n>0.$ Můžeme tudíž definovat

$$c_n=\begin{cases}1 & \text{pro } n<n_0,\\ \dfrac{1}{s_n} & \text{pro } n\ge n_0.\end{cases}$$

Zřejmě je $c_n > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Na druhou stranu, pro libovolná $m, n \in \mathbb{N},\ m > n \geq n_0$ máme

$$\sum_{k=n}^{m} c_k\, a_k = \sum_{k=n}^{m} \frac{a_k}{s_k} \geq \frac{1}{s_m} \sum_{k=n}^{m} a_k = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_m}.$$

Vzhledem k (5.47) pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m_n > n$ takové, že je $\dfrac{s_{n-1}}{s_{m_n}} < \dfrac{1}{2}$, tj.

$$\sum_{k=n}^{m_n} c_k\, a_k > \frac{1}{2}.$$

To ovšem znamená, že musí platit (5.46). □

Tvrzení 2. *Nechť* $g : [a, b] \to \mathbb{R},\ x_0 \in (a, b]$ *a*

$$\operatorname{var}_x^{x_0} g = \infty \quad \textit{pro každé } x \in [a, x_0). \tag{5.48}$$

Potom existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ *bodů v* $[a, x_0)$ *taková, že*

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad \textit{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty. \tag{5.49}$$

D ů k a z . $\alpha)$ Nejprve dokážeme, že platí

$$\sup\{\operatorname{var}_y^x g : x \in (y, x_0)\} = \infty \quad \text{pro každé } y \in [a, x_0). \tag{5.50}$$

Předpokládejme opak. Nechť tedy existují $M \in [0, \infty)$ a $y \in [a, x_0)$ takové, že

$$\sup\{\operatorname{var}_y^x g : x \in (y, x_0)\} \leq M. \tag{5.51}$$

Položme $\widetilde{M} = M + |g(x_0) - g(y)|$. Potom, vzhledem k (5.48), existuje dělení

$$y = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = x_0$$

intervalu $[y, x_0]$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{m} |g(y_j) - g(y_{j-1})| > 3\, \widetilde{M}.$$

Protože je

$$|g(x_0) - g(y_{m-1})| \leq |g(x_0) - g(y)| + |g(y) - g(y_{m-1})| \leq \widetilde{M},$$

máme

$$\sum_{j=1}^{m-1} |g(y_j) - g(y_{j-1})| > 2\, \widetilde{M},$$

a tedy $\operatorname{var}_y^{y_{m-1}} g > 2\,\widetilde{M}$, což je ve sporu s (5.51). Platí tedy (5.50).

$\beta)$ Zkonstruujeme hledanou posloupnost. Položme $u_1 = a$ a zvolme $u_2 \in (a, x_0)$ tak, aby platilo $u_2 > x_0 - 1$ a $\operatorname{var}_{u_1}^{u_2} g > 1$. Máme-li body $u_1, u_2, \ldots, u_\ell \in [a, x_0)$ takové, že platí $u_\ell \in (u_{\ell-1}, x_0) \cap (x_0 - \dfrac{1}{\ell-1}, x_0)$ a $\operatorname{var}_{u_{\ell-1}}^{u_\ell} g > 1$, pak najdeme $u_{\ell+1}$ tak, aby platilo $u_{\ell+1} \in (u_\ell, x_0) \cap (x_0 - \dfrac{1}{\ell}, x_0)$ a $\operatorname{var}_{u_\ell}^{u_{\ell+1}} g > 1$. Posloupnost $\{u_\ell\}$ je zřejmě rostoucí a

$$\lim_{\ell\to\infty} u_\ell = x_0. \tag{5.52}$$

Podle definice variace, pro každé $\ell \in \mathbb{N}$ existuje dělení $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \{\sigma_0^\ell, \sigma_1^\ell, \ldots, \sigma_{m_\ell}^\ell\}$ intervalu $[u_\ell, u_{\ell+1}]$ takové, že platí

$$\sum_{j=1}^{m_\ell} |g(\sigma_j^\ell) - g(\sigma_{j-1}^\ell)| > 1.$$

Potom

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=1}^{m_\ell} |g(\sigma_j^\ell) - g(\sigma_{j-1}^\ell)| \Big) \ge \sum_{\ell=1}^{\infty} 1 = \infty. \tag{5.53}$$

Přečíslujme nyní prvky množin $\boldsymbol{\sigma}^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$, do posloupnosti $\{x_k\}$ tak, aby platilo

$$x_{k+1} = \sigma_{j+1}^\ell \quad \text{je-li } x_k = \sigma_j^\ell \quad \text{a} \quad j < m_\ell - 1$$

a

$$x_{k+1} = \sigma_0^{\ell+1} \quad \text{je-li } x_k = \sigma_{m_\ell-1}^\ell.$$

Vzhledem k (5.52) a (5.53) má posloupnost $\{x_k\}$ požadované vlastnosti. □

Důkaz věty 5.65. Vzhledem k větě 5.6 se můžeme omezit na (σ)RS-integrál.

Předpokládejme, že $\operatorname{var}_a^b g = \infty$. Díky Heinově-Borelově větě o konečném pokrytí (viz větu 4.5) a větě 2.11 víme, že funkce $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a, b]$ právě tehdy, když platí

$$\left.\begin{array}{l} \forall\, x \in (a, b]\ \exists\, \delta_1 \in (0, x - a) : \operatorname{var}_{x-\delta_1}^{x} g < \infty \\ \text{a} \\ \forall\, x \in [a, b)\ \exists\, \delta_2 \in (0, b - x) : \operatorname{var}_{x}^{x+\delta_2} g < \infty. \end{array}\right\} \tag{5.54}$$

Předpoklad, že $\operatorname{var}_a^b g = \infty$ znamená, že existuje $x_0 \in [a, b]$ takové, že pro $x = x_0$ není splněna jedna z podmínek (5.54). Nechť tedy například $x_0 \in (a, b]$ je takové, že platí (5.48). Podle tvrzení 2 tedy existuje rostoucí posloupnost $\{x_k\}$ bodů v (a, x_0) taková, že

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x_0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty.$$

Dále podle tvrzení 1 existuje posloupnost $\{c_k\}$ kladných čísel taková, že platí

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, |g(x_{k+1}) - g(x_k)| = \infty.$$

Položme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \ x < x_1, \ \text{resp. } x \geq x_0, \ \text{resp. } x \in \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \\ c_k \ \mathrm{sign}(g(x_{k+1}) - g(x_k)) & \text{pro } \ x = \xi_k : \, = \dfrac{x_{k+1} + x_k}{2} \end{cases}$$

a ve zbývajících bodech intervalu $[a,b]$ dodefinujme funkci f lineárně a tak, aby byla spojitá na $[a,b]$. Pro takto definovanou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ platí

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(\xi_k) \, [g(x_{k+1}) - g(x_k)] = \infty.$$

Speciálně pro každé $M > 0$ existuje $N_M \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k) \, [g(x_{k+1}) - g(x_k)] > M.$$

Pro dané $M > 0$ označme

$$\boldsymbol{\sigma}_M = \{a, x_1, x_2, \ldots, x_{N_M}, x_{N_M+1}, b\}, \ \ \boldsymbol{\xi}_M = (a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N_M}, b).$$

Potom je $(\boldsymbol{\sigma}_M, \boldsymbol{\xi}_M) \in \mathscr{T}[a,b]$ a

$$S(\boldsymbol{\sigma}_M, \boldsymbol{\xi}_M) = \sum_{k=1}^{N_M} f(\xi_k) \, [g(x_{k+1}) - g(x_k)] > M.$$

(Připomeňme si, že $f(a) = f(b) = 0$.) To ale znamená, že integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ nemůže mít konečnou hodnotu.

Není-li splněna druhá z podmínek v (5.54), tj. existuje $x_0 \in [a,b)$ takové, že

$$\mathrm{var}_{x_0}^{x}\, g = \infty \quad \text{pro každé } \ x \in (x_0, b]\,,$$

je třeba místo tvrzení 2 použít jeho vhodnou úpravu. □

5.66 Cvičení. Zformulujte a dokažte analogii tvrzení 2 potřebnou k dokončení důkazu věty 5.65, jestliže existuje $x_0 \in [a,b)$ takové, že $\mathrm{var}_{x_0}^{x}\, g = \infty$ pro každé $x \in (x_0, b]$.

5.67 Věta. *Nechť $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a nechť integrál $\displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g$ existuje pro každou konečnou skokovou funkci g. Potom f je spojitá na $[a,b]$.*

D ů k a z . Opět se můžeme omezit na (σ)RS-integrál. Nechť $x_0 \in (a,b)$, $c,d \in \mathbb{R}$, $c+d \neq 0$ a nechť funkce $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je definována podobně jako v poznámce 5.24, tj.

$$g(x) = c\,\chi_{[a,x_0)}(x) + \frac{c+d}{2}\,\chi_{[x_0]}(x) + d\,\chi_{(x_0,b]}(x) \quad \text{pro} \;\; x \in [a,b].$$

Podle poznámky 5.24 může integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ existovat pouze tehdy, když

$$f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+)\,.$$

Podobně bychom dokázali, že f musí být spojitá i v bodě a zprava a v bodě b zleva. $\square$

5.9 Věty o střední hodnotě

Věty tohoto odstavce platí ve stejném znění pro oba typy RS-integrálu.

5.68 Věta (O STŘEDNÍ HODNOTĚ)**.** *Je-li* f *spojitá na* $[a,b]$ *a* g *neklesající na* $[a,b]$, *pak existuje* $x_0 \in [a,b]$ *takové, že*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = f(x_0)\,[g(b) - g(a)]. \tag{5.55}$$

D ů k a z . Věta 5.54 zaručuje existenci integrálu $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ v obou smyslech. Protože je g neklesající na $[a,b]$, pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}\,[a,b]$ platí

$$m\,[g(b) - g(a)] \leq S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \leq M\,[g(b) - g(a)],$$

kde $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ a $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Podobně jako při důkazu lemmatu 5.10 plyne odtud, že platí také

$$m\,[g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \leq M\,[g(b) - g(a)].$$

Dále protože f je spojitá, nabývá všech hodnot z intervalu $[m,M]$. Speciálně existuje $x_0 \in [a,b]$ takové, že platí (5.55). $\square$

5.69 Věta (DRUHÁ O STŘEDNÍ HODNOTĚ)**.** *Je-li* f *spojitá na* $[a,b]$ *a* g *neklesající na* $[a,b]$, *pak existuje* $x_0 \in [a,b]$ *takové, že*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}\,x = g(a)\int_a^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.56}$$

D ů k a z . Funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a,b]$. Položme

$$h(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Potom podle věty o substituci (věta 5.45 a důsledek 5.46), věty o integraci per-partes (věta 5.50) a věty o střední hodnotě (věta 5.68) existuje $x_0 \in [a, b]$ tak, že

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}\, x &= \int_a^b g\, \mathrm{d}h = h(b)\, g(b) - \int_a^b h\, \mathrm{d}\, g \\ &= \Big(\int_a^b f\, \mathrm{d}x\Big)\, g(b) - \Big(\int_a^{x_0} f\, \mathrm{d}x\Big)\, [g(b) - g(a)] \\ &= g(a) \int_a^{x_0} f(x)\, \mathrm{d}x + g(b) \int_{x_0}^b f(x)\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Platí tedy (5.56). □

5.10 Další integrály Stieltjesova typu

Buďte dány funkce $f,\ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a, b]$. Položme

$$\begin{aligned}S_M(\boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \frac{f(\sigma_j) + f(\sigma_{j-1})}{2}\, [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})], \\ S_{CL}(\boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\sigma_{j-1})\, [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})], \\ S_{CR}(\boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\sigma_j)\, [g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})].\end{aligned}$$

Dosadíme-li do definice 5.3 $S_M(\boldsymbol{\sigma})$, resp. $S_{CL}(\boldsymbol{\sigma})$, resp. $S_{CR}(\boldsymbol{\sigma})$ místo $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$, dostaneme po řadě integrály *středový* resp. *levý Cauchyův*, resp. *pravý Cauchyův*. Podle způsobu limitního procesu se ovšem rozlišují (δ) nebo (σ) varianty. Je zřejmé, že všechny zobecňují příslušné RS-integrály, pokud jde o třídy integrovatelných funkcí. Ne vždy však zůstanou zachovány všechny vlastnosti RS-integrálů. Na příklad pro středový integrál neplatí obdoba věty 5.45 o substituci. Více podrobností lze najít v odstavci II.19 monografie [12] T. H. Hildebrandta.

5.11 Cvičení na závěr

Není-li uvedeno jinak, v následujících cvičeních proveďte diskusi o existenci, případně určete hodnotu pro každý typ Stieltjesova integrálu z této kapitoly, tj pro integrály (δ)RS, (σ)RS, středový, levý Cauchyův a pravý Cauchyův.

(i) Nechť $g(x) = \sin\, x$ pro $x \in [0, \pi]$. Určete hodnotu integrálu $\displaystyle\int_0^\pi x\, \mathrm{d}[\, g(x)\,]$.

(ii) Nechť $g(x) = \exp(|x|)$ pro $x \in [-1, 1]$. Určete hodnotu integrálu $(\delta)\int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}[\, g(x)\,]$.

(iii) Nechť $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ c & \text{pro } x = \frac{1}{2}, \\ d & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$

Zkoumejte existenci a hodnotu integrálu $\int_0^1 f \, \mathrm{d}g$ pro různé funkce f v závislosti na c, d.

(iv) Nechť $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ 1 & \text{pro } x \geq 0, \end{cases}$ $\quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0, \\ 1 & \text{pro } x > 0. \end{cases}$

Zkoumejte existenci a hodnotu integrálů

$$\int_{-1}^{1} g \, \mathrm{d}f, \int_{-1}^{0} g \, \mathrm{d}f, \int_{0}^{1} g \, \mathrm{d}f, \int_{-1}^{1} g \, \mathrm{d}g, \int_{-1}^{0} g \, \mathrm{d}g, \int_{0}^{1} g \, \mathrm{d}g.$$

(v) Určete hodnotu integrálu $(\delta)\int_0^1 x^2 \, [\, g(x)\,]$, kde $g(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{x} & \text{pro } x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$

V této kapitole jsme čerpali zejména z kapitoly II Hildebrandtovy monografie [12], ve které je možno najít i další informace.

Kapitola 6

Kurzweilův-Stieltjesův integrál

Riemannův-Stieltjesův integrál má široké uplatnění všude, kde je možno omezit se na situace, kdy integrand a integrátor nemají společné body nespojitosti (nebo, v případě (σ)RS–integrálu, neexistují body, ve kterých by obě funkce měly nespojitost na stejné straně). Pro některé aplikace (např. v teorii hystereze a z ní pocházejících variačních nerovnostech, viz [2], citekrla a [23]) je však žádoucí mít k dispozici integrál Stieltjesova typu, který si nevynucuje žádná omezení na spojitost integrovaných a integrujících funkcí. Ukazuje se, že integrál, který této potřebě nejlépe vyhovuje, je integrál, který budeme nazývat Kurzweilův-Stieltjesův. Jeho výhodnost nespočívá jen v jeho obecnosti, ale též i v relativní jednoduchosti jeho definice i odvození jeho vlastností. Navzdory těmto přednostem mu v monografické literatuře nebylo doposud věnováno tolik pozornosti, kolik by si zasloužil. Pokud je mi známo, stručné pojednání o tomto integrálu lze najít v kapitole 24 Schechterovy monografie [46] z roku 1997 (tam je nazýván Henstockův-Stieltjesův integrál). Podrobněji se tímto integrálem zabývá McLeodova monografie [36] z roku 1980, kde je nazýván *gauge integral* („gauge“=„kalibr“). Jaroslav Kurzweil použil tento integrál již v roce 1958 (viz [30]) jako speciální případ zobecněného nelineárního integrálu, který definoval ve své fundamentální práci [29] z roku 1957 při vyšetřování spojité závislosti řešení nelineárních diferenciálních rovnic obsahujících Diracovu distribuci. Během sedmdesátých let minulého století byl již termín Kurzweilův-Stieltjesův integrál (nebo Perronův-Stieljesův integrál podle Kurzweilovy definice) běžně používán v pracích zabývajících se zobecněnými lineárními diferenciálními rovnicemi (viz např. [50] nebo [58] a práce tam citované).

Cílem této kapitoly je předložit co nejucelenější teorii Kurzweilova-Stieltjesova integrálu.

6.1 Definice a základní vlastnosti

Připomeňme, že konečná uspořádaná podmnožina $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a, b]$ se nazývá *dělení* intervalu $[a, b]$, jestliže

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_m = b.$$

Množinu všech dělení intervalu $[a, b]$ značíme $\mathscr{D}[a, b]$. Jestliže $\boldsymbol{\sigma}$ je dělení intervalu $[a, b]$, pak jeho prvky zpravidla značíme symboly σ_j. Říkáme též, že dělení $\boldsymbol{\sigma}$ je tvořeno podintervaly

$$[\sigma_{j-1}, \sigma_j], \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Počet podintervalů tvořících dělení zpravidla označujeme symbolem $\nu(\boldsymbol{\sigma})$. Máme tedy $\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = b$ a v příkladu uvedeném výše je $\nu(\boldsymbol{\sigma}) = m$. Konečně, značíme také

$$|\boldsymbol{\sigma}| = \max_{j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \quad \text{pro} \ \ \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b].$$

Řekneme, že $\boldsymbol{\sigma}' \in \mathscr{D}[a,b]$ je *zjemnění* dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$, jestliže je $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$.

Připomeňme, že dvojice $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ konečných uspořádaných množin

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$$

se nazývá *značené dělení* intervalu $[a,b]$, jestliže $\boldsymbol{\sigma}$ je dělení intervalu $[a,b]$, t.j.

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = b$$

a

$$\sigma_{j-1} \le \xi_j \le \sigma_j \quad \text{pro} \ \ j = 1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\sigma}).$$

Množinu všech značených dělení intervalu $[a,b]$ značíme symbolem $\mathscr{T}[a,b]$. Říkáme také, že ξ_j je *značka* podintervalu $[\sigma_{j-1}, \sigma_j]$ a $\boldsymbol{\xi}$ je *množina značek*.

6.1 Definice. Každá kladná funkce $\delta : [a,b] \to (0,\infty)$ se nazývá *kalibr* na intervalu $[a,b]$. Množinu kalibrů na $[a,b]$ značíme $\mathscr{G}[a,b]$.

Je-li δ kalibr na $[a,b]$, řekneme, že značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ je *δ–jemné*, jestliže platí

$$[\sigma_{j-1}, \sigma_j] \subset (\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)) \quad \text{pro všechna } j = 1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\sigma}).$$

$\mathscr{A}(\delta; [a,b])$ značí množinu všech δ–jemných značených dělení intervalu $[a,b]$. Nehrozí-li nedorozumění, používáme kratší značení $\mathscr{A}(\delta)$.

Mějme funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$. Potom, stejně jako pro RS–integrály, definujeme

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \left(= S_{f \Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = S_{f \Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}; [a,b]) \right) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j) \left[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1}) \right].$$

6.2 Definice. Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $I \in \mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *Kurzweilův-Stieltjesův integrál* (KS–integrál)

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}[g(x)]$$

a má hodnotu $I \in \mathbb{R}$, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b] : \Big((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon) \Big) \implies \Big| I - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \Big| < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Budeme využívat též zkrácené značení

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,].$$

Stejně jako pro RS–integrály definujeme

$$\int_b^a f\,\mathrm{d}g = -\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad\text{a}\quad \int_a^a f\,\mathrm{d}g = 0.$$

Jestliže $g(x) \equiv x$, pak místo o KS–integrálu mluvíme o KH–integrálu (Kurzweilův-Henstockův integrál) a značíme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Tato definice je korektní díky následujícím dvěma lemmatům.

6.3 Lemma (COUSIN)**.** *Pro každý kalibr* $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ *je množina* $\mathscr{A}(\delta)$ *všech* δ*–jemných značených dělení intervalu* $[a,b]$ *neprázdná.*

D ů k a z . Mějme kalibr $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$. Označme M množinu všech $c \in (a,b]$, pro něž je množina $\mathscr{A}(\delta;[a,c])$ neprázdná.

Nechť

$$c = \min\{a+\delta(a), b\}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \{a,c\} \ \text{ a } \ \boldsymbol{\xi} = \{a\}.$$

Protože je $\delta(a) > 0$, máme $c \in (a,b]$ a $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta;[a,c])$, tj. $c \in M$. Množina M je tedy neprázdná, a proto $d = \sup M > -\infty$.

Ukážeme dále, že d patří do množiny M. Protože je $\delta(d) > 0$, plyne z definice suprema, že existuje $c \in (d-\delta(d), d\,] \cap M$. Existuje tudíž také δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a,c]$. Nechť $c < d$. (V opačném případě je triviálně $d = c \in M$.) Položme $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \{d\}$ a $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}' \cup \{d\}$. Potom $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,d]$, a protože je

$$[c,d\,] \subset (d-\delta(d), d+\delta(d)),$$

znamená to také, že $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta;[a,d])$, tj. $d \in M$.

Je-li $d = b$, jsme s důkazem hotovi. Předpokládejme tedy, že je $d < b$. Zvolme libovolně $(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[a,d]$ a $\gamma \in (d, d+\delta(d)) \cap (d,b)$. (Takové γ existuje, protože je $\delta(d) > 0$.) Máme tedy

$$[d,\gamma] \subset (d-\delta(d), d+\delta(d)),$$

a proto $\big(\boldsymbol{\sigma}'' \cup \{\gamma\}, \boldsymbol{\xi}'' \cup \{d\}\big)$ je δ–jemné značené dělení intervalu $[a,\gamma]$, tj. $\gamma \in M$. Protože je $\gamma > d$, dostáváme tak spor s definicí $d = \sup M$. Máme tedy $d = \sup M = b$ a důkaz lemmatu je dokončen. $\square$

6.4 Lemma. *Hodnota integrálu* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *je podmínkou* (6.1) *určena jednoznačně.*

D ů k a z. Předpokládejme, že existují $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$, $I_1 \neq I_2$, takové, že platí (6.1), kam dosadíme $I = I_i$, $i = 1, 2$. Položme $\widetilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\,|I_1 - I_2|$. Pak existují kalibry δ_1 a δ_2 tak, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_1| < \widetilde{\varepsilon} \text{ pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_1),$$

a

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_2| < \widetilde{\varepsilon} \text{ pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_2)$$

Položme

$$\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\} \quad \text{pro } x \in [a, b].$$

Potom je zřejmě δ také kalibr a platí

$$\mathscr{A}(\delta) \subset \mathscr{A}(\delta_1) \cap \mathscr{A}(\delta_2).$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)$ tedy máme

$$\begin{aligned} 2\,\widetilde{\varepsilon} &= |I_1 - I_2| = |I_1 - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) + S(\boldsymbol{\sigma}(\xi) - I_2| \\ &\le |I_1 - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})| + |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_2| < 2\,\widetilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Protože toto není možné, musí být $I_1 = I_2$. □

Nebude-li uvedeno jinak, bude mít v následujícím textu symbol integrálu vždy smysl KS–integrálu.

6.5 Poznámka. Nechť $\delta, \delta_0 \in \mathscr{G}[a, b]$ a $\delta \le \delta_0$ na $[a, b]$. Potom je $\mathscr{A}(\delta) \subset \mathscr{A}(\delta_0)$. Je-li tedy splněna nějaká podmínka pro všechny $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$, tím spíše je splněna i pro všechny $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)$. Tudíž, máme-li dán kalibr $\delta_0 \in \mathscr{G}[a, b]$, můžeme se v definici 6.2 omezit na kalibry δ_ε, pro které je $\delta_\varepsilon \le \delta_0$ na $[a, b]$.

Také pro existenci KS–integrálu platí podmínka Bolzanova-Cauchyova typu.

6.6 Věta (BOLZANOVA-CAUCHYOVA PODMÍNKA)**.** *Nechť* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Pak integrál* $\displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ *existuje právě tehdy, když platí*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a, b] \colon \Big((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon) \Big) \Longrightarrow \Big| S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \Big| < \varepsilon. \quad (6.2)$$

D ů k a z. a) Existuje-li integrál $\displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}g = I \in \mathbb{R}$, pak, podle definice 6.2, pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a, b]$ takový, že je

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro všechna } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon).$$

Pro každou dvojici $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$, $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ tedy máme

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| \le |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| + |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - I| < \varepsilon.$$

Platí tedy (6.2).

b) Předpokládejme nyní, že je splněna podmínka (6.2). Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle (6.2) můžeme zvolit kalibr δ_ε tak, aby nerovnost

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6.3}$$

platila pro každou dvojici δ_ε–jemných značených dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a, b]$. Označme M množinu těch reálných čísel m, pro která existuje kalibr $\delta_m \in \mathscr{G}[a, b]$ takový, že nerovnost $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \geq m$ je splněna pro každé dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_m)$.

Dokážeme, že množina M je neprázdná, shora ohraničená a

$$\sup M = \int_a^b f \, \mathrm{d}g.$$

Zafixujme $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Podle (6.3) platí

$$S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - \frac{\varepsilon}{2} < S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) < S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon). \tag{6.4}$$

To znamená, že $(-\infty, S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - \frac{\varepsilon}{2}) \subset M$, a tedy $M \neq \emptyset$.

Pro každé $m \in M$ a $x \in [a, b]$ definujme

$$\widetilde{\delta}_m(x) = \min\{\delta_m(x), \delta_\varepsilon(x)\}.$$

Potom pro každé $m \in M$ a každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\widetilde{\delta}_m) \subset \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platí nerovnosti

$$m \leq S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) < S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{tj. } M \subset \Big(-\infty, S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) + \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Množina M je tedy shora ohraničená a $S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \sup M \leq S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Odtud podle (6.4) odvodíme konečně, že platí

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - \sup M| \leq |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})| + |S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - \sup M| < \varepsilon$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$, tj. $\sup M = \displaystyle\int_a^b f \, \mathrm{d}g.$ □

6.7 Poznámka. Podobně jako v případě RS–integrálů (viz cvičení 5.15 můžeme podmínku (6.2) zeslabit následujícím způsobem

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a, b]: \\ &\qquad \Big((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), (\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon),\ \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}\Big) \implies \Big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')\Big| < \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

KS–integrál má obvyklé lineární vlastnosti.

6.8 Věta. *Nechť* $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a nechť existují integrály*

$$\int_a^b f_1 \,\mathrm{d}g, \quad \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}g, \quad \int_a^b f \,\mathrm{d}g_1 \ \textit{a} \ \int_a^b f \,\mathrm{d}g_2.$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,\mathrm{d}g = c_1 \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}g + c_2 \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}g$$

a

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}[\, c_1 g_1 + c_2 g_2] = c_1 \int_a^b f \,\mathrm{d}g_1 + c_2 \int_a^b f \,\mathrm{d}g_2.$$

D ů k a z . Ukažme si třeba důkaz prvního tvrzení.

Buď dáno $\varepsilon > 0.$ Podle našeho předpokladu existují kalibry $\delta_1 \in \mathscr{G}[a,b]$ a $\delta_2 \in \mathscr{G}[a,b]$ takové, že platí

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_i) \implies \left| S_{f_i \Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_i \,\mathrm{d}g \right| < \varepsilon \quad \text{pro} \ \ i = 1, 2.$$

Pro $x \in [a,b]$ položme $\delta_\varepsilon(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}.$ Označme $h = c_1 f_1 + c_2 f_2.$ Protože pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platí

$$\begin{aligned} S_{h\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} (c_1 f_1(\xi_j) + c_2 f_2(\xi_j))\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \\ &= c_1 S_{f_1 \Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) + c_2 S_{f_2 \Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}), \end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned} &\left| S_{h\Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - c_1 \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}g - c_2 \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}g \right| \\ &\qquad \le |c_1| \left| S_{f_1 \Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}g \right| + |c_2| \left| S_{f_2 \Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}g \right| \\ &\qquad < (|c_1| + |c_2|)\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud už naše tvrzení bezprostředně plyne.

Druhé tvrzení věty by se dokazovalo obdobně a důkaz lze ponechat čtenáři jako cvičení. □

6.9 Cvičení. Dokažte druhé tvrzení věty 6.8.

6.10 Věta. *Jestliže existuje integrál* $\int_a^b f \,\mathrm{d}g$, *pak také existuje i integrál* $\int_c^d f \,\mathrm{d}g$ *pro každý uzavřený podinterval* $[c,d]$ *intervalu* $[a,b]$, D ů k a z . Předpokládejme, že integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje. Podle Bolzanovy-Caychyovy podmínky pro KS–integrál (věta 6.6) existuje kalibr δ_ε takový, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')| < \varepsilon \tag{6.6}$$

platí pro všechna δ_ε– jemná značená dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a,b]$. Vzhledem k poznámce 6.7, můžeme předpokládat, že $\{c,d\} \subset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ a můžeme tedy rozložit $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ tak, že bude

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \boldsymbol{\rho}^- \cup \boldsymbol{\rho}_\varepsilon \cup \boldsymbol{\rho}^+, \text{ kde } \boldsymbol{\rho}^- \in \mathscr{D}[a,c],\ \boldsymbol{\rho}_\varepsilon \in \mathscr{D}[c,d],\ \boldsymbol{\rho}^+ \in \mathscr{D}[d,b].$$

Nyní, nechť $\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}' \in \mathscr{D}[c,d]$, $\boldsymbol{\rho} \supset \boldsymbol{\rho}_\varepsilon$, $\boldsymbol{\rho}' \supset \boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ a $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$, $(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}') \in \mathscr{T}[c,d]$. Definujme

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\rho}^- \cup \boldsymbol{\rho} \cup \boldsymbol{\rho}^+,\ \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}^- \cup \boldsymbol{\eta} \cup \boldsymbol{\eta}^+ \text{ a } \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\rho}^- \cup \boldsymbol{\rho}' \cup \boldsymbol{\rho}^+,\ \boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\eta}^- \cup \boldsymbol{\eta}' \cup \boldsymbol{\eta}^+$$

kde $\boldsymbol{\eta}^-,\boldsymbol{\eta}^+$ jsou takové, že $(\boldsymbol{\rho}^-,\boldsymbol{\eta}^-) \in \mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\rho}^+,\boldsymbol{\eta}^+) \in \mathscr{T}[d,b]$. Zřejmě je

$$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),\ (\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,b],\quad \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon,\quad \boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon,$$

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\rho}^-,\boldsymbol{\eta}^-) + S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) + S(\boldsymbol{\rho}^+,\boldsymbol{\eta}^+)$$

a

$$S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') = S(\boldsymbol{\rho}^-,\boldsymbol{\eta}^-) + S(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}') + S(\boldsymbol{\rho}^+,\boldsymbol{\eta}^+).$$

Podle (5.8) tedy máme

$$|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) - S(\boldsymbol{\rho}',\boldsymbol{\eta}')| = |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')| < \varepsilon$$

a odtud podle věty 6.6 plyne existence integrálu $\displaystyle\int_c^d f\,\mathrm{d}g$. □

6.11 Věta. *Nechť* $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ *a* $c \in [a,b]$. *Potom integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje právě tehdy, když existují oba integrály* $\displaystyle\int_a^c f\,\mathrm{d}g$ *a* $\displaystyle\int_c^b f\,\mathrm{d}g$. *V takovém případě pak platí rovnost*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^c f\,\mathrm{d}g + \int_c^b f\,\mathrm{d}g.$$

D ů k a z . Je-li $c = a$ nebo $c = b$, je tvrzení věty triviální. Nechť je tedy $c \in (a,b)$.

a) Existuje-li integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, pak podle věty 6.10 existují také oba integrály

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}g \quad \text{a} \quad \int_c^b f\,\mathrm{d}g.$$

b) Nechť

$$\int_a^c f\,\mathrm{d}g = I_1 \ \text{ a } \ \int_c^b f\,\mathrm{d}g = I_2.$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme kalibry $\delta'_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,c]$, $\delta''_\varepsilon \in \mathscr{G}[c,b]$ tak, aby pro všechna značená δ'_ε–jemná dělení $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a,c]$ a všechna δ''_ε–jemná dělení $(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'')$ intervalu $[c,b]$ platilo

$$|S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ a } \ |S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.7}$$

Definujme nyní kalibr δ_ε na $[a,b]$ předpisem

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \min\left\{\delta'_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(c-x)\right\}, & \text{když } x \in [a,c), \\ \min\left\{\delta'_\varepsilon(c), \delta''_\varepsilon(c)\right\}, & \text{když } x = c, \\ \min\left\{\delta''_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(x-x)\right\}, & \text{když } x \in (c,b]. \end{cases}$$

Potom,

$$x + \delta_\varepsilon(x) \le x + \frac{1}{4}(c-x) < c, \quad \text{je-li } x < c,$$

a

$$x - \delta_\varepsilon(x) \ge x - \frac{1}{4}(x-c) > c, \quad \text{je-li } x > c.$$

Pro žádné $x \neq c$ tedy nemůže být $c \in [x - \delta_\varepsilon(x), x + \delta_\varepsilon(x)]$. Pro každé δ_ε–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ tudíž existuje $k \in \{1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\sigma})\}$ tak, že $\xi_k = c$. Můžeme tedy předpokládat, že platí

$$\sigma_{k-1} < \sigma_k = \xi_k = c = \xi_{k+1} < \sigma_{k+1}.$$

Kdyby bylo

$$\sigma_{k-1} < c = \xi_k < \sigma_k,$$

upravili bychom příslušný člen v součtu $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ následujícím způsobem:

$$f(c)\,[g(\sigma_k) - g(\sigma_{k-1})] = f(c)\,[g(\sigma_k) - g(c)] + f(c)\,[g(c) - g(\sigma_{k-1})].$$

Existují tedy $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c,b]$ takové, že

$$(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon; [a,c]) \subset \mathscr{A}(\delta'_\varepsilon; [a,c]),\ (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon; [c,b]) \subset \mathscr{A}(\delta''_\varepsilon; [c,b])$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}'',\ \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}' \cup \boldsymbol{\xi}'',\ S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') + S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'').$$

Vezmeme-li v úvahu také (6.7), vidíme, že platí

$$\begin{aligned}|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - (I_1+I_2)| &= |S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') + S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') - (I_1+I_2)|\\ &\le |S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}') - I_1| + |S(\boldsymbol{\sigma}'',\boldsymbol{\xi}'') - I_2| < \varepsilon\end{aligned}$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b])$ neboli $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I_1 + I_2$. □

Mírnou úpravou způsobu volby vhodného kalibru použitého v důkazu předchozího tvrzení dostaneme následující užitečné lemma, které výstižně charakterizuje KS–integraci.

6.12 Lemma. *Pro libovolnou konečnou množinu* D *bodů intervalu* $[a,b]$ *existuje kalibr* δ *na* $[a,b]$ *takový, že* $D \subset \boldsymbol{\xi}$ *pro každé* δ*–jemné značené dělení* $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ *intervalu* $[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $D = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ a $a \le s_1, < s_2 \dots < s_k \le b$. Položme

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\,\min\{|x-s_j| : j = 1,2,\dots,m\} & \text{když } x \notin D,\\ 1, & \text{když } x \in D.\end{cases}$$

Nechť $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ je libovolné δ–jemné značené dělení intervalu $[a,b]$. Pro $j \in \{1,2,\dots,k\}$ máme

$$\xi_j + \delta(\xi_j) < \xi_j + \frac{1}{4}(s_j - \xi_j) < s_j \quad \text{když } \xi_j \in (s_{j-1}, s_j)$$

a

$$\xi_j - \delta(\xi_j) > \xi_j - \frac{1}{4}(s_j - \xi_j) > s_j \quad \text{když } \xi_j \in (s_j, s_{j+1}).$$

Čili,

$$s_j \in (\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)) \quad \text{tehdy a jen tehdy, když } \xi_j = s_j.$$

Tudíž, pro každé $j \in \{1,2,\dots,k\}$ a každé δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ musí být $s_j \in \boldsymbol{\xi}$. Jinými slovy, $D \subset \boldsymbol{\xi}$ pro každé δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$. □

6.2 Vztah k Riemannovu-Stieltjesovu a Perronovu-Stieltjesovu integrálu

Jestliže existuje integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, pak existuje také KS–integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a má tutéž hodnotu. Je-li totiž

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I \in \mathbb{R},$$

pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\Delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b] \text{ taková,že } |\boldsymbol{\sigma}| < \Delta_\varepsilon.$$

Potom $\delta_\varepsilon(x) \equiv \Delta_\varepsilon/2$ je kalibr s vlastnostmi zaručujícími rovnost $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I.$

Na druhou stranu, existuje-li integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I$ a jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí $\inf\{\delta_\varepsilon(x) : x \in [a,b]\} > 0$ a

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta),$$

pak také $(\delta)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I.$ Položíme-li totiž $\Delta_\varepsilon = \inf\{\delta_\varepsilon(x) : x \in [a,b]\},$ bude platit

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}([a,b]) \quad \text{takové, že } |\boldsymbol{\sigma}| < \Delta_\varepsilon.$$

Vztah mezi (σ)RS–integrálem a KS–integrálem není už tak evidentní.

6.13 Věta. *Jestliže existuje integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g,$ *pak existuje také* KS–*integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g.$$

D ů k a z . Označme $I = (\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g.$ Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \{s_0, s_1, \dots, s_m\}.$$

je dělení intervalu $[a,b]$ takové, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon$$

platí pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ takové, že $\boldsymbol{\sigma}$ jeho zjemnění. Podle lemmatu 6.12 existuje kalibr δ_ε takový, že

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\} \tag{6.8}$$

pro každé δ_ε–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$.

Budiž $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ libovolné δ_ε–jemné značené dělení intervalu $[a,b]$. Potom

$$\left.\begin{aligned} S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big[f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\xi_j)] + f(\xi_j)\,[g(\xi_j) - g(\sigma_{j-1})] \Big] \\ &= S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\boldsymbol{\xi}}), \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

kde

$$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \{\sigma_0, \xi_1, \sigma_1, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}, \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\xi}} = \{\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \dots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}.$$

(Kdyby bylo $\sigma_{k-1} = \xi_k$ nebo $\xi_k = \sigma_k$ pro nějaké k, pak bychom ovšem z $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}})$ odstranili intervaly $[\sigma_{k-1}, \xi_k]$ resp. $[\xi_k, \sigma_k]$ i příslušné značky.) Podle (6.8) máme

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \subset \boldsymbol{\xi} \subset \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Tudíž, díky (6.9) a vzhledem k definici dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$, dostáváme

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| = |S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) - I| < \varepsilon$$

což ovšem znamená, že $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}g = I$ a důkaz je tedy hotov. □

Všimněme si, že důkaz předchozí věty obsahoval i důkaz následujícího tvrzení.

6.14 Lemma. *Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Potom pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$ existuje $(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathscr{T}[a,b]$ takové, že $\boldsymbol{\xi} \subset \widetilde{\sigma} \cap \widetilde{\boldsymbol{\xi}}$ a $S(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \widetilde{\boldsymbol{\xi}}) = S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$.*

6.15 Příklady. Všimněme si nyní speciálního případu, kdy integrátor je identická funkce a KS–integrál se redukuje na KH–integrál.

(i) KH–integrál je zřejmě zobecněním klasického Riemannova integrálu.

(ii) Nechť $f(x) = 0$ na $[a,b] \setminus D$, kde D je spočetná podmnožina $[a,b]$, $D = \{d_k\}$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{když } x \notin D, \\ \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}(1 + |f(d_k)|)}, & \text{když } x = d_k \in D. \end{cases}$$

Nechť $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\substack{j=1 \\ \xi_j \in D}}^{m} f(\xi_j)\,[\sigma_j - \sigma_{j-1}].$$

Pro každé j takové, že $\xi_j = d_k \in D$ pro nějaké k, musí podle definice kalibru δ_ε platit

$$\sigma_j - \sigma_{j-1} \le \frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(d_k)|)}.$$

Odtud plyne, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f(d_k)|\,|\frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(d_k)|)} \le \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Podle definice 6.2 to znamená, že $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(iii) Nechť existuje Newtonův integrál (N)$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$ kde funkce F je spojitá na $[a,b]$ a platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a,b),\ \ F'(a+) = f(a),\ \ F'(b-) = f(b). \tag{6.10}$$

Ukážeme, že pak je KH–integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ roven $F(b)-F(a).$

Nechť je dáno $\varepsilon > 0.$ Vzhledem k (6.10) a podle definice derivace, pro každé $\xi \in [a,b]$ existuje $\delta_\varepsilon(\xi) > 0$ takové, že

$$|F(x) - F(\xi) - f(\xi)(x-\xi)| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,|x-\xi| \quad \text{pro } x \in [a,b] \cap (\xi - \delta_\varepsilon(\xi), \xi + \delta_\varepsilon(\xi)).$$

Buď $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ libovolné δ_ε–jemné dělení intervalu $[a,b]$ a $m = \nu(\boldsymbol{\sigma}).$ Potom

$$\begin{aligned}
&\big|F(\sigma_j) - F(\sigma_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\sigma_j - \sigma_{j-1}]\big| \\
&\quad \le \big|F(\sigma_j) - F(\xi_j) - f(\xi_j)\,[\sigma_j - \xi_j]\big| + \big|F(\xi_j) - F(\sigma_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\xi_j - \sigma_{j-1}]\big| \\
&\quad < \frac{\varepsilon}{b-a}\,\big(|\sigma_j - \xi_j| + |\xi_j - \sigma_{j-1}|\big) = \frac{\varepsilon}{b-a}\,[\sigma_j - \sigma_{j-1}] \quad \text{pro každé } j \in \{1,2,\dots,m\}
\end{aligned}$$

a tudíž

$$\begin{aligned}
&\big|[F(b) - F(a)] - S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| \\
&\quad = \Big|\sum_{j=1}^m \Big(F(\sigma_j) - F(\sigma_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\sigma_j - \sigma_{j-1}]\Big)\Big| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^m \big|F(\sigma_j) - F(\sigma_{j-1}) - f(\xi_j)\,[\sigma_j - \sigma_{j-1}]\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^m [\sigma_j - \sigma_{j-1}] = \varepsilon,
\end{aligned}$$

tj. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$

S Kurzweilovým-Stieltjesovým integrálem úzce souvisí interál *Perronův-Stieltjesův*. Jeho definice vlastně pochází od A.J. Warda [66]. Wardova definice je popsána také v monografii S. Sakse [45, VI.8] a je založena na pojmech *majorant* a *minorant*.

6.16 Definice. Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}.$ Řekneme, že funkce $M : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *majoranta* pro f vzhledem ke $g,$ jestliže existuje kalibr $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ takový, že

$$(t-\tau)\,\big[M(t) - M(\tau)\big] \ge (t-\tau)\,f(\tau)\,\big[g(t) - g(\tau)\big] \tag{6.11}$$

platí pro každé $\tau \in [a,b]$ a každé $t \in [a,b] \cap (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$.

Podobně, funkce $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *minoranta* pro f vzhledem ke g, jestliže existuje kalibr $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ takový, že

$$(t-\tau)\,\big[m(t) - m(\tau)\big] \le (t-\tau)\,f(\tau)\,\big[g(t) - g(\tau)\big] \tag{6.12}$$

platí pro každé $\tau \in [a,b]$ a každé $t \in [a,b] \cap (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$.

Množinu všech majorant pro f vzhledem ke g značíme symbolem $\mathfrak{M}(f\Delta\, g)$, zatímco $\mathfrak{m}(f\Delta\, g)$ značí množinu všech minorant pro f vzhledem ke g.

6.17 Definice. Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a

$$\mathfrak{M}(f\Delta\, g) \ne \emptyset \ne \mathfrak{m}(f\Delta\, g). \tag{6.13}$$

Potom definujeme

$$(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g = \inf\big\{M(b) - M(a) : M \in \mathfrak{M}[a,b]\big\}$$

a

$$(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g = \sup\big\{m(b) - m(a) : m \in \mathfrak{m}[a,b]\big\},$$

Veličinu $(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g$ nazveme *horní Perronův-Stieltjesův integrál* funkce f vzhledem ke g (od a do b), zatímco $(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g$ je *dolní Perronův-Stieltjesův integrál* funkce f vzhledem ke g od $(a$ do $b)$.

V případech, kdy neplatí (6.13), klademe

$$(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g = \infty \qquad \text{když} \quad \mathfrak{M}(f\Delta\, g) = \emptyset,$$

a

$$(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g = -\infty \qquad \text{když} \quad \mathfrak{m}(f\Delta\, g) = \emptyset.$$

Není překvapivé, že platí následující tvrzení.

6.18 Lemma. *Pro libovolné funkce* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *platí nerovnost*

$$(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g \le (\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g. \tag{6.14}$$

Důkaz. Je-li alespoň jedna z množin $\mathfrak{M}(f\Delta\, g)$ nebo $\mathfrak{m}(f\Delta\, g)$ prázdná, pak je nerovnost (6.14) splněna triviálně. Předpokládejme tedy, že platí (6.13).

Zvolme libovolně majorantu $M\in\mathfrak{M}(f\Delta\, g)$ a minorantu $m\in\mathfrak{m}(f\Delta\, g)$. Podle definice existují kalibry δ_1 a δ_2 na $[a,b]$ takové, že platí

$$(t-\tau)\,\big[M(t)-M(\tau)\big]\geq(t-\tau)\,f(\tau)\,\big[g(t)-g(\tau)\big]$$
$$\text{pro }\ \tau\in[a,b]\ \text{ a }\ t\in[a,b]\cap(\tau-\delta_1(\tau),\tau+\delta_1(\tau))$$

a

$$(t-\tau)\,\big[m(t)-m(\tau)\big]\leq(t-\tau)\,f(\tau)\,\big[g(t)-g(\tau)\big]$$
$$\text{pro }\ \tau\in[a,b]\ \text{ a }\ t\in[a,b]\cap(\tau-\delta_2(\tau),\tau+\delta_2(\tau)).$$

Položme $\delta(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$ pro $x\in[a,b]$. Potom

$$m(t)-m(\tau)\leq f(\tau)\,\big[g(t)-g(\tau)\big]\leq M(t)-M(\tau)$$
$$\text{pro }\ \tau\in[a,b]\ \text{ a }\ t\in[a,b]\cap[\tau,\tau+\delta(\tau))$$

a

$$m(\tau)-m(t)\leq f(\tau)\,\big[g(\tau)-g(t)\big]\leq M(\tau)-M(t)$$
$$\text{pro }\ \tau\in[a,b]\ \text{ a }\ t\in[a,b]\cap[\tau-\delta(\tau),\tau].$$

Speciálně, pro libovolné δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta)$ intervalu $[a,b]$ a každý index $j\in\{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\}$ máme

$$m(\sigma_j)-m(\xi_j)\leq f(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j)-g(\xi_j)\big]\leq M(\sigma_j)-M(\xi_j)$$

a

$$m(\xi_j)-m(\sigma_{j-1})\leq f(\xi_j)\,\big[g(\xi_j)-g(\sigma_{j-1})\big]\leq M(\xi_j)-M(\sigma_{j-1}).$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro $j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ získáme nerovnosti

$$m(b)-m(a)\leq S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\leq M(b)-M(a). \tag{6.15}$$

Odtud plyne, že nerovnost

$$m(b)-m(a)\leq M(b)-M(a)$$

platí pro každou majorantu $M\in\mathfrak{M}(f\Delta\, g)$ a každou minorantu $m\in\mathfrak{m}(f\Delta\, g)$. Tudíž,

$$(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=\sup\big\{m(b)-m(a):m\in\mathfrak{m}[a,b]\big\}$$
$$\leq\inf\big\{M(b)-M(a):M\in\mathfrak{m}[a,b]\big\}=(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g.$$

Dokázali jsme tedy nerovnost (6.14). $\square$

6.19 Poznámka. Všimněme si, důkaz předešlého lemmatu obsahuje důkaz tvrzení:
Pro libovolné funkce $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a libovolnou jejich majorantu* $M \in \mathfrak{M}(f \Delta g)$ *a minorantu* $m \in \mathfrak{m}(f \Delta g)$ *existuje kalibr* δ *na* $[a,b]$ *takový, že nerovnosti* (6.15) *platí pro každé* δ*–jemné značené dělení* $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ *intervalu* $[a,b]$.

6.20 Definice. Jestliže

$$(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = (\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g \in \mathbb{R},$$

pak říkáme, že existuje *Perronův-Stieltjesův integrál* (zkráceně PS–integral) $(\mathrm{PS})\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ funkce f vzhledem ke g od a do b. Jeho hodnota je určena společnou hodnotou horního a dolního integrálu, tj.

$$(\mathrm{PS})\int_a^b f \,\mathrm{d}g = (\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g = (\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f \,\mathrm{d}g.$$

Vztah PS–integrálu a KS–integrálu popisuje následující věta.

6.21 Věta. *Integrál* $(\mathrm{PS})\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ *existuje tehdy a jen tehdy, když existuje* KS*–integrál* $\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ *a v takovém případě mají oba integrály stejnou hodnotu,*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}g = (\mathrm{PS})\int_a^b f \,\mathrm{d}g. \tag{6.16}$$

D ů k a z . a) Předpokládejme, že $(\mathrm{PS})\int_a^b f \,\mathrm{d}g = I \in \mathbb{R}$ a nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Podle definice dolního a horního PS–integrálu and PS–integrálu existují majoranta $M \in \mathfrak{M}(f \Delta g)$ a minoranta $m \in \mathfrak{m}(f \Delta g)$ takové, že

$$M(b) - M(a) - \varepsilon < I < m(b) - m(a) + \varepsilon$$

neboli

$$I - \varepsilon < m(b) - m(a) \quad \text{a} \quad M(b) - M(a) < I + \varepsilon. \tag{6.17}$$

Podle poznámky 6.19 existuje kalibr δ na $[a,b]$ takový, že (6.15) platí pro každé δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$. Kombinací nerovností (6.15) a (6.17) zjistíme, že nerovnosti

$$I - \varepsilon < m(b) - m(a) \le S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \le M(b) - M(a) < I + \varepsilon$$

platí pro každé δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$. Odtud plynou existence KS– integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a rovnost (6.16).

b) Předpokládejme, že existuje integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I \in \mathbb{R}$ a je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Podle definice 6.2 existuje kalibr δ_ε takový, že

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) < I + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,b]). \tag{6.18}$$

Definujme $M(a) = m(a) = 0$,

$$M(x) = \sup\left\{S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) : (\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,x]\right) \quad \text{pro } x \in (a,b]$$

a

$$m(x) = \inf\left\{S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) : (\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon;[a,x]\right) \quad \text{pro } x \in (a,b].$$

Podle (6.18) máme

$$I - \varepsilon < I - \frac{\varepsilon}{2} \le m(b) - m(a) \le M(b) - M(a) \le I + \frac{\varepsilon}{2} << I + \varepsilon. \tag{6.19}$$

Nechť $x \in [a,b)$ a $t \in [x, x+\delta_\varepsilon) \cap [a,b]$ and nechť $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$ je libovolné značené dělení intervalu $[a,x]$. Potom platí

$$S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}) + f(x)\,[g(t) - g(x)] = S(\widetilde{\boldsymbol{\rho}},\widetilde{\boldsymbol{\eta}}), \tag{6.20}$$

kde $\widetilde{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{\rho} \cup \{t\}$ a $\widetilde{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta} \cup \{x\}$. Přechodem k supremu na obou stranách rovnosti (6.20) obdržíme nerovnosti

$$M(t) \ge M(x) + f(x)\,[g(t) - g(x)] \quad \text{pro } x \in [a,b) \text{ a } t \in [x, x+\delta_\varepsilon) \cap [a,b].$$

Analogicky,

$$M(x) \ge M(t) + f(x)\,[g(x) - g(t)] \quad \text{pro } x \in (a,b] \text{ a } t \in (x-\delta_\varepsilon, x] \cap [a,b].$$

Podobně, můžeme dokázat i následující nerovnosti

$$m(t) \le m(x) + f(x)\,[g(t) - g(x)] \quad \text{pro } x \in [a,b] \text{ a } t \in [x, x+\delta_\varepsilon) \cap [a,b]$$

a

$$m(x) \le m(t) + f(x)\,[g(x) - g(t)] \quad \text{pro } x \in [a,b] \text{ a } t \in (x-\delta_\varepsilon, x] \cap [a,b].$$

Funkce M je tedy majoranta a funkce m minoranta pro f vzhledem ke g. Podle definice 6.17, lemmatu 6.18 a nerovnosti (6.17) tudíž dostaneme

$$I - \varepsilon < m(b) - m(a) \le (\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g \le (\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g \le M(b) - M(a) < I + \varepsilon$$

a protože $\varepsilon > 0$ bylo libovoné, znamená to, že platí

$$(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g = (\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g = (\mathrm{PS})\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I.$$

Dokázali jsme vztah (6.16). □

6.3 Existence integrálu

V příkladech 6.15 jsme určili hodnoty některých KH–integrálů přímo z definice. Nyní si ukážeme, jak lze v některých jednoduchých příkladech určit z definice hodnoty KS–integrálu.

6.22 Příklady. (i) Z definice 6.2 je zřejmé, že je-li $f(t) \equiv f(a)$ na $[a,b]$, pak

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = f(a)\,[g(b)-g(a)] \quad \text{a} \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f = 0$$

pro každou funkci $g:[a,b]\to\mathbb{R}$.

(ii) Pro libovolnou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{(\tau,b]} = f(\tau) \qquad \text{pro } \tau\in[a,b), \tag{6.21}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} = f(\tau) \qquad \text{pro } \tau\in(a,b], \tag{6.22}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[a,\tau]} = -f(\tau) \quad \text{pro } \tau\in[a,b), \tag{6.23}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[a,\tau)} = -f(\tau) \quad \text{pro } \tau\in(a,b] \tag{6.24}$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau]} = \begin{cases} -f(a) & \text{pro } \tau=a,\\ 0 & \text{pro } \tau\in(a,b),\\ f(b) & \text{pro } \tau=b. \end{cases} \tag{6.25}$$

Ukažme si odvození vztahů (6.21) a (6.22). Zbývající se z nich už odvodí pomocí věty 6.11.

a) Nechť $\tau\in[a,b)$ a $g(x)=\chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je $g\equiv 0$ na $[a,\tau]$ a tedy podle příkladu (i) máme

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}g = 0.$$

Podle lemmatu 6.12, existuje kalibr δ na $[\tau,b]$ takový, že je $\tau=\sigma_0=\xi_1$ pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta;[\tau,b])$. Navíc,

$$g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})=0 \quad \text{pro } j=2,3,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma}).$$

Tudíž,

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(\tau)\,[g(\sigma_1)-g(\tau)] = f(\tau) \quad \text{a} \quad \int_\tau^b f\,\mathrm{d}g = f(\tau).$$

Důkaz relace (6.21) dokončíne pomocí věty 6.11.

b) Vztah (6.22) se dokazuje analogicky. Tentokrát ovšem máme

$$\tau \in (a,b], \quad g(x) = \chi_{[\tau,b]}(x) \;\text{ a }\; \int_\tau^b f \,\mathrm{d}g = 0.$$

Podle lemmatu 6.12 můžeme zvolit kalibr δ na $[a,\tau]$ tak, aby

$$\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = \tau$$

platilo pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta;[a,\tau])$. Potom pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta;[a,\tau])$ dostaneme také

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(\tau)\,[g(\tau) - g(\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1})] = f(\tau) \quad\text{a}\quad \int_a^\tau f \,\mathrm{d}g = f(\tau).$$

Platí tedy relace (6.22).

(iii) Pro libovolnou funkci g regulovanou na $[a,b]$ platí

$$\int_a^b \chi_{(\tau,b]} \,\mathrm{d}g = g(b) - g(\tau+) \quad \text{pro } \tau \in [a,b), \tag{6.26}$$

$$\int_a^b \chi_{[\tau,b]} \,\mathrm{d}g = g(b) - g(\tau-) \quad \text{pro } \tau \in (a,b], \tag{6.27}$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}g = g(\tau+) - g(a) \quad \text{pro } \tau \in [a,b), \tag{6.28}$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau)} \,\mathrm{d}g = g(\tau-) - g(a) \quad \text{pro } \tau \in (a,b] \tag{6.29}$$

a

$$\int_a^b \chi_{[\tau]} \,\mathrm{d}g = \begin{cases} \Delta^+ g(a) & \text{pro } \tau = a, \\ \Delta\, g(\tau) & \text{pro } \tau \in (a,b), \\ \Delta^- g(b) & \text{pro } \tau = b. \end{cases} \tag{6.30}$$

Opět se omezíme na důkaz prvních dvou vztahů.

a) Nechť tedy nejprve $\tau \in [a,b)$ a $f(x) = \chi_{(\tau,b]}(x)$. Potom

$$\int_a^\tau f \,\mathrm{d}g = 0.$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\eta_\varepsilon > 0$ je takové, že

$$|g(\tau+) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{pro } x \in (\tau, \tau+\eta_\varepsilon).$$

Podle lemmatu 6.12 můžeme zvolit kalibr δ na $[\tau, b]$ tak, aby bylo $\tau = \sigma_0 = \xi_1$ pro každé δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[\tau, b]$. Položme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \min\{\eta_\varepsilon, \delta(\tau)\} & \text{když } x = \tau, \\ \delta(x), & \text{když } x \in (\tau, b]. \end{cases}$$

Potom pro každé δ_ε–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[\tau, b]$ bude

$$\tau = \sigma_0 = \xi_1 \ \text{ a } \ \sigma_1 \in (\tau, \tau + \eta_\varepsilon)$$

a tudíž

$$\begin{aligned} &|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - [g(b) - g(\tau+)]| \\ &\quad = \Big| [g(b) - g(\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1})] + [g(\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1}) - g(\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-2}] \\ &\qquad + \cdots + [g(\sigma_2) - g(\sigma_1)] - [g(b) - g(\tau+)] \Big| \\ &\quad = |g(\tau+) - g(\sigma_1)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Proto

$$\int_\tau^b f \, \mathrm{d}g = g(b) - g(\tau+),$$

a, díky větě 6.11,

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g = \int_a^\tau f \, \mathrm{d}g + \int_\tau^b f \, \mathrm{d}g = g(b) - g(\tau+),$$

tj. relace (6.26) platí.

b) Ve druhém případě je $\tau \in (a, b]$ a $f(x) = \chi_{[\tau, b]}(x)$ pro $x \in [a, b]$. Máme

$$\int_\tau^b f \, \mathrm{d}g = g(b) - g(\tau).$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\eta > 0$ tak, aby bylo $|g(\tau-) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in (\tau - \eta, \tau)$. Dále, pomocí lemmatu 6.12 zvolme kalibr δ na $[a, \tau]$ takový, že $\tau = \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}$ pro každé δ_ε–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a, \tau]$. Položme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \delta(x), & \text{když } x \in [a, \tau), \\ \min\{\eta_\varepsilon, \delta(\tau)\} & \text{když } x = \tau. \end{cases}$$

Pro dané $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta; [a, \tau])$ je

$$\tau = \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}, \ \ \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1} \in (\tau - \eta_\varepsilon, \tau), \ \ S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = g(\tau) - g(\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1}).$$

Dále, vzhledem k definici η_ε, máme

$$\begin{aligned}|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - [g(\tau) - g(\tau-)]| &= |[g(\tau) - g(\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1})] - [g(\tau) - g(\tau-)]|\\ &= |g(\tau-) - g(\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1})| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Tudíž,

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}g = g(\tau) - g(\tau-)$$

a konečně, díky větě 6.11,

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^\tau f\,\mathrm{d}g + \int_\tau^b f\,\mathrm{d}g = g(b) - g(\tau-).$$

Pokud jde o existenci integrálu, protože každá jednoduchá skoková funkce je konečnou lineární kombinací funkcí tvaru $\chi_{(\tau,b]}$, $\chi_{[\tau,b]}$, $\chi_{[b]}$, kde τ může být libovolný bod z $[a,b)$ (viz (2.30)), můžeme výše uvedené příklady shrnout do následujícího tvrzení.

6.23 Důsledek. *Jestliže* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $f \in \mathbb{S}[a,b]$, *pak oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad \textit{a} \quad \int_a^b g\,\mathrm{d}f$$

existují.

6.24 Cvičení. Dokažte následující tvrzení:

Nechť

$$h:[a,b] \to \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\} \subset [a,b] \ \textit{ a } \ h(x) = c \ \textit{ pro } x \in [a,b] \setminus D.$$

Potom

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}h = f(b)\,h(b) - f(a)\,h(a) - \big(f(b) - f(a)\big)\,c \quad \textit{pro každou funkci } f:[a,b] \to \mathbb{R}.$$

Návod: Funkci h zapište ve tvaru $h(x) = c + \sum_{k=1}^{n} \big[h(d_k) - c\big]\,\chi_{[d_k]}(x)$ a použijte výsledků z příkladů 6.22.

Další tři věty nám poskytují základní odhady pro KS–integrály za předpokladu, že tyto integrály existují. První dvě z nich nevyžadují žádné další předpoklady o funkcích f and g. Je ovšem zřejmé, že praktický význam mají tyto věty pouze za předpokladu, že f je ohraničená na $[a,b]$ a g má konečnou variaci na $[a,b]$ (ve větě 6.25) resp. f má konečnou variaci na $[a,b]$ a g je ohraničená na $[a,b]$ (ve větě 6.26).

6.25 Věta. *Nechť* $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Potom*

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|\le\|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g \quad \textit{holds pro each}\ \ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]. \tag{6.31}$$

Jestliže navíc existuje integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big|\le\|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g. \tag{6.32}$$

A jestliže k tomu existuje i integrál $\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^x g]$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big|\le\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^x g]\le\|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g. \tag{6.33}$$

D ů k a z plyne z toho, že nerovnosti

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|\le\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}|f(\xi_j)|\,|g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})|\le\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}|f(\xi_j)|\,\big(\mathrm{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\,g\big)\le\|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g$$

platí pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$. □

6.26 Věta. *Nechť* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Potom*

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|\le(|f(a)|+|f(b)|+\mathrm{var}_a^b\,f)\,\|g\| \quad \textit{pro každé}\ \ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]. \tag{6.34}$$

Jestliže existuje integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, *pak platí také*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big|\le\big(|f(a)|+|f(b)|+\mathrm{var}_a^b\,f\big)\,\|g\|. \tag{6.35}$$

Důkaz. For an arbitrary $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}\,[a,b]$ máme

$$\begin{aligned}
S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= f(\xi_1)\,[g(\sigma_1)-g(a)]+f(\xi_2)\,[g(\sigma_2)-g(\sigma_1)]\\
&\qquad\qquad +\cdots+f(\xi_m)\,[g(b)-g(\sigma_{m-1})]\\
&= f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)\\
&\qquad -[f(\xi_1)-f(a)]\,g(a)-[f(\xi_2)-f(\xi_1)]\,g(\sigma_1)\\
&\qquad\qquad -\cdots-[f(b)-f(\xi_m)]\,g(b)\\
&= f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)-\sum_{j=0}^{m}[f(\xi_{j+1})-f(\xi_j)]\,g(\sigma_j),
\end{aligned}$$

kde $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$, $\xi_0=a$ a $\xi_{m+1}=b$. Nyní už nerovnosti (6.34) a (6.35) okamžitě plynou. □

6.27 Poznámka. Zpravidla ovšem vystačíme s trochu hrubšími odhady

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| \le 2\,\|f\|_{\mathbb{BV}}\,\|g\| \quad \text{pro} \ \ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$$

a

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big| \le 2\,\|f\|_{\mathbb{BV}}\,\|g\|$$

místo (6.34) resp. (6.35).

Také další jednoduchý odhad integrálu se opírá přímo o definici KS–integrálu.

6.28 Věta. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jsou takové, že integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje. Dále, nechť existují kalibr* $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ *a funkce* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neklesající na* $[a,b]$ *takové, že*

$$\left.\begin{aligned} &\tau \in [a,b] \quad \textit{a} \quad t \in (\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau)) \cap [a,b] \\ &\quad \Longrightarrow \ |t-\tau|\,|f(\tau)|\,|g(t)-g(\tau)| \le (t-\tau)\,\big(u(t)-u(\tau)\big). \end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

Potom

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big| \le u(b)-u(a). \tag{6.37}$$

D ů k a z . Pro každé δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ máme podle (6.36)

$$\begin{aligned} |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\xi_j)|\,\big(|g(\sigma_j)-g(\xi_j)| + |g(\xi_j)-g(\sigma_{j-1})|\big) \\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(u(\sigma_j)-u(\sigma_{j-1})\big) = u(b)-u(a). \end{aligned}$$

Vzhledem k definici KS–integrálu plyne odtud nerovnost (6.37). □

Věta 6.25 nám umožní dokázat nejjednodušší větu o konvergenci integrálů.

6.29 Věta. *Nechť* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na* $[a,b]$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a nechť posloupnost* $\{f_n\}$ *funkcí definovaných na intervalu* $[a,b]$ *je taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0, \tag{6.38}$$

přičemž existují všechny integrály $\displaystyle\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g$, $n \in \mathbb{N}$. *Potom existuje také integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,\mathrm{d}g = \int_a^b f\,\mathrm{d}g. \tag{6.39}$$

D ů k a z . a) Protože f je ohraničená, plyne z předpokladu (6.38), že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\|f_n\| \leq \|f\| + 1 < \infty \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Podle věty 6.25 tedy máme

$$\Big|\int_a^b f_n \, \mathrm{d}g\Big| \leq (\|f\| + 1) \operatorname{var}_a^b g < \infty \quad \text{pro všechna } n \geq n_0.$$

Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existují rostoucí posloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \geq n_0$ a

$$\lim_{k \to \infty} \int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}g = I. \tag{6.40}$$

b) Označme

$$\left.\begin{aligned} I_k &= \int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}g && \text{pro } k \in \mathbb{N}, \\ S_k(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) &= S_{f_{n_k} \Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) && \text{pro } k \in \mathbb{N},\ (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b], \\ S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) &= S_{f \Delta g}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) && \text{pro } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{6.41}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k (6.38) a (6.40) můžeme zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí

$$|I_k - I| < \varepsilon \ \text{ a } \ \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon \quad \text{pro } k \geq k_0. \tag{6.42}$$

Dále nechť $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro všechna δ_0–jemná značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ platí

$$|S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_{k_0}| < \varepsilon. \tag{6.43}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ máme podle (6.42)

$$\begin{aligned} \big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\big| &= \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\xi_j) - f_{n_{k_0}}(\xi_j)\big)\big(g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big)\Big| \\ &< \|f_{n_{k_0}} - f\| \, V(g, \boldsymbol{\sigma}) \leq \varepsilon \operatorname{var}_a^b g. \end{aligned}$$

Tudíž, vzhledem k (6.42) a (6.43), dostáváme

$$\begin{aligned} |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| &\leq |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})| + |S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| \\ &< \varepsilon \, (\operatorname{var}_a^b g + 2) \end{aligned}$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$. To znamená, že platí

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g = I = \lim_{k \to \infty} \int_a^b f_{n_k} \, \mathrm{d}g.$$

c) Konečně, pomocí vět 6.8 a 6.25 dostaneme

$$\left|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}g - \int_a^b f \,\mathrm{d}g\right| \le \|f_n - f\| \operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Vzhledem k (6.38) tedy platí i (6.39). □

Nyní můžeme formulovat první významnější existenční výsledek.

6.30 Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom integrál* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ *existuje a platí* (6.31).

D ů k a z . Pro každou regulovanou funkci f existuje posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých skokových funkcí, která konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k funkci f (viz větu 4.7). Podle důsledku 6.23 existují všechny integrály $\displaystyle\int_a^b f_n \,\mathrm{d}g$, $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že podle věty 6.29 existuje také integrál $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ a platí (6.39).

Zřejmě $|f| \in \mathbb{G}[a,b]$. Podle předchozí části důkazu tedy existuje také integrál

$$\int_a^b |f(x)| \,\mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^x g\big],$$

a tudíž podle věty 6.25 platí (6.31). □

Ukážeme si jednu ne zcela triviální aplikaci vět 6.28 a 6.30.

6.31 Věta. *Předpokládejme, že funkce* $h\colon [a,b] \to [0,\infty)$ *je neklesající a zleva spojitá na* $(a,b]$. *Potom pro každé* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *platí*

$$\int_a^b h^k \,\mathrm{d}\,h \le \frac{h^{k+1}(b) - h^{k+1}(a)}{k+1}. \tag{6.44}$$

D ů k a z . Povšimněme si nejprve toho, že podle věty 6.30 integrál na levé straně nerovnosti (6.44) existuje pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Formule (6.44) triviálně platí, je-li $k = 0$ nebo je-li funkce h konstantní. Předpokládejme tedy, že h není konstantní. Buď dáno libovolné $k \in \mathbb{N}$. Podle věty 6.28 potřebujeme najít kalibr δ takový, že

$$\left.\begin{aligned} (t-\tau)\, h^k(\tau)\, (h(t) - h(\tau)) \le (t-\tau)\, \frac{h^{k+1}(t) - h^{k+1}(\tau)}{k+1} \\ \text{pro } \ \tau \in [a,b] \quad \text{a} \quad t \in (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)) \cap [a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

Po provedení elementární úpravy

$$\frac{h^{k+1}(t) - h^{k+1}(\tau)}{k+1} = \frac{h(t) - h(\tau)}{k+1} \Big[\sum_{i=0}^{k} h^{k-i}(t)\, h^i(\tau)\Big] \tag{6.46}$$

si snadno rozmyslíme, že pro daná t, τ bude platit nerovnost v (6.45) bude-li

$$h^k(\tau) \leq \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} h^{k-i}(t)\, h^i(\tau). \tag{6.47}$$

Vzhledem k monotónnosti funkce h je $h^{k-i}(t) \geq h^{k-i}(\tau)$ pro $t \in (\tau, b\,]$. Odtud okamžitě plyne, že nerovnost (6.47) platí pro $t \in [\tau, b\,]$.

Na druhou stranu, díky spojitosti funkce h zleva, pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $\tau \in (a, b\,]$ existuje $\delta(\tau) > 0$ takové, že platí

$$h^{k-i}(t) > h^{k-i}(\tau) - \frac{\varepsilon}{\Delta}$$

pro každé $t \in (\tau - \delta(\tau), \tau\,]$ a každé $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$, kde

$$\Delta = \max\{\|h^i\|,\ \|h\|^i : i = 0, 1, \ldots, k\} = \max\{h^i(b) : i = 0, 1, \ldots, k\}.$$

Zřejmě je $1 \leq \Delta < \infty$. To dále znamená, že je

$$\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} h^{k-i}(t)\, h^i(\tau) > \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} \Big(h^k(\tau) - \|h^i\|\, \frac{\varepsilon}{\Delta}\Big) \geq h^k(\tau) - \varepsilon$$

pro každé $\varepsilon > 0$, $\tau \in (a, b\,]$ a $t \in (\tau - \delta(\tau), \tau\,]$.

Položme ještě $\delta(a) = 1$. Potom můžeme naše úvahy shrnout tak, že nerovnost (6.47) platí pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\tau \in [a, b]$ a $t \in (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau)) \cap [a, b]$. Platí tedy také (6.45) a pomocí věty 6.28, kde položíme

$$f(t) = h^k(t),\ g(t) = h(t) \quad \text{a} \quad u(t) = \frac{h^{k+1}(t)}{k+1} \quad \text{pro } t \in [a, b], \tag{6.48}$$

dostaneme tedy konečně (6.44). □

6.32 Cvičení. Dokažte tvrzení doplňující větu 6.31:

Nechť funkce $h : [a, b] \to [0, \infty)$ *je nerostoucí a zprava spojitá na* $[a, b\,)$. *Potom pro každé* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *platí*

$$\int_a^b h^k \, \mathrm{d}\, h \geq \frac{h^{k+1}(b) - h^{k+1}(a)}{k+1}.$$

Následující konvergenční výsledek je tak trochu symetrický k větě 6.29.

6.33 Věta. *Nechť* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *je ohraničená na* $[a, b]$, $g \in \mathbb{BV}[a, b]$ *a nechť posloupnost* $\{g_n\}$ *funkcí definovaných na intervalu* $[a, b]$ *je taková, že platí*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (g_n - g) = 0,$$

přičemž existují všechny integrály $\int_a^b f\,\mathrm{d}g_n,\ n\in\mathbb{N}.$ *Potom existuje také integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}g_n=\int_a^b f\,\mathrm{d}g. \tag{6.49}$$

D ů k a z . Důkaz je podobný důkazu věty 6.29. Existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že platí

$$\operatorname{var}_a^b g_n\le\operatorname{var}_a^b g+1\quad\text{pro všechna } n\ge n_0.$$

Podle věty 6.25 tedy máme

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}g_n\Big|\le\|f\|\,(\operatorname{var}_a^b g+1)\quad\text{pro všechna } n\ge n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty tedy existují číslo $I\in\mathbb{R}$ a rostoucí posloupnost $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$ takové, že platí $n_1\ge n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}g_{n_k}=I.$$

Podobně jako v (6.41) označme

$$\left.\begin{aligned} I_k&=\int_a^b f\,\mathrm{d}g_{n_k} && \text{pro } k\in\mathbb{N},\\ S_k(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})&=S_{f\Delta g_{n_k}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) && \text{pro } k\in\mathbb{N},\ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b],\\ S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})&=S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) && \text{pro } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b].\end{aligned}\right\} \tag{6.50}$$

Buď dáno $\varepsilon>0$. Zvolme $k_0\in\mathbb{N}$ a kalibr $\delta_0\in\mathscr{G}[a,b]$ tak, aby platilo

$$|I_{k_0}-I|<\varepsilon,\quad \operatorname{var}_a^b(g_{n_{k_0}}-g)<\varepsilon$$

a

$$|S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})]-I_{k_0}|<\varepsilon \text{ pro } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_0).$$

Potom pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_0)$ máme

$$\begin{aligned}\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big|&=\Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}f(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})-g_{n_{k_0}}(\sigma_j)+g_{n_{k_0}}(\sigma_{j-1})\big]\Big|\\ &\le\|f\|\,V(g_{n_{k_0}}-g,\boldsymbol{\sigma})\le\|f\|\operatorname{var}_a^b(g_{n_{k_0}}-g)\le\varepsilon\,\|f\|.\end{aligned}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_0)$ tedy platí

$$\begin{aligned}&|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|\\ &\quad\le|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|+|S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I_{k_0}|+|I_{k_0}-I|\\ &\quad<\varepsilon\,(\|f\|+2).\end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g = I = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f \, \mathrm{d}g_{n_k}.$$

Konečně, opětovným použitím vět 6.8 a 6.25 dostaneme

$$\left|\int_a^b f \, \mathrm{d}g_n - \int_a^b f \, \mathrm{d}g\right| \le \|f\| \operatorname{var}_a^b (g_n - g) \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Platí tedy (6.49). □

Víme, že je-li funkce f regulovaná na $[a,b]$ a g má konečnou variaci na $[a,b]$, pak podle věty 6.30 existuje integrál $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$. Při aplikacích potřebujeme ovšem také pracovat s případem, že $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a $g \in \mathbb{G}[a,b]$. Při důkazu existence integrálu v této situaci nám dobře poslouží další konvergenční věta.

6.34 Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *a nechť posloupnost* $\{g_n\}$ *funkcí definovaných na intervalu* $[a,b]$ *je taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\| = 0, \tag{6.51}$$

přičemž existují všechny integrály $\int_a^b f \, \mathrm{d}g_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Potom existuje také integrál* $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f \, \mathrm{d}g_n = \int_a^b f \, \mathrm{d}g. \tag{6.52}$$

D ů k a z . a) Podle předpokladu (6.51) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\|g_n - g_m\| < \frac{\varepsilon}{2\,\|f\|_{\mathbb{BV}}} \quad \text{pro všechna } m, n \ge n_1. \tag{6.53}$$

Podle našich předpokladů jsou také definovány všechny integrály

$$I_n := \int_a^b f \, \mathrm{d}[g_n], \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Podle (6.53) a podle věty 6.26 (viz též poznámku 6.27) proto platí

$$\left|\int_a^b f \, \mathrm{d}[g_n - g_m]\right| \le 2\,\|f\|_{\mathbb{BV}}\, \|g_n - g_m\| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } m, n \ge n_1.$$

Posloupnost reálných čísel $\left\{\int_a^b f \, \mathrm{d}[g_n]\right\}$ je Cauchyovská a tedy má konečnou limitu, tj. existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f \, \mathrm{d}g_n = I. \tag{6.54}$$

b) Dokážeme, že $\int_a^b f \, \mathrm{d}g = I$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo současně

$$|I_{n_0} - I| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|g_{n_0} - g\| < \frac{\varepsilon}{2\,\|f\|_{\mathbb{BV}}}. \tag{6.55}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}(\delta_0)$ označme

$$S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) := S_{f\Delta\, g_{n_0}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,[g_{n_0}(\sigma_j) - g_{n_0}(\sigma_{j-1})].$$

Dále, zvolme kalibr $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ tak, aby platilo

$$|S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_{n_0}| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0). \tag{6.56}$$

Podle poznámky 6.27 a podle nerovností (6.55), (6.56) pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ dostáváme

$$\begin{aligned} |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| &\le |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})| + |S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_{n_0}| + |I_{n_0} - I| \\ &= |S_{f\Delta\,[g - g_{n_0}]}| + |S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_{n_0}| + |I_{n_0} - I| \\ &\le 2\,\|f\|_{\mathbb{BV}}\,\|g - g_{n_0}\| + |S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_{n_0}| + |I_{n_0} - I| < 3\,\varepsilon, \end{aligned}$$

čili

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| < 3\,\varepsilon \quad \text{pro } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0).$$

To ovšem znamená, že $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ existuje a platí (6.52). □

Nyní už můžeme dokázat existenční větu o jejíž potřebě jsme se o trochu výše zmínili.

6.35 Věta. *Jestliže* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, $g \in \mathbb{G}[a,b]$, *pak integrál* $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ *existuje a platí* (6.35).

D ů k a z . Zvolme posloupnost $\{g_n\}$ jednoduchých skokových funkcí, která konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k funkci g (viz větu 4.7). Podle důsledku 6.23 existují všechny integrály $\int_a^b f_n \, \mathrm{d}g$, $n \in \mathbb{N}$. To znamená, že podle věty 6.26 existuje také integrál $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ a platí (6.35). □

Víme, že stejnoměrná limita regulovaných funkcí je regulovaná funkce (viz větu 4.3). Následující konvergenční tvrzení je tedy přímým důsledkem vět 6.26 a 6.35.

6.36 Důsledek. *Jestliže* $g_n \in \mathbb{G}[a,b]$ *pro* $n \in \mathbb{N}$ *a* $\lim_{n\to\infty} \|g_n - g\| = 0$, *pak pro každou funkci* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}g_n = \int_a^b f \,\mathrm{d}g. \tag{6.57}$$

Následuje další varianta konvergenčního tvrzení, která není pokryta větami, které jsme zatím uvedli. Jeho důkaz je ovšem založen na stejném principu jako důkaz věty 6.34.

6.37 Věta. *Předpokládejme, že funkce* g *je ohraničená na* $[a,b]$ *a* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Nechť posloupnost* $\{f_n\} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ *je taková, že*

$$\int_a^b f_n \,\mathrm{d}g \quad \textit{existuje pro každé } n \in \mathbb{N} \ \textit{ a } \ \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{BV}} = 0.$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}g = \int_a^b f \,\mathrm{d}g.$$

D ů k a z . Podle vět 6.8 a 6.26 (viz též poznámku 6.27) je

$$\left| \int_a^b f_n \,\mathrm{d}g - \int_a^b f_m \,\mathrm{d}g \right| \le 2\,\|g\|\,\|f_n - f_m\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro libovolná } m, n \in \mathbb{N}.$$

Posloupnost $\left\{ \int_a^b f_n \,\mathrm{d}g \right\}$ je tedy cauchyovská a existuje $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}g = I.$$

Ukážeme, že $\int_a^b f \,\mathrm{d}g = I$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\left| \int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}g - I \right| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|f_{n_0} - f\|_{\mathbb{BV}} < \varepsilon.$$

Dále zvolme $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,b]$ tak, aby pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platilo

$$\left| S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_0} \,\mathrm{d}g \right| < \varepsilon,$$

kde $S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = S_{f_{n_0}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$. Podle (6.34) pro libovolné $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}(\delta_\varepsilon)$ máme

$$\begin{aligned}
&\left| S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \right| \\
&\quad \le \Big(|f(a) - f_{n_0}(a)| + |f(b) - f_{n_0}(b)| + \operatorname{var}_a^b (f - f_{n_0}) \Big)\,\|g\| \\
&\quad \le 2\,\|f - f_{n_0}\|_{\mathbb{BV}}\,\|g\|.
\end{aligned}$$

Souhrnem, pro libovolné $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ dostáváme

$$\begin{aligned}
&|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|\\
&\quad\le \left|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\right|+\left|S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}g\right|\\
&\qquad\qquad+\left|\int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}g-I\right|\\
&\quad< 2\,\|f-f_{n_0}\|_{\mathbb{BV}}\,\|g\|+2\,\varepsilon<\varepsilon\,2\,(\|g\|+1).
\end{aligned}$$

Odtud plyne rovnost

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g=I=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g.$$

□

Na závěr tohoto odstavce si ukážeme návod k výpočtu integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g,$ je-li známa hodnota integrálu $\displaystyle\int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}g,$ kde $f^{\,\mathrm{C}}$ je spojitá část funkce f. V následujícím tvrzení objeví se objeví součtový symbol

$$\sum_{d\in D}\left[\Delta^- f(d)\,(g(b)-g(d-))+\Delta^+ f(d)\,(g(b)-g(d+))\right], \tag{6.58}$$

kde D je množina bodů nespojitosti funkce $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ v otevřeném intervalu (a,b). Množina D má tedy nejvýše spočetně mnoho prvků. Je-li konečná, pak význam symbolu (6.58) je evidentní. Je-li D nekonečná, pak existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $k\in\mathbb{N}\to d_k\in D$ takové, že $D=\{d_k\}$. Takových zobrazení je sice nekonečně mnoho, dokážeme ale, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\Delta^- f(d_k)\,(g(b)-g(d_k-))+\Delta^+ f(d_k)\,(g(b)-g(d_k+))\right]$$

je absolutně konvergentní. Nezáleží tedy na konkrétním uspořádání množiny D a můžeme tedy použít zápis (6.58) nebo také

$$\sum_{a<x<b}\left[\Delta^- f(x)\,(g(b)-g(x-))+\Delta^+ f(x)\,(g(b)-g(x+))\right] \tag{6.59}$$

jako v poznámce 2.29.

6.38 Důsledek. *Jestliže* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, $g \in \mathbb{G}[a,b]$, D *je množina bodů nespojitosti funkce* f *v* (a,b) *a* $f^{\,\mathrm{C}}$ *je spojitá část funkce* f, $f^{\,\mathrm{C}}(a) = f(a)$, *pak*

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}g + \Delta^+ f(a)\,(g(b) - g(a+)) + \Delta^- f(b)\,\Delta^- g(b) \\ + \sum_{d \in D} \big[\Delta^- f(d)\,(g(b) - g(d-)) + \Delta^+ f(d)\,(g(b) - g(d+))\big]. \end{aligned}\right\} \tag{6.60}$$

D ů k a z . Předpokládejme, že D je nekonečná, tj. $D = \{d_k\}$. Podle věty 2.28 platí

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \big|\Delta^- f(d_k)\,\chi_{[d_k,b]}(x) + \Delta^+ f(d_k)\,\chi_{(d_k,b]}(x)\big| \\ \le \sum_{k=1}^{\infty} \big[|\Delta^- f(d_k)| + |\Delta^+ f(d_k)|\big] < \infty \end{aligned}\right\} \tag{6.61}$$

pro každé $x \in [a,b]$. Řada na levé straně nerovnosti (6.61) je tedy pro každé $x \in [a,b]$ absolutně konvergentní a má smysl definovat

$$\begin{aligned} f^{\,\mathrm{B}}(x) = \Delta^+ f(a)\,\chi_{(a,b]}(x) + \Delta^- f(b)\,\chi_{[b]}(x) \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \big[\Delta^- f(d_k)\,\chi_{[d_k,b]}(x) + \Delta^+ f(d_k)\,\chi_{(d_k,b]}(x)\big] \text{ pro } x \in [a,b] \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} f_n^{\,\mathrm{B}}(x) = \Delta^+ f(a)\,\chi_{(a,b]}(x) + \Delta^- f(b)\,\chi_{[b]}(x) \\ + \sum_{k=1}^{n} \big[\Delta^- f(d_k)\,\chi_{[d_k,b]}(x) + \Delta^+ f(d_k)\,\chi_{(d_k,b]}(x)\big] \text{ pro } x \in [a,b] \text{ a } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Podle věty 2.42 je $f^{\,\mathrm{B}}$ skoková část funkce f, $f^{\,\mathrm{C}} = f - f^{\,\mathrm{B}}$ je její spojitá část, $f^{\,\mathrm{B}}(a) = 0$ a $f^{\,\mathrm{C}}(a) = f(a)$. Dále

$$f^{\,\mathrm{B}}(x) - f_n^{\,\mathrm{B}}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \big[\Delta^- f(d_k)\,\chi_{[d_k,b]}(x) + \Delta^+ f(d_k)\,\chi_{(d_k,b]}(x)\big]$$

pro $x \in [a,b]$ a $n \in \mathbb{N}$. Podle definice 2.37 je $f^{\,\mathrm{B}} - f_n^{\,\mathrm{B}}$ skoková funkce a podle věty 2.38 je

$$\operatorname{var}_a^b (f^{\,\mathrm{B}} - f_n^{\,\mathrm{B}}) \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \big[|\Delta^- f(d_k)| + |\Delta^+ f(d_k)|\big]. \tag{6.62}$$

Na pravé straně nerovnosti (6.62) je zbytek absolutně konvergentní řady a musí tedy platit

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (f^{\,\mathrm{B}} - f_n^{\,\mathrm{B}}) \le \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \big[|\Delta^- f(d_k)| + |\Delta^+ f(d_k)|\big] = 0. \tag{6.63}$$

Odtud podle věty 6.37 plyne, že integrál $\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}g$ existuje a platí rovnost

$$\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}g = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}g. \tag{6.64}$$

Na druhou stranu, podle (6.26), (6.27) a věty 6.8 je

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f_n^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}g &= \Delta^+ f(a)\,(g(b)-g(a+)) + \Delta^- f(b)\,\Delta^- g(b)\\ &\quad + \sum_{k=1}^{n}\Big(\Delta^- f(d_k)\,[g(b)-g(d_k-)] + \Delta^+ f(d_k)\,[g(b)-g(d_k+)]\Big)\end{aligned}\right\} \tag{6.65}$$

pro každé $n\in\mathbb{N}$. Díky (6.64) a (6.65) tudíž dostáváme

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}g &= \Delta^+ f(a)\,(g(b)-g(a+)) + \Delta^- f(b)\,\Delta^- g(b)\\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Delta^- f(d_k)\,(g(b)-g(d_k-)) + \Delta^+ f(d_k)\,(g(b)-g(d_k+))\Big).\end{aligned}\right\} \tag{6.66}$$

Protože podle důsledku 2.30 je

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\big|\Delta^- f(d_k)\,(g(b)-g(d_k-)) + \Delta^+ f(d_k)\,(g(b)-g(d_k+))\big|\\ &\qquad \le 2\,\|g\|\sum_{k=1}^{\infty}\Big(|\Delta^- f(d_k)| + |\Delta^+ f(d_k)|\Big) \le 2\,\|g\|\,(\operatorname{var}_a^b f) < \infty,\end{aligned}$$

vidíme, že řada na pravé straně rovnosti (6.65) konverguje absolutně a můžeme ji tedy vyjádřit ve tvaru

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Delta^- f(d_k)\,(g(b)-g(d_k-)) + \Delta^+ f(d_k)\,(g(b)-g(d_k+))\Big)\\ &\qquad = \sum_{d\in D}\Big(\Delta^- f(d)\,(g(b)-g(d)) + \Delta^+ f(d)\,(g(b)-g(d))\Big)\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Delta^- f(d_k)\,(g(b)-g(d_k-)) + \Delta^+ f(d_k)\,(g(b)-g(d_k+))\Big)\\ &\qquad = \sum_{a<x<b}\Big(\Delta^- f(x)\,(g(b)-g(x)) + \Delta^+ f(x)\,(g(b)-g(x))\Big).\end{aligned}$$

Jestliže $f = \widetilde{f}^{\,\mathrm{C}} + \widetilde{f}^{\,\mathrm{B}}$ je jiný rozklad funkce f na spojitou a skokovou část, pak podle věty 2.42 existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\widetilde{f}(x) - f^{\,\mathrm{C}}(x) = f^{\,\mathrm{B}}(x) - \widetilde{f}^{\,\mathrm{B}}(x) = c \quad \text{pro každé } x \in [a,b].$$

Potom je ovšem

$$\begin{aligned}\int_a^b \widetilde{f}^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}g + \int_a^b \widetilde{f}^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}g &= \int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}g + c\,[g(b)-g(a)] + \int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}g - c\,[g(b)-g(a)] \\ &= \int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}g + \int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}g.\end{aligned}$$

Platí tedy (6.60), přičemž hodnota integrálu nezávisí na volbě rozkladu funkce f na spojitou a skokovou část.

Je-li množina D konečná, je platnost vztahu (6.60) zřejmá. □

V situaci symetrické k důsledku 6.38 máme

6.39 Lemma. *Jestliže $f \in \mathbb{G}[a,b]$, $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, D je množina bodů nespojitosti funkce g v (a,b) a g^{C} je spojitá část funkce g, pak*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f\,\mathrm{d}g^{\mathrm{C}} + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \sum_{d \in D} f(d)\,\Delta g(d) + f(b)\,\Delta^- g(b). \tag{6.67}$$

D ů k a z je analogický důkazu důsledku 6.38 a je ponechán čtenáři jako cvičení. □

6.40 Cvičení. Dokažte lemma 6.39.
Návod: Využijte tvrzení 2.45 a větu 6.29 a postupujte jako při důkazu důsledku 6.38.)

6.4 Integrace per-partes

Pro důkazy důsledku 6.38 a lemmatu 6.39 byly užitečné příklady 6.22. Následující technická lemmata jsou potřebná pro důkaz věty o integraci per-partes, která je naším dalším významnějším cílem. Také v jejich důkazech budou příklady 6.22 využity.

6.41 Lemma. *Nechť $h \in \mathbb{G}[a,b]$ a*

$$h(x) = c \quad \textit{pro} \ x \in [a,b] \setminus D\,, \tag{6.68}$$

kde $c \in \mathbb{R}$ a D je nejvýše spočetná podmnožina intervalu (a,b). Potom

$$h(x-) = h(x+) = h(a+) = h(b-) = c \quad \textit{platí pro každé } x \in (a,b). \tag{6.69}$$

D ů k a z . Rovnosti $h(t-)=c$ a $h(s+)=c$ zřejmě platí pro libovolná $t\in(a,b]$ a $s\in[a,b)$, která nejsou hromadnými body množiny D. Na druhou stranu, je-li $x\in(a,b]$ hromadný bod množiny D, zvolme rostoucí posloupnost $\{x_k\}\subset[a,x)\setminus D$ konvergující k x. Zřejmě $lim_{k\to\infty}h(x_k)=c$. Protože $h\in\mathbb{G}[a,b]$, to ovšem, vzhledem k jednoznačnosti limit, znamená, že je také $h(x-)=c$. Podobně, rovnost $h(x+)=c$ platí i pro každé $x\in[a,b)$, které je hromadným bodem množiny D. □

6.42 Lemma. *Nechť* $h\in\mathbb{BV}[a,b]$, $c\in\mathbb{R}$ *a* $D\subset(a,b)$ *je nejvýše spočetná množina taková, že platí* (6.68). *Potom pro každou funkci* $g\in\mathbb{G}[a,b]$ *platí*

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b h\,\mathrm{d}g = c\,[g(b)-g(a)\,]+(h(a)-c)\,\Delta^+g(a)\\ +\sum_{d\in D}(h(d)-c)\,\Delta g(d)+(h(b)-c\,)\,\Delta^-g(b).\end{aligned}\right\}\qquad(6.70)$$

D ů k a z . Protože $h\in\mathbb{G}[a,b]$, podle lemmatu 6.41 platí (6.69). Funkce $h^{\mathrm{C}}(x)\equiv h(a)$ je tedy spojitá část funkce h, $h^{\mathrm{B}}=h-h^{\mathrm{C}}$,

$$\Delta^+h(a)=c-h(a),\ \ \Delta^-h(b)=h(b)-c$$

a

$$\Delta^-h(x)=h(x)-c=-\Delta^+h(x)\quad\text{pro každé } x\in(a,b).$$

Pro libovolnou funkci $g\in\mathbb{G}[a,b]$ tedy podle důsledku 6.38, kde funkci f nahradíme funkcí h, dostaneme

$$\begin{aligned}\int_a^b h\,\mathrm{d}g &= h(a)\,[g(b)-g(a)\,]+(c-h(a))\,[g(b)-g(a+)\,]\\ &\qquad+\sum_{d\in D}(h(d)-c)\,[g(b)-g(d-)-g(b)+g(d+)\,]+(h(b)-c\,)\,\Delta^-g(b)\\ &= h(a)\,[g(b)-g(a)\,]+(h(a)-c)\,[g(b)-g(a)\,]\\ &\qquad-(h(a)-c)\,[g(a+)-g(a)\,]\\ &\qquad+\sum_{d\in D}(h(d)-c)\,\Delta g(d)+(h(b)-c\,)\,\Delta^-g(b),\\ &= c\,[g(b)-g(a)\,]+(h(a)-c)\,\Delta^+g(a)\\ &\qquad+\sum_{d\in D}(h(d)-c)\,\Delta g(d)+(h(b)-c\,)\,\Delta^-g(b),\end{aligned}$$

tj. platí (6.70). □

6.43 Cvičení. Nechť $\tau \in (a,b)$, $\varkappa \in \mathbb{R}$ a

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{když } t < \tau, \\ \varkappa & \text{když } t = \tau, \\ 1 & \text{když } t > \tau. \end{cases}$$

Dokažte, že

$$\int_a^b \varphi\, g \,\mathrm{d}g = \varphi(\tau)\,\varkappa$$

platí pro libovolnou funkci $\varphi \in \mathbb{BV}[a,b]$.

Návod: Položte $h(t) = \varphi(t)\,g(t)$ pro $t \in [a,b]$ a pomocí lemmatu 6.42 spočtěte integrály $\displaystyle\int_a^\tau h\,\mathrm{d}g$ a $\displaystyle\int_\tau^b h\,\mathrm{d}g$.

6.44 Lemma. *Nechť $h \in \mathbb{G}[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$ a nejvýše spočetná množina $D \subset (a,b)$ jsou takové, že platí* (6.68). *Potom pro každou funkci $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ platí* (6.70) *a*

$$\int_a^b g\,\mathrm{d}\,h = g(b)\,h(b) - g(a)\,h(a) - c\,\big(g(b) - g(a)\big). \tag{6.71}$$

D ů k a z . Předpokládejme, že množina D je nekonečná, tj. $D = \{d_k\}$. Podle lemmatu 6.41 máme

$$h(x-) = h(x+) = h(a+) = h(b-) = c \quad \text{pro každé } x \in (a,b)$$

a tedy

$$\Delta^- h(x) = h(x) - c = -\Delta^+ h(x) \quad \text{pro každé } x \in (a,b).$$

Funkce $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ splňuje (6.68) právě tehdy, když

$$h(x) = c + \begin{cases} h(x) - c & \text{když } x \in D', \\ 0 & \text{když } x \notin D', \end{cases}$$

kde $D' = D \cup \{a\} \cup \{b\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $D'_n = \{d_k\}_{k=1}^n \cup \{a\} \cup \{b\}$ a

$$h_n(x) = c + \begin{cases} h(x) - c & \text{když } x \in D'_n, \\ 0 & \text{když } x \notin D'_n. \end{cases}$$

Potom pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme $h_n(a) = h(a)$, $h_n(b) = h(b)$,

$$\left.\begin{aligned} h_n(x) &= c + (h(a) - c)\,\chi_{[a]}(x) + \sum_{k=1}^n (h(d_k) - c)\,\chi_{[d_k]}(x) \\ &\quad + (h(b) - c)\,\chi_{[b]}(x) \quad \text{pro } x \in [a,b] \end{aligned}\right\} \tag{6.72}$$

a

$$|h(x) - h_n(x)| = \begin{cases} |h(x) - c| & \text{když } \ x \in D \setminus D'_n\,, \\ 0 & \text{když } \ x \in [a,b] \setminus (D \setminus D'_n)\,. \end{cases}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0.$ Potom podle důsledku 4.9 je počet prvků v množině $\widetilde{D}_\varepsilon$ těch $x \in [a,b]$, pro něž je

$$|\Delta^- h(x)| = |\Delta^+ h(x)| = |h(x) - c| \geq \varepsilon$$

nejvýše konečný. Existuje tedy $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že je $\widetilde{D}_\varepsilon \subset D'_n$ pro $n \geq n_\varepsilon$. Tudíž

$$|h(x) - h_n(x)| = 0 \quad \text{pro každé } \ x \in \widetilde{D}_\varepsilon.$$

Protože je zřejmě také

$$|h(x) - h_n(x)| < \varepsilon \quad \text{jestliže } \ x \in [a,b] \setminus \widetilde{D}_\varepsilon$$

platí tedy $\|h - h_n\| < \varepsilon$ pro každé $n \geq n_\varepsilon$. Jinými slovy,

$$\lim_{n\to\infty} \|h - h_n\| = 0. \tag{6.73}$$

a) Nyní, podle (6.72), věty 6.8 a formule (6.25) (viz též cvičení 6.24) určíme pro každé $n \in \mathbb{N}$ integrály

$$\begin{aligned} \int_a^b g \,\mathrm{d}\, h_n &= \sum_{k=1}^n (h(d_k) - c) \int_a^b g \,\mathrm{d}\, \chi_{[d_k]} = g(b)\,[h(b) - c\,] - g(a)\,[h(a) - c\,] \\ &= g(b)\,h(b) - g(a)\,h(a) - c\,[g(b) - g(a)\,]. \end{aligned}$$

Podle (6.73) a podle důsledku 6.36 tedy máme

$$\int_a^b g \,\mathrm{d}\, h = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g \,\mathrm{d}\, h_n = g(b)\,h(b) - g(a)\,h(a) - c\,[g(b) - g(a)\,],$$

tj. platí (6.71).

b) Podobně, podle (6.72), věty 6.8 a formulí (6.27), (6.28) a (6.29) máme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \int_a^b h_n \,\mathrm{d}g &= c\,(g(b) - g(a)) + (h(a) - c) \int_a^b \chi_{[a]} \,\mathrm{d}g \\ &\qquad + \sum_{k=1}^n (h(d_k) - c) \int_a^b \chi_{[d_k]} \,\mathrm{d}g + (h(b) - c) \int_a^b \chi_{[b]} \,\mathrm{d}g \\ &= c\,(g(b) - g(a)) + (h(a) - c)\,\Delta^+ g(a) \\ &\qquad + \sum_{k=1}^n (h(d_k) - c)\,\Delta\, g(d_k) + (h(b) - c)\,\Delta^- g(b). \end{aligned}$$

Podle (6.73) a věty 6.29 je ovšem současně

$$\begin{aligned}\int_a^b h\,\mathrm{d}g &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n\,\mathrm{d}g\\ &= c\,(g(b)-g(a)) + (h(a)-c)\,\Delta^+ g(a)\\ &\qquad + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(h(d_k)-c)\,\Delta\,g(d_k) + (h(b)-c)\,\Delta^- g(b)\\ &= c\,(g(b)-g(a)) + (h(a)-c)\,\Delta^+ g(a)\\ &\qquad + \sum_{k=1}^{\infty}(h(d_k)-c)\,\Delta\,g(d_k) + (h(b)-c)\,\Delta^- g(b),\end{aligned}$$

tj. platí (6.70).

Modifikace důkazu pro případ, že množina D je konečná, je zřejmá. □

Poslední, dosud neřešená varianta s funkcí h splňující (6.68) je již jen jednoduchým důsledkem druhého tvrzení lemmatu 6.44.

6.45 Lemma. *Nechť* $h\in\mathbb{BV}[a,b]$, $c\in\mathbb{R}$ *a nejvýše spočetná množina* $D\subset(a,b)$ *jsou takové, že platí* (6.68). *Potom pro každou funkci* $g\in\mathbb{G}[a,b]$ *platí* (6.71).

D ů k a z . Nechť $\{g_n\}$ je posloupnost jednoduchých skokových funkcí $(\{g_n\}\subset\mathbb{S}[a,b])$ taková, že $g_n \rightrightarrows g$ na $[a,b]$. Potom, protože $g_n\in\mathbb{BV}[a,b]$ pro každé $n\in\mathbb{N}$, můžeme podle lemmatu 6.44 určit hodnoty integrálů

$$\int_a^b g_n\,\mathrm{d}\,h = g_n(b)\,h(b) - g_n(a)\,h(a) - c\,(g_n(b)-g_n(a)) \quad \text{pro } n\in\mathbb{N}.$$

Podle věty 6.29 tedy platí

$$\begin{aligned}\int_a^b g\,\mathrm{d}\,h &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n\,\mathrm{d}\,h = \lim_{n\to\infty}\big[g_n(b)\,h(b) - g_n(a)\,h(a) - c\,(g_n(b)-g_n(a))\big]\\ &= g(b)\,h(b) - g(a)\,h(a) - c\,(g(b)-g(a)),\end{aligned}$$

tj. platí (6.71). □

Nyní už můžeme dokázat větu o integraci per-partes pro KS–integrály. Ještě před tím ale připomeňme konvenci (x) z Úmluv a označení podle které klademe

$$f(a-) = f(a) \quad\text{a}\quad f(b+) = f(b),$$

tj.

$$\Delta^- f(a) = \Delta^+ f(b) = 0,\ \ \Delta f(a) = \Delta^+ f(a),\ \ \Delta f(b) = \Delta^- f(b) \tag{6.74}$$

pro každou funkci f regulovanou na $[a,b]$. Budeme-li se tedy nadále zmiňovat o funkcích $f(x-)$, resp. $f(x+)$, budeme mít na mysli funkce definované na $[a,b]$ předpisy

$$f(x+)=\begin{cases} f(x+) \text{ když } x\in[a,b), \\ f(b) \quad\ \text{ když } x=b, \end{cases} \quad \text{resp.} \quad f(x-)=\begin{cases} f(a) \quad\ \text{ když } x=a, \\ f(x-) \text{ když } x\in(a,b]. \end{cases} \tag{6.75}$$

(V důsledku 4.11 jsme je značili $\widetilde{f}$ resp. $\widehat{f}$.) Připomeňme, že je-li f regulovaná na $[a,b]$, pak podle důsledku 4.11 jsou také funkce $f(x-)$ a $f(x+)$ regulované na $[a,b]$ a platí (4.4) a (4.5). Analogicky, symboly $\Delta^+ f$ resp. $\Delta^- f$ budou značit i funkce

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^+ f : x \to \begin{cases} \Delta^+ f(x) \text{ když } x\in[a,b), \\ 0 \qquad\quad\ \text{ když } x=b, \end{cases} \\ \text{resp.}\quad & \\ &\Delta^- f : x \to \begin{cases} 0 \qquad\quad\ \text{ když } x=a, \\ \Delta^- f(b) \text{ když } x\in(a,b]. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{6.76}$$

S pomocí konvence (6.74) můžeme formuli (6.70) přepsat do stručnější formy

$$\int_a^b h \,\mathrm{d}g = c\,[g(b)-g(a)] + \sum_{d\in D} (h(d)-c)\,\Delta g(d). \tag{6.77}$$

6.46 Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES)**.**
Jestliže $f\in\mathbb{G}[a,b]$ *a* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$, *pak existují oba integrály*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g \ \ \textit{a} \ \int_a^b g\,\mathrm{d}f$$

a platí

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b f\,\mathrm{d}g + \int_a^b g\,\mathrm{d}f &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) \\ &+ \sum_{a\le x\le b} \Big(\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x) - \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)\Big), \end{aligned}\right\} \tag{6.78}$$

kde využíváme konvenci (6.74) *a součet na pravé straně je třeba chápat ve smyslu uvedeném v poznámce* 2.29 [1].

D ů k a z . a) Integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje podle věty 6.30 a integrál $\displaystyle\int_a^b g\,\mathrm{d}f$ existuje podle věty 6.35. Dále, podle důsledku 4.11 jsou funkce

$$f(x+),\ f(x-),\ g(x+),\ g(x-),\ \Delta^+ f,\ \Delta^- f,\ \Delta^+ g \ \text{ a } \ \Delta^- g$$

[1] Viz též text před důsledkem 6.38.

regulované na $[a,b]$, přičemž existuje nejvýše spočetná množina $D \subset [a,b]$ taková, že

$$\Delta^- f(x) = \Delta^+ f(x) = \Delta^+ g(x) = \Delta^- g(x) = 0 \quad \text{pro } x \in [a,b] \setminus D. \tag{6.79}$$

Podle věty 2.28 máme také

$$\sum_{a \le x \le b} |\Delta^+ g(x)| < \infty \quad \text{a} \quad \sum_{a \le x \le b} |\Delta^- g(x)| < \infty.$$

Funkce $\Delta^+ g$ a $\Delta^- g$ jsou tedy skokové funkce a mají konečnou variaci na $[a,b]$ (viz větu 2.38). Tudíž také funkce $g(x+) = g(x) + \Delta^+ g(x)$ a $g(x-) = g(x) - \Delta^- g(x)$ mají konečnou variaci na $[a,b]$.

b) Podle vět 6.30 a 6.35 existují integrály

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\,[\Delta^+ g], \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\,[g(x+)], \int_a^b g \,\mathrm{d}\,[\Delta^- f] \text{ a } \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}\,[f(x-)]$$

a můžeme tedy provést úpravu

$$\begin{aligned} &\int_a^b f \,\mathrm{d}g + \int_a^b g \,\mathrm{d}\,f \\ &\qquad = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\,[g(x+)] + \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}\,[f(x-)] - \int_a^b f \,\mathrm{d}\,[\Delta^+ g] + \int_a^b g \,\mathrm{d}\,[\Delta^- f]. \end{aligned}$$

Podle (6.79), funkce $\Delta^+ g \in \mathbb{BV}[a,b]$ splňuje podmínku (6.68) na místě funkce h, přičemž nyní máme $c = 0$ a $h(b) = 0$. Podle lemmatu 6.45 je tedy

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\,[\Delta^+ g] = -f(a)\, \Delta^+ g(a).$$

Analogicky, podle lemmatu 6.44 máme

$$\int_a^b g \,\mathrm{d}\,[\Delta^- f] = g(b)\, \Delta^- f(b),$$

takže

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}[\,g(x)] + \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}[\,f(x)] \\ &\quad = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}[\,g(x+)] + \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}[\,f(x-)] + f(a)\, \Delta^+ g(a) + \Delta^- f(b)\, g(b). \end{aligned}\right\} \tag{6.80}$$

c) První integrál na pravé straně rovnosti (6.80) můžeme rozložit na součet

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}[\,g(x+)] = \int_a^b f(x-) \,\mathrm{d}[\,g(x+)] + \int_a^b \Delta^- f(x) \,\mathrm{d}[\,g(x+)]. \tag{6.81}$$

V první části důkazu jsme konstatovali, že funkce $g(x+)$ má konečnou variaci na $[a,b]$. Podle důsledku 4.11, kam dosadíme $g(x+)$ místo $\widetilde{f}$, je

$$\lim_{t\to x+} g(t+) = g(x+) \text{ když } x\in[a,b) \quad \text{a} \quad \lim_{t\to x-} g(t-) = g(x-) \text{ když } x\in(a,b].$$

Podle lemmatu 6.44, kam dosadíme $h=\Delta^- f$, $c=0$ a na místě g bude funkce $g(x+)$, tedy dostaneme

$$\int_a^b \Delta^- f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x+)] = \sum_{a\le x\le b} \Delta^- f(x)\,\Delta g(x). \tag{6.82}$$

Analogicky, pomocí lemmatu 6.42 odvodíme rovnosti

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[\,f(x-)] &= \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[\,f(x-)] - \int_a^b \Delta^+ g(x)\,\mathrm{d}[\,f(x-)]\\ &= \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[\,f(x-)] - \sum_{a\le x\le b} \Delta^+ g(x)\,\Delta f(x).\end{aligned}\right\} \tag{6.83}$$

Podle důsledku 4.11 je funkce $f(x-)$ spojitá zleva na $(a,b]$ a $g(x+)$ je spojitá zprava na $[a,b)$. Podle věty 5.55 (ii) tudíž existují oba (σ) RS–integrály

$$(\sigma)\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[\,g(x+)] \quad \text{a} \quad (\sigma)\int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[\,f(x-)]$$

a podle věty 6.13 existují také oba KS–integrály

$$\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[\,g(x+)] \quad \text{a} \quad \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[\,f(x-)].$$

Podle věty o integraci per-partes pro RS–integrály (věta 5.50) máme

$$\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[\,g(x+)] + \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[\,f(x-)] = f(b-)\,g(b) - f(a)\,g(a+). \tag{6.84}$$

Dosazením (6.81)–(6.84) do (6.80) dostaneme dále

$$\begin{aligned}&\int_a^b f\,\mathrm{d}g + \int_a^b g\,\mathrm{d}f\\ &\quad= f(b-)\,g(b) - f(a)\,g(a+) + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \Delta^- f(b)\,g(b)\\ &\qquad+\sum_{a\le x\le b}\Big(\Delta^- f(x)\,[\Delta^- g(x) + \Delta^+ g(x)] - [\Delta^- f(x) + \Delta^+ f(x)]\,\Delta^+ g(x)\Big)\\ &\quad= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) + \sum_{a\le x\le b}\Big(\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x) - \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)\Big).\end{aligned}$$

Dokázali jsme, že platí (6.78). □

6.47 Poznámka. Pro KS–integrál tedy neplatí věta o integraci per-partes v podobě, v jaké ji známe pro RS-integrály. Je to způsobeno tím, že obor funkcí pro které existuje KS–integrál je podstatně širší než obor funkcí, pro které existují RS-integrály.

6.48 Cvičení. Dokažte, že za předpokladů věty 6.46 platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_a^b f(x+)\,\mathrm{d}g(x-) + f(b)\,\Delta^- g(b) - \sum_{a<x<b} \Delta^+ f(x)\,\Delta g(x)$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}g(x+) + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \sum_{a<x<b} \Delta^- f(x)\,\Delta g(x).$$

(Návod: Využijte formule odvozené v průběhu důkazu věty 6.46.)

6.5 Saksovo-Henstockovo lemma a některé jeho důsledky

6.49 Lemma (SAKS-HENSTOCK)**.** *Nechť* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jsou takové, že integrál*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g$$

existuje. Nechť $\varepsilon > 0$ *je dáno a nechť* $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ *je kalibr na* $[a,b]$ *takový, že platí*

$$\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big| < \varepsilon \quad \textit{pro všechna } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta).$$

Potom pro libovolný systém $\Big\{([s_j,t_j],\theta_j) : j = 1,2,\dots,n\Big\}$ *takový, že*

$$\left.\begin{aligned} &a \le s_1 \le \theta_1 \le t_1 \le s_2 \le \dots \le s_n \le \theta_n \le t_n \le b,\\ &[s_j,t_j] \subset (\theta_j - \delta(\theta_j), \theta_j + \delta(\theta_j)) \quad \textit{pro } j = 1,2,\dots,n, \end{aligned}\right\} \tag{6.85}$$

platí nerovnost

$$\Big|\sum_{j=1}^n \Big[f(\theta_j)\,[g(t_j) - g(s_j)] - \int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}g\Big]\Big| \le \varepsilon. \tag{6.86}$$

D ů k a z . Předpokládejme, že systém

$$\Big\{([s_j,t_j],\theta_j) : j = 1,2,\dots,n\Big\}$$

splňuje (6.85). Buď dáno $\eta > 0$. Označme $t_0 = a$, $s_{n+1} = b$. Jestliže $j \in \{0,1,\dots,n\}$ a $t_j < s_{j+1}$, pak, vzhledem k poznámce 6.5, existují na intervalu $[t_j, s_{j+1}]$ kalibr δ_j a δ_j–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)$ takové, že $\delta_j(x) \le \delta(x)$ pro každé $x \in [t_j, s_{j+1}]$ a

$$\Big|S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j) - \int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}g\Big| < \frac{\eta}{n+1}. \tag{6.87}$$

Nyní sestavme δ– jemné značené dělení $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{n} f(\theta_j)\,[g(t_j)-g(s_j)]+\sum_{j=0}^{n} S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)=S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}).$$

(Je-li $t_j=s_{j+1},$ klademe $S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)=0.)$ Vzhledem k předpokladům lemmatu tedy máme

$$\Big|\sum_{j=1}^{n}\Big(f(\theta_j)\,[g(t_j)-g(s_j)]-\int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}g\Big)+\sum_{j=0}^{n}\Big(S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)-\int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big|$$
$$=\Big|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big|<\varepsilon.$$

Odtud a z (6.87) dostáváme

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} f(\theta_j)\,[g(t_j)-g(s_j)]-\int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}g\Big|$$
$$\le\Big|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big|+\Big|\sum_{j=0}^{n}\Big(S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)-\int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}g\Big)\Big|<\varepsilon+\eta.$$

Protože $\eta>0$ bylo libovolné, platí (6.86). $\square$

6.50 Věta. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje a* $c\in[a,b]$. *Potom platí*

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in[a,b]}}\Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}g+f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big)=\int_a^c f\,\mathrm{d}g. \tag{6.88}$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon>0$ a nechť $\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]$ je takový kalibr, že

$$\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\int_a^b f\,\mathrm{d}g\Big|<\varepsilon \quad \text{platí pro všechna } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon).$$

Pro každé $x\in(c,c+\delta_\varepsilon(c))\cap[a,b]$ vyhovuje systém

$$\{([s_1,t_1],\theta_1)\},\quad \text{kde } t_1=x \ \text{ a } \ s_1=\theta_1=c,$$

podmínkám (6.85). Podle Saksova-Henstockova lemmatu (viz Lemma 6.49) tedy máme

$$\Big|f(c)\,[g(x)-g(c)]-\int_c^x f\,\mathrm{d}g\Big|\le\varepsilon. \tag{6.89}$$

Podobně, je-li $x\in(c-\delta_\varepsilon(c),c)\cap[a,b]$, pak použitím lemmatu 6.49 na systém $\{[x,c],c\}$ dostaneme nerovnost

$$\Big|f(c)\,[g(c)-g(x)]-\int_x^c f\,\mathrm{d}g\Big|\le\varepsilon.$$

Pro každé $x \in (c - \delta_\varepsilon(c), c + \delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ tedy platí nerovnost (6.89), a tudíž

$$\Big| \int_a^c f\,\mathrm{d}g - \int_a^x f\,\mathrm{d}g - f(c)\,[g(c) - g(x)]\Big| \\ = \Big| \int_c^x f\,\mathrm{d}g - f(c)\,[g(x) - g(c)]\Big| \le \varepsilon,$$

tj. platí (6.88). □

6.51 Důsledek. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje,* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *a nechť funkce* $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je definována předpisem*

$$h(x) = \int_a^x f\,\mathrm{d}g \quad \textit{pro} \ \ x \in [a,b].$$

Potom $h \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$h(t+) = h(t) + f(t)\,\Delta^+ g(t) \ \ \textit{a} \ \ h(s-) = h(s) - f(s)\,\Delta^- g(s)$$

pro $t \in [a,b)$ *a* $s \in (a,b]$. □

6.6 Neurčitý integrál

6.52 Věta (HAKE)**.** (i) *Nechť* $\int_a^x f\,\mathrm{d}g$ *existuje pro každé* $x \in [a,b)$ *a nechť*

$$\lim_{x \to b-} \Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}g + f(b)\,[g(b) - g(x)]\Big) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I.$

(ii) *Nechť* $\int_x^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje pro každé* $x \in (a,b]$ *a nechť*

$$\lim_{x \to a+} \Big(\int_x^b f\,\mathrm{d}g + f(a)\,[g(x) - g(a)]\Big) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom $\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I.$

Důkaz. (i) a) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\Delta > 0$ tak, aby platilo

$$\Big| \int_a^x f\,\mathrm{d}g + f(b)\,[g(b) - g(x)] - I\Big| < \varepsilon \quad \text{pro každé } \ x \in [b - \Delta, b). \tag{6.90}$$

Položme $x_k = b - \dfrac{b-a}{k+1}$ pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom posloupnost $\{x_k\}$ je rostoucí, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$ a

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, k \in \mathbb{N} \;\; \exists\, \delta_k \in \mathscr{G}[a, x_k]: \\ &\qquad (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{A}(\delta_k; [a, x_k]) \implies \Big| S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - \int_a^{x_k} f \,\mathrm{d}g \Big| < \frac{\varepsilon}{2^k}. \end{aligned}\right\} \tag{6.91}$$

b) Definujme kalibr δ_0 na $[a, b)$ tak, aby platilo

$$\delta_0(s) \le \delta_k(s) \quad \text{a} \quad [s - \delta_0(s), s + \delta_0(s)] \subset [a, x_k] \;\; \text{pro} \;\; k \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad s \in [x_{k-1}, x_k).$$

Dále pro každé $s \in [a, b)$ označme symbolem $\kappa(s)$ jednoznačně určené přirozené číslo k takové, že $s \in [x_{k-1}, x_k)$.

c) Dokážeme, že platí

$$\Big| S(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}) - \int_a^x f \,\mathrm{d}g \Big| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in [a, b) \;\text{ a }\; (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathscr{A}(\delta_0; [a, x]). \tag{6.92}$$

Nechť je tedy dáno $x \in [a, b)$ a nechť $p \in \mathbb{N}$ je takové, že $x \in [x_{p-1}, x_p)$ (tj. $p = \kappa(x)$). Dále nechť $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta})$ je libovolné δ_0–jemné značené dělení intervalu $[a, x]$. Označme $\nu(\boldsymbol{\tau}) = r$. Pro každé $k \in \mathbb{N} \cap [1, p]$ a každé $j \in \mathbb{N} \cap [1, r]$ takové, že $\kappa(\theta_j) = k$, máme

$$\theta_j - \delta_k(\theta_j) \le \theta_j - \delta_0(\theta_j) \le \tau_{j-1} < \tau_j \le \theta_j + \delta_0(\theta_j) \le \theta_j + \delta_k(\theta_j).$$

Vzhledem k (6.91) vidíme, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ systém

$$\{([\tau_{j-1}, \tau_j], \theta_j) : \, j = 1, 2, \ldots, r, \; \kappa(\theta_j) = k\}$$

splňuje předpoklady lemmatu 6.49 na místě $\{([s_j, t_j], \theta_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}$. Platí tedy

$$\Big| \sum_{\kappa(\theta_j) = k} f(\theta_j) \, [g(\tau_j) - g(\tau_{j-1})] - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f \,\mathrm{d}g \Big| \le \frac{\varepsilon}{2^k} \;\text{ pro každé } k \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Konečně,

$$\begin{aligned} &\Big| \sum_{j=1}^r f(\theta_j) \, [g(\tau_j) - g(\tau_{j-1})] - \int_a^x f \,\mathrm{d}g \Big| \\ &\quad = \Big| \sum_{k=1}^p \sum_{\kappa(\theta_j) = k} \Big(f(\theta_j) \, [g(\tau_j) - g(\tau_{j-1})] - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f \,\mathrm{d}g \Big) \Big| \\ &\quad \le \sum_{k=1}^p \Big| \sum_{\kappa(\theta_j) = k} \Big(f(\theta_j) \, [g(\tau_j) - g(\tau_{j-1})] - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f \,\mathrm{d}g \Big) \Big| < \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon, \end{aligned}$$

tj. platí (6.92).

d) Položme $\delta^*(x) = \min\{b-x,\, \delta_0(x)\}$ pro $x \in [a,b)$, $\delta^*(x) = \Delta$ pro $x = b$. Nechť $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ je libovolné δ^*–jemné značené dělení intervalu $[a,b]$ a $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom musí platit $\xi_m = \sigma_m = b$, $\sigma_{m-1} \in (b-\Delta, b)$ a

$$\begin{aligned}\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I\Big| &= \Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] + f(b)\,[g(b) - g(\sigma_{m-1})] - I\Big| \\ &\le \Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_a^{\sigma_{m-1}} f\,\mathrm{d}g\Big| \\ &\quad + \Big|\int_a^{\sigma_{m-1}} f\,\mathrm{d}g + f(b)\,[g(b) - g(\sigma_{m-1})] - I\Big|.\end{aligned}$$

Vzhledem k (6.92) a (6.90) (kde položíme $x = \sigma_{m-1}$) tedy dostáváme konečně

$$\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I\Big| < 2\,\varepsilon, \quad \text{tj.} \int_a^b f\,\mathrm{d}g = I.$$

Důkaz tvrzení (ii) se provede analogicky a ponecháváme ho čtenáři jako cvičení. □

6.53 Cvičení. Dokažte tvrzení (ii) věty 6.52 a jeho následující variantu:

Předpokládejme, že integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje. Nechť je dáno* $x \in [a,b)$ *a nechť*

$$\lim_{t\to x+} \Big(\int_a^t f\,\mathrm{d}g - f(x)\,[g(t) - g(x)]\Big) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom $\int_a^x f\,\mathrm{d}g = I$.

6.54 Příklady. Pomocí Hakeovy věty můžeme snadno a univerzálním způsobem odvodit vzorce, které jsme v příkladech 6.22 odvodili přímo z definice pomocí vhodné volby kalibru. Např. formuli $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} = f(\tau)$, kde $\tau \in (a,b]$ a f je libovolná, odvodíme takto

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} = \int_a^\tau f\,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} = \lim_{t\to\tau-} \Big(\int_a^t f\,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} + f(\tau)\,[\chi_{[\tau,b]}(\tau) - \chi_{[\tau,b]}(t)]\Big) = f(\tau).$$

Podobně, pro $\tau \in [a,b)$ a $g \in \mathbb{G}[a,b]$ dostaneme pomocí Hakeovy věty

$$\begin{aligned}\int_a^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}g &= \int_a^\tau 1\,\mathrm{d}g + \int_\tau^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}g \\ &= g(\tau) - g(a) + \lim_{t\to\tau+} \Big(\int_t^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}g + 1\,[g(t) - g(\tau)]\Big) = g(\tau+) - g(a),\end{aligned}$$

tj. platí (6.28).

6.55 Cvičení. Pomocí Hakeovy věty dokažte i zbývající formule z příkladů 6.22.

6.7 Substituce

Dalším důsledkem Saksova-Henstockova lemmatu je následující lemma, které nám pomůže dokázat větu o substituci.

6.56 Lemma. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *existuje. Potom pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje kalibr* $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ *takový, že nerovnost*

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \left| f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}g \right| < \varepsilon \tag{6.93}$$

platí pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr takový, že

$$\left| S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - \int_a^b f\,\mathrm{d}g \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

platí pro všechna δ– jemná značená dělení $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta})$ intervalu $[a,b]$.

Buď dáno libovolné $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)$. Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$ a

$$J^+ = \left\{ j \in \{1,2,\ldots,m\} : f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}g \ge 0 \right\}$$

a

$$J^- = \left\{ 1,2,\ldots,m \right\} \setminus J^+.$$

Systém

$$\{([\sigma_{j-1}, \sigma_j], \xi_j) : j \in J^+\}$$

splňuje předpoklady (6.85) z lemmatu 6.49 na místě systému

$$\{([s_j, t_j], \tau_j)\}.$$

Podle lemmatu 6.49 tedy platí

$$\sum_{j \in J^+} \left| f(\xi_j)[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}g \right|$$
$$= \left| \sum_{j \in J^+} \left(f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}g \right) \right| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Podobně

$$\sum_{j \in J^-} \left| f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}g \right|$$
$$= \left| \sum_{j \in J^-} \left(f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}g \right) \right| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Odtud už nerovnost (6.93) okamžitě vyplývá. □

6.57 Věta (VĚTA O SUBSTITUCI). *Předpokládejme, že funkce* $h\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *je ohraničená a, že existuje integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$. *Potom jakmile existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}g\Big],\quad \int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)],$$

existuje i druhý a v takovém případě pak platí

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}g\Big]=\int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)].$$

D ů k a z . Podle věty 6.10 je funkce $w(x)=\int_a^x f\,\mathrm{d}g$ definovaná pro každé $x\in[a,b]$.

a) Předpokládejme, že existuje integrál $\int_a^b h\,f\,\mathrm{d}g$. Buď dáno $\varepsilon>0$ a nechť δ_ε je kalibr na $[a,b]$ takový, že

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\Big|h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}h\,f\,\mathrm{d}g\Big|<\varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\Big|f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}f\,\mathrm{d}g\Big|<\varepsilon$$

platí pro každé δ_ε–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$. (Takový kalibr existuje podle lemmatu 6.56.)

Buď dáno $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^{m}h(\xi_j)\,[w(\sigma_j)-w(\sigma_{j-1})]-\int_a^b h\,f\,\mathrm{d}g\Big|\\
&\quad\le\sum_{j=1}^{m}\Big|h(\xi_j)\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}f\,\mathrm{d}g-h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\Big|\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{m}\Big|h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}h\,f\,\mathrm{d}g\Big|\\
&\quad\le\|h\|\sum_{j=1}^{m}\Big|\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}f\,\mathrm{d}g-f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\Big|\\
&\qquad+\sum_{j=1}^{m}\Big|h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}h\,f\,\mathrm{d}g\Big|\\
&\quad\le(\|h\|+1)\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

tj. existuje integrál $\int_a^b h\,\mathrm{d}\,w$ a platí $\int_a^b h\,\mathrm{d}\,w = \int_a^b h\,f\,\mathrm{d}g$.

b) Obrácená implikace by se dokazovala podobně, opět za vydatné pomoci lemmatu 6.56. $\square$

Pro KS–integrál ovšem platí také tvrzení analogická větám o substituci, které jsme dokázali pro RS–integrály. Uvedeme alespoň jedno z nich.

6.58 Věta. *Předpokládejme, že funkce* $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *je rostoucí a zobrazuje interval* $[\alpha, \beta]$ *na interval* $[a, b]$ *a nechť* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Pak existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)], \qquad \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}[\,g(\phi(x))],$$

existuje i ten druhý a platí rovnost

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}[\,g(\phi(x))] = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)]. \tag{6.94}$$

D ů k a z . Povšimněme si, že protože ϕ je rostoucí a zobrazuje interval $[\alpha, \beta]$ na interval $[a, b]$, musí být ϕ i její inverze ϕ^{-1} spojité.

Pro dané značené dělení $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{T}[\alpha, \beta]$ položme

$$\sigma_j = \phi(\rho_j) \text{ pro } j = 0, 1, \ldots, \nu(\boldsymbol{\rho}) \quad \text{a} \quad \xi_j = \phi(\eta_j) \text{ pro } j = 1, 2, \ldots, \nu(\boldsymbol{\rho})$$

a $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu(\boldsymbol{\rho})}\}$, $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\rho})}\}$. Potom $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, b]$. Značíme

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \text{ a } (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) = \phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}).$$

Zřejmě $\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, b]$ pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, b]$.

Pro daný kalibr $\widetilde{\delta} \in \mathscr{G}[\alpha, \beta]$ definujme kalibr $\delta \in \mathscr{G}[a, b]$ tak, aby platilo

$$\left.\begin{aligned} &\phi^{-1}(\tau + \delta(\tau)) < \phi^{-1}(\tau) + \widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\tau)) && \text{jestliže } \tau \in [a, b) \\ \text{a} \quad &\phi^{-1}(\tau - \delta(\tau)) > \phi^{-1}(\tau) - \widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\tau)) && \text{jestliže } \tau \in (a, b]. \end{aligned}\right\} \tag{6.95}$$

Nyní, jestliže rozšířené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, b]$ je δ–jemné, pak podle (6.95) máme pro každé $j = 1, 2, \ldots, \nu(\boldsymbol{\sigma})$

$$\rho_j = \phi^{-1}(\sigma_j) \le \phi^{-1}(\xi_j + \delta(\xi_j)) < \phi^{-1}(\xi_j) + \widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\xi_j)) = \eta_j + \widetilde{\delta}(\eta_j)$$

a

$$\rho_{j-1} = \phi^{-1}(\sigma_{j-1}) \ge \phi^{-1}(\xi_j - \delta(\xi_j)) > \phi^{-1}(\xi_j) - \widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\xi_j)) = \eta_j - \widetilde{\delta}(\eta_j).$$

Čili $\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\widetilde{\delta})$ pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)$. Podobně bychom ke každému kalibru $\delta \in \mathscr{G}[a, b]$ našli kalibr $\widetilde{\delta} \in \mathscr{G}[\alpha, \beta]$ takový, že $\phi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{A}(\delta)$, jakmile $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{A}(\widetilde{\delta})$.

Protože

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\phi(\eta_j))\,\big[g(\phi(\rho_j))-g(\phi(\rho_{j-1}))\big]$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$ a $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})=\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, plyne odtud už snadno důkaz věty. $\square$

6.59 Cvičení. (i) Formulujte a dokažte analogii věty 6.58 pro případ, že ϕ je klesající.

(ii) Formulujte a dokažte analogii věty 5.48.

6.60 Poznámka. Větu 6.58 je možno zobecnit v různých směrech. Na příklad následující verze věty o substituci se uplatnila při aplikaci teorie hystereze v ekonomii (viz [3]):

Předpokládejme, že funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je ohraničená na* $[a,b]$ *a* $f\in\mathbb{G}[\alpha,b]$ *pro každé* $\alpha\in(a,b)$. *Dále nechť funkce* $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a nechť* $\phi(a)=c$, $\phi(b)=d$. *Konečně, nechť funkce* $g\in\mathbb{BV}[c,d]$ *je zprava spojitá na* $[c,d)$. *Pro* $s\in[c,d]$ *položme* $\psi(s)=\inf\{t\in[a,b]:s\le\phi(t)\}$. *Potom pro každé* $\alpha\in[a,b]$ *platí*

$$\int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}[\,g(\phi(t))] = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(b)} f(\psi(s))\,\mathrm{d}[\,g(s)].$$

6.8 Integrace na elementárních množinách

Zatím jsme se zabývali integrací přes pevně daný interval, přesněji řečeno integrály od dolní meze do horní meze. Z teorie Lebesgueova integrálu známe i možnost integrování přes libovolné množiny. Vzhledem k velké obecnosti KS-integrálu ve smyslu velkého oboru integrovatelných funkcí, dostaneme se u KS integrálu do potíží s rozumným zavedením integrálu přes obecné množiny, pokud se ovšem nechceme omezit na případy, kdy integrátor je spojitá funkce. Smysluplným kompromisem se zdá být omezení se na integraci přes elementární množiny (viz definice 2.59).

6.61 Definice. Jestliže reálné funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ a elementární podmnožina E intervalu $[a,b]$ jsou takové, že integrál $\int_a^b(f\chi_E)\,\mathrm{d}g$ existuje, nazveme jeho hodnotu *Kurzweilovým-Stieltjesovým integrálem* (krátce KS-integrálem) funkce f vzhledem ke g přes množinu E a označujeme ji jako $\int_E f\,\mathrm{d}g$. Jinak řečeno,

$$\int_E f\,\mathrm{d}g = \int_a^b (f\chi_E)\,\mathrm{d}g$$

jakmile integrál na pravé straně existuje.

Podle definice 6.61 existence integrálu $\int_E f\,\mathrm{d}g$ znamená, že existuje reálné číslo $I\in\mathbb{R}$ takové, že pro každé $\varepsilon>0$ můžeme najít kalibr δ na $[a,b]$ takový, že nerovnost

$$\Big|S(f\chi_E,\,\mathrm{d}g,\,P)-I\Big|<\varepsilon$$

platí pro každé δ–jemné značené dělení P intervalu $[a,b]$.

Podle definice 6.61 jsou následující základní vlastnosti KS-integrálu na elementárních množinách bezprostředními důsledky našich dosavadních znalostí o Kurzweilově-Stieltjesově integrálu.

6.62 Tvrzení. *Nechť E je elementární podmnožina intervalu $[a,b]$ a $f_1, f_2, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou takové funkce, že existují oba integrály*

$$\int_E f_1 \, \mathrm{d}g \quad a \quad \int_E f_2 \, \mathrm{d}g.$$

Potom pro libovolná $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ existuje také integrál $\int_E (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, \mathrm{d}g$ a platí

$$\int_E (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, \mathrm{d}g = c_1 \int_E f_1 \, \mathrm{d}g + c_2 \int_E f_2 \, \mathrm{d}g.$$

6.63 Poznámka. Jestliže E je elementární podmnožina intervalu $[a,b]$ a $h = 0$ na E, pak je zřejmě $\int_E h \, \mathrm{d}g = 0$ pro každou funkci $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Existuje-li tedy integrál $\int_E f_1 \, \mathrm{d}g$, pak podle tvrzení 6.62 platí $\int_E f_2 \, \mathrm{d}g = \int_E f_1 \, \mathrm{d}g$ pro každou funkci f_2 takovou, že $f_2 = f_1$ na E.

6.64 Věta. *Nechť E_1 a E_2 jsou elementární podmnožiny intervalu $[a,b]$ a $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Pak, jestliže existují oba integrály*

$$\int_{E_1} f \, \mathrm{d}g \quad a \quad \int_{E_2} f \, \mathrm{d}g,$$

existuje také integrál $\int_{E_1 \cup E_2} f \, \mathrm{d}g$ a platí rovnost

$$\int_{E_1 \cup E_2} f \, \mathrm{d}g = \int_{E_1} f \, \mathrm{d}g + \int_{E_2} f \, \mathrm{d}g.$$

D ů k a z . Protože je $f \chi_{E_1 \cup E_2} = f \chi_{E_1} + f \chi_{E_2}$, podle definice 6.61 a věty 6.8 máme

$$\int_{E_1} f \, \mathrm{d}g + \int_{E_2} f \, \mathrm{d}g = \int_a^b (f \chi_{E_1}) \, \mathrm{d}g + \int_a^b (f \chi_{E_2}) \, \mathrm{d}g$$
$$= \int_a^b (f \chi_{E_1 \cup E_2}) \, \mathrm{d}g = \int_{E_1 \cup E_2} f \, \mathrm{d}g.$$

□

Následující existenční tvrzení je důsledkem vět 6.30 a 6.35

6.65 Tvrzení. *Nechť E je elementární podmnožina intervalu $[a,b]$ a nechť f a g jsou regulované funkce na intervalu $[a,b]$, přičemž alespoň jedna má konečnou variaci na $[a,b]$. Potom existuje integrál $\int_E f \, \mathrm{d}g$.*

D ů k a z . Stačí si všimnout, že je-li f regulovaná na $[a,b]$ a E je elementární podmnožina intervalu $[a,b]$, pak je i funkce $f\chi_E$ regulovaná na $[a,b]$. Podobně, má-li f konečnou variaci na $[a,b]$, má i $f\chi_E$ konečnou variaci na $[a,b]$. □

Následující odhady jsou analogií odhadů z odstavce 6.3.

6.66 Věta. *Nechť* $J\subset[a,b]$ *je interval, přičemž* $c:=\inf J<d:=\sup J$. *Dále předpokládejme, že funkce* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a* $g\in BV(J)$ *jsou takové, že integrál* $\int_J f\;\mathrm{d}g$ *existuje. Potom:*

(i) *je-li* $J=(c,d)$, *pak* $\left|\int_J f\;\mathrm{d}g\right|\le(\sup_{t\in J}|f(t)|)\,(\mathrm{var}\,(g,J))$*;*

(ii) *je-li* $J=[c,d)$ *a jestliže existuje konečná limita* $g(c-)$, *pak*

$$\Big|\int_J f\;\mathrm{d}g\Big|\le(\sup_{t\in J}|f(t)|)\,(\mathrm{var}\,_(g,J))+|f(c)|\,|\Delta^-g(c)|\,;$$

(iii) *je-li* $J=(c,d]$ *a jestliže existuje konečná limita* $g(d+)$, *pak*

$$\Big|\int_J f\;\mathrm{d}g\Big|\le(\sup_{t\in J}|f(t)|)\,(\mathrm{var}\,(g,J))+|f(d)|\,|\Delta^+g(d)|\,;$$

(iv) *je-li* $J=(c,d)$ *a jestliže existují konečné limity* $g(c-)$, $g(d+)$, *pak*

$$\Big|\int_J f\;\mathrm{d}g\Big|\le(\sup_{t\in J}|f(t)|)\,(\mathrm{var}\,(g,J))+|f(c)|\,|\Delta^-g(c)|+|f(d)|\,|\Delta^+g(d)|.$$

D ů k a z . Předpokládejme, že je $a<c<d<b$.

Buď dáno libovolné $\varepsilon>0$. Díky našemu předpokladu o existenci integrálu $\int_J f\;\mathrm{d}g$ můžeme zvolit kalibr δ na $[a,b]$ tak, aby platilo

$$\left|S(f\chi_J,\mathrm{d}g,P)-\int_J f\,\mathrm{d}g\right|<\varepsilon \tag{6.96}$$

pro každé δ –jemné značené dělení P intervalu $[a,b]$. Dále, nechť δ^* je kalibr na $[a,b]$ takový, že

$$\delta^*\le\delta \text{ na } [a,b] \quad \text{a} \quad \delta^*(t)<\min\{|t-c|,|t-d|\} \quad \text{pro } \ t\in[a,b]\setminus\{c,d\}. \tag{6.97}$$

Nechť $P=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\tau})$ je libovolné δ^*–jemné značené dělení intervalu $[a,b]$. Označme symbolem P_J množinu všech dvojic $(\tau,[\alpha,\alpha'])$ pro které existuje $j\in\{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\alpha})\}$ takové, že $[\alpha,\alpha']=[\alpha_{j-1},\alpha_j]$ a $\tau=\tau_j$, přičemž průnik $[\alpha,\alpha']\cap[c,d]$ je neprázdný. Označme prvky množiny P_J tak, že bude

$$P_J=\{(\xi_j,[\beta_{j-1},\beta_j]):j=1,2,\dots,\nu(P_J)\}.$$

Bez ztráty obecnosti můžeme předpokládat, že platí

$$\beta_0 < c = \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{\nu(P_J)-1} = d < \beta_{\nu(P_J)}. \tag{6.98}$$

Vzhledem k definici kalibru δ^* musí být $\xi_1 = \xi_2 = c$ a $\xi_{\nu(P_J)} = \xi_{\nu(P_J)-1} = d$.

(i) Jestliže $J = (c, d)$, pak

$$\begin{aligned} S(f\chi_{(c,d)}, \mathrm{d}g, P) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\alpha})} (f\,\chi_{(c,d)})(\tau_j)\,[g(\alpha_j) - g(\alpha_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^{\nu(P_J)} (f\,\chi_{(c,d)})(\xi_j)\,[g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] = \sum_{j=3}^{\nu(P_J)-2} f(\xi_j)\,[g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})]. \end{aligned}$$

Protože $\{\beta_2, \ldots, \beta_{\nu(P_J)-2}\}$ je zobecněné dělení intervalu (c, d), odvodíme odtud snadno, že platí

$$|S(f\chi_{(c,d)}, \mathrm{d}g, P)| \le (\sup_{t\in J} |f(t)|)\,(\mathrm{var}\,(g, J))$$

neboli, vzhledem k nerovnosti (6.96),

$$\Big| \int_J f\,\mathrm{d}g \Big| \le (\sup_{t\in J} |f(t)|)\,(\mathrm{var}\,(g, J)) + \varepsilon.$$

Protože $\varepsilon > 0$ mohlo být libovolné, znamená to, že platí tvrzení (i).

(ii) Nechť $J = [c, d)$ a $f(c) \ne 0$. Protože existuje konečná limita $g(c-)$, můžeme najít $\eta > 0$ takové, že

$$|g(c-) - g(s)| < \frac{\varepsilon}{|f(c)|} \quad \text{pro } c - \eta < s < c.$$

Dále, zvolme kalibr δ^*, aby, platilo (6.97) a současně i $\delta^*(c) < \eta$.

Buď dáno δ^*–jemné značené dělení P intervalu $[a, b]$ a nechť systém P_J je konstruován jako v (6.98). Potom

$$S(f\chi_{[c,d)}, \mathrm{d}g, P) = \sum_{j=2}^{\nu(P_J)-2} f(\xi_j)\,[g(\beta_j) - g(\beta_{j-1})] + f(c)\,[g(c) - g(\beta_0)].$$

Tudíž

$$\begin{aligned} |S(f\chi_{[c,d)}, \mathrm{d}g, P)| &\le (\sup_{t\in[c,d)} |f(t)|)\,(\mathrm{var}\,(g, J)) + |f(c)|\,|g(c) - g(\beta_0)| \\ &\le (\sup_{t\in J} |f(t)|)\,(\mathrm{var}\,(g, J)) + |f(c)|\,|\Delta^- g(c)| \\ &\qquad + |f(c)|\,|g(c-) - g(\beta_0)| \\ &\le (\sup_{t\in J} |f(t)|)\,(\mathrm{var}\,(g, J)) + |f(c)|\,|\Delta^- g(c)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Vzhledem k (6.96), kde $J=[c,d),$ odtud plyne, že nerovnost

$$\Big|\int_J f\,\mathrm{d}g\Big| \le \big(\sup_{t\in J}|f(t)|\big)\,\big(\mathrm{var}\,(g,J)\big)+|f(c)|\,|\Delta^- g(c)|+2\,\varepsilon$$

platí pro každé $\varepsilon>0.$ Tím je dokázáno tvrzení (ii).

(iii) Předpokládejme, že $J=(c,d],\ f(d)\neq$ a $\gamma>0$ je takové, že

$$|g(s)-g(d+)|<\frac{\varepsilon}{|f(d)|}\quad\text{pro}\ d<s<d+\gamma.$$

Bez ztráty obecnosti můžeme předpokládat, že kalibr δ^* v (6.97) je takový, že $\delta^*(d)<\gamma.$ Buď dáno δ^*–jemné značené dělení P intervalu $[a,b]$ a nechť systém P_J je konstruován jako v (6.98). Potom

$$S(f\chi_{(c,d]},\mathrm{d}g,P)=\sum_{j=3}^{\nu(P_J)-1} f(\xi_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]+f(d)\,[g(\beta_{\nu(P_J)})-g(d)]$$

a tudíž

$$\begin{aligned}|S(f\chi_{(c,d]},\mathrm{d}g,P)| &\le \big(\sup_{t\in J}|f(t)|\big)\,\big(\mathrm{var}\,(g,J)\big)+|f(d)|\,|\Delta^+ g(d)|\\ &\qquad + |f(d)|\,|g(\beta_{\nu(P_J)}-g(d+))|\\ &\le \big(\sup_{t\in J}|f(t)|\big)\,\big(\mathrm{var}\,(g,J)\big)+|g(d)|\,|\Delta^+ g(d)|+\varepsilon.\end{aligned}$$

Podle (6.96) odtud plyne

$$\Big|\int_J f\,\mathrm{d}g\Big| \le \big(\sup_{t\in J}|f(t)|\big)\,\big(\mathrm{var}\,(g,J)\big)+|f(d)|\,|\Delta^+ g(d)|+2\,\varepsilon.$$

Tím je dokázáno tvrzení (iii).

(iv) Podobně jako v předchozích částech důkazu, nechť kalibr δ^* splňuje (6.97) a navíc $\delta^*(c)<\eta$ a $\delta^*(d)<\gamma.$ Buď dáno δ^*–jemné značené dělení P intervalu $[a,b]$ a nechť systém P_J je konstruován jako v (6.98). Potom

$$\begin{aligned}S(f\chi_{[c,d]},\mathrm{d}g,P)=&\sum_{j=2}^{\nu(P_J)-1} f(\xi_j)\,[g(\beta_j)-g(\beta_{j-1})]\\ &+f(c)\,[g(c)-g(\beta_0)]+f(d)\,[g(\beta_{\nu(P_J)})-g(d)].\end{aligned}$$

Tudíž

$$\begin{aligned}&|S(f\chi_{[c,d]},\mathrm{d}g,P)|\\ &\quad\le \big(\sup_{t\in J}|f(t)|\big)\,\big(\mathrm{var}\,(g,J)\big)+|f(c)|\,|\Delta^- g(c)|+|f(d)|\,|\Delta^+ g(d)|+2\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Vzhledem k (6.96), toto dokazuje tvrzení (iv).

Důkazy v případech, kdy může být $c=a$ nebo $d=b$ jsou analogické. Připomeňme jen, že je v těchto případech třeba použít konvenci $\Delta^- g(a)=\Delta^+ g(b)=0.$ □

Nyní vyšetříme trochu podrobněji vlastnosti integrálů přes libovolné ohraničené intervaly. V případě jednobodových intervalů máme následující tvrzení, které by se dokazovalo podobně jako analogické formule v příkladech 6.22.

6.67 Tvrzení. *Jestliže $\tau\in[a,b]$ a funkce $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ má v bodě τ obě konečné limity $g(\tau-)$ a $g(\tau+)$* [2] *pak integrál $\int_{[\tau]} f\,\mathrm{d}g$ existuje pro každou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, přičemž*

$$\left.\begin{aligned} &\int_{[a]} f\,\mathrm{d}g = f(a)\,\Delta^+ g(a),\\ &\int_{[\tau]} f\,\mathrm{d}g = f(\tau)\,\Delta\, g(\tau) \quad \textit{pro}\ \ \tau\in(a,b),\\ &\int_{[b]} f\,\mathrm{d}g = f(b)\,\Delta^- g(b). \end{aligned}\right\} \tag{6.99}$$

D ů k a z . Omezme se na případ, že $\tau\in(a,b)$ a $f(\tau)\neq 0.$ Buď dáno $\varepsilon>0.$ Zvolme

$$\eta\in(0,\min\{\tau-a,b-\tau\})$$

$$tak, aby platilo |g(\tau-)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\,|f(\tau)|} \quad \text{pro každé}\ \ x\in(\tau-\eta,\tau),$$
$$|g(x)-g(\tau+)| < \frac{\varepsilon}{2\,|f(\tau)|} \quad \text{pro každé}\ \ x\in(\tau,\tau+\eta)$$

a položme

$$\delta(x)=\begin{cases} \frac14(\tau-x) & \text{pro}\ \ x\in[a,\tau),\\ \eta & \text{pro}\ \ x=\tau,\\ \frac14(x-\tau) & \text{pro}\ \ x\in(\tau,b]. \end{cases}$$

Nechť $P=(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ je libovolné δ–jemné dělení intervalu $[a,b].$ Pak musí existovat $k\in\mathbb{N}$ takové, že $\xi_k=\tau$ a $[\sigma_{k-1},\sigma_k]\subset(\tau-\eta,\tau-\eta).$ Máme tedy

$$\begin{aligned} S(f\chi_{[\tau]},\mathrm{d}g,P) &= f(\tau)\,[g(\tau)-g(\sigma_{k-1})]+f(\tau)\,[g(\sigma_k)-g(\tau))]\\ &= f(\tau)\,\Delta^- g(\tau)+f(\tau)\,[g(\tau-)-g(\sigma_{k-1})]+f(\tau)\,\Delta^+ g(\tau)+f(\tau)\,[g(\sigma_k)-g(\tau+))]\\ &= f(\tau)\,\Delta g(\tau)+f(\tau)\,\Delta^+ g(\tau)+f(\tau)\,[g(\sigma_k)-g(\tau+))] \end{aligned}$$

[2] Připomeňme, že $g(a-)=g(a)$ a $g(b+)=g(b).$

a tudíž

$$|S(f\chi_{[\tau]}, \mathrm{d}g, P) - f(\tau)\,\Delta g(\tau)|$$
$$\leq |f(\tau)|\,|g(\tau-) - g(\sigma_{k-1})| + |f(\tau)|\,|g(\sigma_k) - g(\tau+))| < \varepsilon,$$

t.j.

$$\int_{[\tau]} f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f\chi_{[\tau]}\,\mathrm{d}g = f(\tau)\,\Delta\,g(\tau).$$

Tím je naše tvrzení dokázáno. □

Definice 6.61 závisí na základním intervalu $[a,b]$. To si nejlépe ověříme při integrování přes kompaktní intervaly. Z definice je evidentní, že pro dané funkce f, g rovnost

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f\,\mathrm{d}g$$

platí jakmile jeden ze dvou integrálů vyskytujících se v tomto vztahu existuje. Pro kompaktní podintervaly intervalu $[a,b]$ je ovšem situace už poněkud odlišná, jak ukazuje následující věta.

6.68 Věta. *Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g\in G([a,b])$ a $a<c<d<b$. Potom integrál $\int_{[c,d]} f\,\mathrm{d}g$ existuje tehdy a jen tehdy když existuje integrál $\int_c^d f\,\mathrm{d}g$. V takovém případě pak platí rovnost*

$$\int_{[c,d]} f\,\mathrm{d}g = \int_c^d f\,\mathrm{d}g + f(c)\,\Delta^- g(c) + f(d)\,\Delta^+ g(d). \tag{6.100}$$

D ů k a z . Podle definice máme

$$\int_{[c,d]} f\,\mathrm{d}g = \int_a^b (f\chi_{[c,d]})\,\mathrm{d}g = \int_a^c (f\chi_{[c,d]})\,\mathrm{d}g + \int_c^d (f\chi_{[c,d]})\,\mathrm{d}g + \int_d^b (f\chi_{[c,d]})\,\mathrm{d}g$$
$$= \int_a^c (f\chi_{[c]}\,\mathrm{d}g + \int_c^d f\,\mathrm{d}g + \int_d^b (f\chi_{[d]}\,\mathrm{d}g$$

a důkaz plyne z tvrzení 6.67. □

Integrace přes otevřené intervaly je popsána následující větou.

6.69 Věta. *Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g\in G([a,b])$ a $a\leq c<d\leq b$. Potom integrál $\int_{(c,d)} f\,\mathrm{d}g$ existuje tehdy a jen tehdy když existuje integrál $\int_c^d f\,\mathrm{d}g$. V takovém případě pak platí rovnost*

$$\int_{(c,d)} f\,\mathrm{d}g = \int_c^d f\,\mathrm{d}g - f(c)\,\Delta^+ g(c) - f(d)\,\Delta^- g(d). \tag{6.101}$$

D ů k a z. Podle tvrzení 6.67 integrály $\int_{[c]} f\,\mathrm{d}g$ a $\int_{[d]} f\,\mathrm{d}g$ existují a platí (6.99). Dále, protože je

$$f\chi_{[c,d]} = f\chi_{[c]} + f\chi_{(c,d)} + f\chi_{[d]},$$

je zřejmé, že integrál přes (c,d) existuje tehdy a jen tehdy když existuje integrál přes $[c,d]$. Podle věty 6.64 pak platí

$$\int_{[c,d]} f\,\mathrm{d}g = \int_{[c]} f\,\mathrm{d}g + \int_{(c,d)} f\,\mathrm{d}g + \int_{[d]} f\,\mathrm{d}g.$$

Nyní už snadno dokončíme důkaz pomocí relace (6.99) a věty 6.68. □

Podobně, pomocí tvrzení 6.67, můžeme také odvodit následující vztahy integrály přes polouzavřené intervaly.

6.70 Věta. *Nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g\in G([a,b])$ *a* $a\le c<d\le b$. *Potom platí následující tvrzení:*

(i) *Integrál* $\int_{[c,d)} f\,\mathrm{d}g$ *existuje tehdy a jen tehdy když existuje integrál* $\int_c^d f\,\mathrm{d}g$. *V takovém případě pak je*

$$\int_{[c,d)} f\,\mathrm{d}g = f(c)\,\Delta^- g(c) + \int_c^d f\,\mathrm{d}g - f(d)\,\Delta^- g(d). \tag{6.102}$$

(ii) *Integrál* $\int_{(c,d]} f\,\mathrm{d}g$ *existuje tehdy a jen tehdy když existuje integrál* $\int_c^d f\,\mathrm{d}g$. *V takovém případě pak je*

$$\int_{(c,d]} f\,\mathrm{d}g = -f(c)\,\Delta^+ g(c) + \int_c^d f\,\mathrm{d}g + f(d)\,\Delta^+ g(d). \tag{6.103}$$

6.71 Poznámka. Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g\in G([a,b])$ a $a\le c<d\le b$. Potom podle vět 6.68-6.70 platí, že jestliže existuje jeden z integrálů

$$\int_{[c,d]} f\,\mathrm{d}g,\ \int_{[c,d)} f\,\mathrm{d}g,\ \int_{(c,d]} f\,\mathrm{d}g,\ \int_{(c,d)} f\,\mathrm{d}g \ \text{ a } \int_c^d f\,\mathrm{d}g,$$

pak existují i všechny ostatní.

Je-li navíc g spojitá na $[a,b]$, pak

$$\int_{[c,d)} f\,\mathrm{d}g = \int_{(c,d]} f\,\mathrm{d}g = \int_{(c,d)} f\,\mathrm{d}g = \int_c^d f\,\mathrm{d}g = \int_{[c,d]} f\,\mathrm{d}g.$$

Nyní už můžeme odvodit vyjádření pro hodnotu integrálů přes elementární množiny.

6.72 Věta. *Budiž* E *elementární podmnožina intervalu* $[a,b]$ *s minimálním rozkladem* $\{J_k\colon k=1,2,\dots,N\}$ *a nechť funkce* $g\in\mathbb{G}[a,b]$ *a* $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *jsou takové, že existuje integrál* $\int_E f\,\mathrm{d}g$. *Potom pro každé* $k\in\{1,2,\dots,N\}$ *existuje integrál* $\int_{J_k} f\,\mathrm{d}g$ *a platí*

$$\int_E f\,\mathrm{d}g = \sum_{k=1}^{N}\int_{J_k} f\,\mathrm{d}g. \tag{6.104}$$

D ů k a z . Nechť $\overline{J}_k=[c_k,d_k]$ pro $k=1,2,\dots,N$. Podle předpokladu existuje integrál

$$\int_E f\,\mathrm{d}g := \int_a^b (f\chi_E)\,\mathrm{d}g.$$

Tudíž, podle věty 6.10 existuje pro každé $k=1,2,\dots,m$ i integrál $\int_{c_k}^{d_k}(f\chi_E)\,\mathrm{d}g$. Dále, všimněme si, že pro každé $k=1,2,\dots,N$ jsou integrály

$$\int_a^{c_k}(f\chi_{J_k})\,\mathrm{d}g) \quad \text{a} \quad \int_{d_k}^{b}(f\chi_{J_k})\,\mathrm{d}g)$$

buďto nulové nebo to jsou integrály přes jednobodové množiny, jejichž exisžtenci zaručuje tvrzení 6.67. Integrál $\int_{J_k} f\,\mathrm{d}g$ tedy existuje pro každé $k=1,2,\dots,N$.

Konečně, protože intervaly z minimálního rozkladu jsou disjuktní, rovnost (6.104) plyne z věty 6.64. □

Důsledkem definice 2.59, věty 6.66 a věty 6.72 je následující tvrzení.

6.73 Důsledek. *Buď* E *elementární podmnožina intervalu* $[a,b]$ *a nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a* $g\in\mathbb{BV}[a,b]\cap\mathbb{C}[a,b]$ *jsou takové, že existuje integrál* $\int_E f\,\mathrm{d}g$. *Potom*

$$\left|\int_E f\,\mathrm{d}g\right| \le (\sup_{t\in E}|f(t)|)\,(\operatorname{var}(g,E)).$$

Podle věty 6.72, jakmile existuje integrál přes elementární množinu, pak také existuje integrál přes každý interval z jejího minimálního rozkladu. Odtud okamžitě plynou i následující dvě tvrzení.

6.74 Důsledek. *Budiž* E *elementární podmnožina intervalu* $[a,b]$ *a nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a* $g\in\mathbb{BV}[a,b]\cap\mathbb{C}[a,b]$ *jsou takové, že existuje integrál* $\int_E f\,\mathrm{d}g$. *Potom integrál* $\int_T f\,\mathrm{d}g$ *existuje pro každou elementární podmnožinu* T *množiny* E.

6.75 Důsledek. *Nechť* E_1 *a* E_2 *jsou elementární podmnožiny intervalu* $[a,b]$, $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *a* $g\in\mathbb{G}[a,b]$. *Potom, jestliže existují oba integrály*

$$\int_{E_1} f\,\mathrm{d}g \quad \textit{a} \quad \int_{E_2} f\,\mathrm{d}g,$$

pak existuje také integrál $\int_{E_1\cup E_2} f\,\mathrm{d}g$ *a platí*

$$\int_{E_1\cup E_2} f\,\mathrm{d}g = \int_{E_1} f\,\mathrm{d}g + \int_{E_2} f\,\mathrm{d}g - \int_{E_1\cap E_2} f\,\mathrm{d}g. \tag{6.105}$$

Podobně, jestliže existuje integrál $\int_{E_1\cup E_2} f\,\mathrm{d}g$, *pak existují také oba integrály*

$$\int_{E_1} f\,\mathrm{d}g \quad \textit{a} \quad \int_{E_2} f\,\mathrm{d}g$$

a platí rovnost (6.105).

6.9 Bodová konvergence

Pro konvergenční věty jsme doposud potřebovali předpokládat alespoň stejnoměrnou konvergenci příslušných posloupností funkcí. V teorii obyčejných diferenciálních rovnic s absolutně spojitými řešeními hraje důležitou roli Lebesgueova věta o dominované konvergenci, ve které je stejnoměrná konvergence nahrazena bodovou konvergencí s.v. doplněnou o existenci společných majorant a minorant pro danou posloupnost funkcí. Analogií Lebesgueovy věty o dominované konvergenci ve světě Riemannovy resp. Riemannovy-Stieltjesovy integrace je věta o ohraničené konvergenci, která je známa též jako věta Arzelàova resp. Arzelàova-Osgoodova nebo také Osgoodova. V literatuře (viz např. [12, Theorem II.19.3.14]) lze nalézti důkaz opírající se o analogické tvrzení pro Riemannovy-Stieltjesovy integrály a zejména o Arzelàovo lemma (viz věta 5.61 a [63, Věta 5.61]).

6.76 Věta (Osgoodova věta)**.** *Předpokládejme, že pro funkci* $f\in\mathbb{G}[a,b]$ *a pro posloupnost* $\{f_n\}\subset\mathbb{G}[a,b]$ *platí*

$$|f_n| \le K < \infty \textit{ pro } n\in\mathbb{N} \tag{6.106}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \textit{ pro } x\in[a,b]. \tag{6.107}$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g = \int_a^b f\,\mathrm{d}g \tag{6.108}$$

pro každou funkci $g\in\mathbb{BV}[a,b]$.

D ů k a z . Integrály $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g$ a $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existují pro $n\in\mathbb{N}$ podle věty 6.30. Nechť $g=g^{\mathrm{C}}+g^{\mathrm{B}}$ je Jordanův rozklad funkce g takový, že $g^{\mathrm{C}}(a)=g(a)$. Potom podle věty 5.50 a cvičení 5.56 (i) existují integrály

$$(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g^{\mathrm{C}} \quad \text{a} \quad (\sigma)\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g^{\mathrm{C}} \quad \text{pro } n\in\mathbb{N}$$

a podle Osgoodovy věty pro RS–integrály (věta 5.61) platí

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma)\int_a^b f_n \,\mathrm{d}g^{\mathrm{C}} = (\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}g^{\mathrm{C}}$$

neboli (podle věty 6.13)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}g^{\mathrm{C}} = \int_a^b f \,\mathrm{d}g^{\mathrm{C}}. \tag{6.109}$$

Dále podle lemmatu 6.39 máme pro každé $n\in\mathbb{N}$

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}g^{\mathrm{B}} = \sum_{d\in D} f(d)\,\Delta\, g(d) \quad \text{a} \quad \int_a^b f_n \,\mathrm{d}g^{\mathrm{B}} = \sum_{d\in D} f_n(d)\,\Delta\, g(d),$$

kde D je množina bodů nespojitosti funkce g v intervalu $[a,b]$. Jestliže je D konečná, pak zřejmě platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{d\in D} f_n(d)\,\Delta\, g(d) = \sum_{d\in D} f(d)\,\Delta\, g(d),$$

a tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}g^{\mathrm{B}} = \int_a^b f \,\mathrm{d}g^{\mathrm{B}}. \tag{6.110}$$

Nechť $D=\{d_k : k\in\mathbb{N}\}$. Buď dáno $\varepsilon>0$. Podle důsledku 2.30 je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\, g(d_k)| \le \operatorname{var}_a^b g < \infty.$$

Existuje tedy $p_\varepsilon\in\mathbb{N}$ takové, že $\displaystyle\sum_{k=p_\varepsilon+1}^{\infty} |\Delta\, g(d_k)| < \frac{\varepsilon}{4\,K}$. Vzhledem k (6.106) a (6.107) je také $|f(x)|\le K$ pro $x\in[a,b]$, a tudíž

$$\Big|\sum_{k=p_\varepsilon+1}^{\infty} \big(f_n(d_k)-f(d_k)\big)\,\Delta\, g(d_k)\Big| \le 2\,K \sum_{k=p_\varepsilon+1}^{\infty} |\Delta\, g(d_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.111}$$

Dále protože

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{p_\varepsilon} f_n(d_k)\,\Delta\, g(d_k) = \sum_{k=1}^{p_\varepsilon} f(d_k)\,\Delta\, g(d_k),$$

existuje $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ takové, že

$$\Big|\sum_{k=1}^{p_\varepsilon} \big(f_n(d_k)-f(d_k)\big)\,\Delta\, g(d_k)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro } n\ge n_\varepsilon,$$

což dohromady s (6.111) dává

$$\Big|\int_a^b \big(f_n - f\big)\,\mathrm{d}g^{\mathrm{B}}\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty} \big(f_n(d_k) - f(d_k)\big)\ \Delta\,g(d_k)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{pro}\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Rovnost (6.110) tedy platí i tehdy, když množina D není konečná. Toto, společně s (6.109) a větou 6.8, zaručuje platnost rovnosti (6.108) a dokazuje tvrzení věty. □

Je zřejmé, že výše uvedený důkaz Osgoodovy věty nelze rozšířit na případ integrace abstraktních funkcí s hodnotami v Banachových prostorech. Díky pojmům variace a integraci přes elementární množiny můžeme ovšem Osgoodovu větu dokázat i alternativním a elementárnějším způsobem. Přitom ovšem tento postup bude možno použít i pro integraci abstraktních funkcí. Navíc, tento důkaz bude přímý a nebude potřebovat příslušnou versi Osgoodovy věty pro klasické Riemannovy-Stieltjesovy integrály a tedy ani Arzelàovo lemma. Klíčem bude následující tvrzení, které je analogií Lewinova lemmatu z práce [32]. V porovnání s Lewinovým lemmatem budeme místo Lebesgueovy míry pracovat s variací dané funkce na elementárních množinách.

6.77 Lemma. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a,b] \cap \mathbb{C}[a,b]$ *a nechť* $\{A_n\}$ *je posloupnost podmnožin intervalu* $[a,b]$ *taková, že platí*

$$A_{n+1} \subset A_n \quad \textit{pro každé}\ \ n \in \mathbb{N} \quad \textit{a} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset. \tag{6.112}$$

Definujme

$$v_n = \sup\{\,\text{var}\,(f,E)\colon E \in \mathcal{E}(A_n)\,\} \quad \textit{pro}\ \ n \in \mathbb{N}. \tag{6.113}$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty} v_n = 0. \tag{6.114}$$

D ů k a z . Všimněme si nejprve, že jestliže $A_n = \emptyset$, pak je podle definice 2.50 $v_n = 0$.

Předpokládejme, že (6.114) neplatí. Podle p5edpokladu (6.112), je posloupnost $\{v_n\}$ nerostoucí. Odtud plyne, že existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$v_n > \varepsilon \quad \text{pro každé}\ \ n \in \mathbb{N}. \tag{6.115}$$

Tudíž, vzhledem k definici v_n, pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje elementární množina $E_n \in \mathcal{E}(A_n)$ taková, že

$$\text{var}\,(f,E_n) > v_n - \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{6.116}$$

Protože f je spojitá, můžeme předpokládat, že E_n je uzavřená (viz poznámka 2.57). Nyní, nechť $H_n = \bigcap_{j=1}^n E_j$ pro $n \in \mathbb{N}$. Zřejmě je každá množina H_n uzavřená a platí $H_n \subset A_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukážeme, že platí

$$H_n \neq \emptyset \quad \text{for any}\ \ n \in \mathbb{N}. \tag{6.117}$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je dáno a nechť M je libovolná elementární podmnožina množiny $A_n \backslash E_n)$. Potom $M \cup E_n \in \mathcal{E}(A_n)$ a, vzhledem k aditivitě variace, platí také

$$\operatorname{var}(f, M) + \operatorname{var}(f, E_n) = \operatorname{var}(f, M \cup E_n) \leq v_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Vzhledem k (6.116) odtud plyne, že $\operatorname{var}(f, M) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Zřejmě platí

$$(E \setminus E_j) \in \mathcal{E}(A_n \backslash E_j) \subset \mathcal{E}(A_j \backslash E_j) \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n$$

a

$$E = \bigcup_{j=1}^{n} (E \setminus E_j) \quad \text{pro každou } E \in \mathcal{E}(A_n \setminus H_n).$$

Tudíž

$$\operatorname{var}(f, E) \leq \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}(f, E \setminus E_j) < \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^j} < \varepsilon \quad \text{pro každou } E \in \mathcal{E}(A_n \setminus H_n).$$

Toto, společně s tvrzením (6.114), implikuje, že nutně musí existovat elementární množina $E \in \mathcal{E}(H_n)$ taková, že platí $\operatorname{var}(f, E) > \varepsilon$. To ovšem znamená, že H_n musí být neprázdná. Platí tedy (6.117).

Všechny množiny H_n jsou neprázdné, uzavřené a ohraničené a jejich posloupnost $\{H_n\}$ je kontraktivní, tj.

$$H_{n+1} \subset H_n \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Podle známé Cantorovy věty musí tedy platit

$$\bigcap_n A_n \supset \bigcap_n H_n \neq \emptyset.$$

Toto je ovšem spor s naším předpokladem, že $\bigcap_n A_n = \emptyset$ a tudíž (6.114) musí platit. Důkaz lemmatu je tím dokončen. □

Nyní můžeme začít s alternativním důkazem věty 6.76. Nejprve se ovšem omezíme na případ, že integrátor g je spojitý.

6.78 Lemma. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b] \cap \mathbb{C}[a,b]$ *a posloupnost* $\{f_n\} \subset \mathbb{G}[a,b]$ *je taková, že*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0 \quad \textit{pro } t \in [a,b] \quad \textit{a} \quad \|f_n\| \leq K < \infty \quad \textit{pro } n \in \mathbb{N}.$$

Potom integrál $\int_a^b f_n \, \mathrm{d}g$ *existuje pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}g = 0. \tag{6.118}$$

D ů k a z . Je-li $\operatorname{var}_a^b g = 0$, pak

$$\int_a^b f_n \, \mathrm{d}g = \int_a^b f_n \, \mathrm{d}g = 0 \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Můžeme tedy předpokládat, že je $\operatorname{var}_a^b g > 0$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujme

$$A_n = \Big\{ t \in [a,b] \colon |f_m(t)| \geq \frac{\varepsilon}{6 \operatorname{var}_a^b g} \Big\} \text{ pro nějaké } m \geq n \}.$$

Zřejmě, $A_{n+1} \subset A_n$ pro $n \in \mathbb{N}$ a $\bigcap_n A_n = \emptyset$. Nechť v_n jsou definovány jako v (6.113). Připomeňme, že $v_n = 0$ jestliže je $A_n = \emptyset$. Podle lemmatu 6.77 máme $\lim\limits_{n \to \infty} v_n = 0$. Speciálně, existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$v_n < \frac{\varepsilon}{6\,K} \quad \text{pro } n \geq n_\varepsilon. \tag{6.119}$$

Odtud dále plyne, že

$$\operatorname{var}(g, E) < \frac{\varepsilon}{6\,K} \quad \text{pro každé } n \geq n_\varepsilon \text{ a každou } E \in \mathcal{E}(A_n). \tag{6.120}$$

Nyní, mějme dáno libovolné $n \geq n_\varepsilon$ a nechť

$$\varepsilon' = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{6 \operatorname{var}_a^b g}, K \right\}.$$

Potom, protože funkce f_n je regulovaná, podle věty 4.7 existuje konečná skoková funkce $h_n \in [a,b]$ taková, že je

$$\|h_n - f_n\| < \varepsilon', \tag{6.121}$$

Tudíž

$$\|h_n\| < K + \varepsilon' \leq 2\,K. \tag{6.122}$$

Definujme množiny

$$U_n = \left\{ t \in [a,b] \colon |h_n(t)| \geq \frac{\varepsilon}{3 \operatorname{var}_a^b g} \right\} \quad \text{a} \quad V_n = [a,b] \setminus U_n.$$

Je zřejmé, že U_n a V_n jsou elementární množiny. Mohou být ovšem prázdné. Dále, podle (6.121) máme

$$\frac{\varepsilon}{6 \operatorname{var}_a^b g} = \frac{\varepsilon}{3 \operatorname{var}_a^b g} - \frac{\varepsilon}{6 \operatorname{var}_a^b g} \leq |h_n(t)| - \varepsilon' < |f_n(t)| \quad \text{pro } t \in U_n.$$

Každá U_n je tedy elementární podmnožina A_n. Podle (6.120) tedy platí

$$\operatorname{var}(g, U_n) < \frac{\varepsilon}{6\,K}. \tag{6.123}$$

Dále, podle věty 6.25 a relace (6.121) dostáváme

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g\Big| &\le \Big|\int_a^b (f_n-h_n)\,\mathrm{d}g\Big| + \Big|\int_a^b h_n\,\mathrm{d}g\Big|\\ &\le (\|f_n-h_n\|)\,(\mathrm{var}_a^b g) + \Big|\int_a^b h_n\,\mathrm{d}g\Big| < \frac{\varepsilon}{6} + \Big|\int_a^b h_n \mathrm{d}g\Big|,\end{aligned}$$

tj.

$$\Big|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g\Big| < \frac{\varepsilon}{6} + \Big|\int_a^b h_n\,\mathrm{d}g\Big|. \tag{6.124}$$

Na druhou stranu, z věty 6.64, důsledku 6.73, vztahů (6.122) a (6.123) a definice V_n plyne, že

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b h_n\,\mathrm{d}g\Big| &\le \Big|\int_{U_n} h_n\,\mathrm{d}g\Big| + \Big|\int_{V_n} h_n\,\mathrm{d}g\Big|\\ &\le \|h_n\|\,\mathrm{var}\,(g,U_n) + (\sup_{t\in V_n}|h_n(t)|)\,(\mathrm{var}\,(g,V_n))\\ &< \frac{2\,K\,\varepsilon}{6\,K} + \frac{\varepsilon\,\mathrm{var}_a^b g}{3\,\mathrm{var}_a^b g} = \frac{2\,\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Dosadíme-li toto do (6.124), dostaneme

$$\Big|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g\Big| < \varepsilon \quad \text{pro každé } n \ge n_\varepsilon.$$

Odtud už okamžitě plyne, že kýžená relace (6.118) platí. □

Důkaz věty 6.76. Nechť $g = g^{\mathrm{C}} + g^{\mathrm{B}}$ je Jordanův rozklad funkce g (viz věta 2.42), tj. g^{C} je spojitá na $[a,b]$ a g^{B} je skoková část funkce g daná výrazem

$$g^{\mathrm{B}}(t) = \sum_{a\le d_k<t} \Delta^+ g(d_k) + \sum_{a<d_k\le t} \Delta^- g(d_k) \quad \text{pro } t\in[a,b],$$

kde $D=\{d_k\}\subset[a,b]$ je množina bodů nespojitosti funkce g na intervalu $[a,b]$.

Díky větě 6.30 víme, že integrály

$$\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g, \quad \int_a^b f_n\,\mathrm{d}g^{\mathrm{C}}, \ \text{ a } \int_a^b f_n\,\mathrm{d}g^{\mathrm{B}}$$

existují pro každé $n\in\mathbb{N}$ a vzhledem k linearitě integrálu odtud plyne, že rovnost

$$\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g = \int_a^b f_n\,\mathrm{d}g^{\mathrm{C}} + \int_a^b f_n\,\mathrm{d}g^{\mathrm{B}}$$

platí pro každé $n \in \mathbb{N}$. Označme $h_n = f_n - f$ pro $n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} h_n(t) = 0 \qquad \text{a} \qquad \|h_n\| \le K + \|f\| \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Podle lemmatu 6.78 máme

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n \, \mathrm{d}g^{\mathrm{C}} = 0,$$

neboli

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}g^{\mathrm{C}} = \int_a^b f \, \mathrm{d}g^{\mathrm{C}}. \tag{6.125}$$

Zbývá tedy dokázat konvergenci posloupnosti $\int_a^b f_n \, \mathrm{d}g^{\mathrm{B}}$. Označme symbolem D množinu bodů nespojitosti funkce g v intervalu (a,b). Potom podle lemmatu 6.39 máme

$$\int_a^b f_n \, \mathrm{d}g^{\mathrm{B}} = f_n(a)\,\Delta^+ g(a) + \sum_{d\in D} f_n(d)\,\Delta g(d) + f_n(b)\,\Delta^- g(b) \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}$$

a

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g = f(a)\,\Delta^+ g(a) + \sum_{d\in D} f(d)\,\Delta g(d) + f(b)\,\Delta^- g(b).$$

Je-li D konečná, pak ovšem z bodové konvergence posloupnosti $\{f_n\}$ okamžitě plyne, že platí

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Big(f_n(a)\,\Delta^+ g(a) + \sum_{d\in D} f_n(d)\,\Delta g(d) + f_n(b)\,\Delta^- g(b) \Big) \\ = f(a)\,\Delta^+ g(a) + \sum_{d\in D} f(d)\,\Delta g(d) + f(b)\,\Delta^- g(b)\end{aligned}$$

a následně i (6.108).

Předpokládejme, že D je nekonečná. Víme ovšem, že D je nejvýše spočetná a podle důsledku 2.30 je řada $\sum_{k=1}^\infty |\Delta g(d_k)|$ absolutně konvergentní. Je-li tedy dáno libovolné $\varepsilon > 0$, pak můžeme zvolit $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\sum_{k=p_\varepsilon+1}^\infty |\Delta g(d_k)| < \frac{\varepsilon}{2\,(K + \|f\|)}.$$

Tudíž

$$\Big| \sum_{k=p_\varepsilon+1}^\infty [f_n(d_k) - f(d_k)]\,\Delta g(d_k) \Big| \le (K + \|f\|_\infty) \sum_{k=p_\varepsilon+1}^\infty |\Delta g(d_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Na druhé straně, můžeme také zvolit $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo

$$\Big| \sum_{k=1}^{p_\varepsilon} [f_n(d_k) - f(d_k)]\,\Delta g(d_k) \Big| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro } n \ge n_\varepsilon,$$

neboli

$$\Big|\int_a^b (f_n - f)\,\mathrm{d}g^{\mathrm{B}}\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty}[f_n(d_k) - f(d_k)]\,\Delta g(d_k)\Big| < \varepsilon \quad \text{pro } \ n \geq n_\varepsilon.$$

Odtud plyne, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}g^{\mathrm{B}} = \int_a^b f\,\mathrm{d}g^{\mathrm{B}}$$

a tedy, vzhledem k 6.125 také (6.108). □

6.10 Integrály maticových a vektorových funkcí

Jsou-li maticové funkce $F\colon [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$, $G\colon [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ takové, že všechny integrály

$$\int_a^b f_{i,k}\,\mathrm{d}g_{k,j} \quad (i = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, p,\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

existují, pak symbol

$$\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}\,G(t), \quad \text{(resp. krátce } \int_a^b F\,\mathrm{d}\,G\text{)}$$

značí matici $M \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ typu $m \times n$ s prvky

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{p}\int_a^b f_{i,k}\,\mathrm{d}g_{k,j}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Analogicky definujeme také integrály $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}\,[F]\,G$, resp. $\displaystyle\int_a^b F\,\mathrm{d}\,[G]\,H$, kde F, G a H jsou maticové funkce vhodných rozměrů.

Připomeňme, že podle konvence (xiv) z Označení a úmluv značíme normu matice $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ symbolem $|A|$ a definujeme ji předpisem $|A| = \displaystyle\max_{j=1,\ldots,m}\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|$. V této souvislosti považujeme prvky prostoru $\mathbb{R}^n$ za matice typu $n \times 1$ (neboli sloupcové vektory). Jinými slovy, ztotožňujeme prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. To znamená, že klademe

$$|x| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

Potom platí $|A\,x| \leq |A|\,|x|$ pro $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Je také známo, že platí

$$|A| = \sup\big\{|A\,x| : x \in \mathbb{R}^n \ \text{ a } \ |x| \leq 1\big\}.$$

Variace maticové funkce $F:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ je definovaná formálně stejným předpisem jako variace skalárních funkcí, tj.

$$\operatorname{var}_a^b F=\sup_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}|F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})|.$$

Snadno se ověří, že platí

$$\max_{\substack{i=1,2,\dots,m\\ j=1,2,\dots,n}}\big(\operatorname{var}_a^b f_{i,j}\big)\le\operatorname{var}_a^b F\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\operatorname{var}_a^b f_{i,j}.$$

To znamená, že maticová funkce $F:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ má konečnou variaci právě tehdy, když má konečnou variaci každá její složka. Podobně, F je spojitá, resp. regulovaná právě tehdy, když stejnou vlastnost má každá její složka.

Rozšíření výsledků uvedených v této a předešlé kapitole na případ funkcí maticových resp. vektorových je tedy snadné. Je ovšem nutno si uvědomit, že operace násobení matic není obecně komutativní, a tak musíme mít stále na paměti, že nesmíme libovolně měnit pořadí maticových funkcí, v jakém se v součinech obsažených v aproximujících součtech $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ objevují. Na příklad větu o integraci per-partes (věta 6.46) je třeba formulovat takto:

Jestliže $F:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$ je regulovaná na $[a,b]$ a $G:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$ má konečnou variaci na $[a,b]$, pak existují oba integrály

$$\int_a^b F\,\mathrm{d}G \quad \textit{a} \quad \int_a^b \mathrm{d}[F]\,G$$

a platí

$$\int_a^b F\,\mathrm{d}G+\int_a^b\mathrm{d}[F]\,G=F(b)\,G(b)-F(a)\,G(a)\\ +\sum_{x\in[a,b]}\Big(\Delta^-F(x)\,\Delta^-G(x)-\Delta^+F(x)\,\Delta^+G(x)\Big).$$

Podobně třeba věta o substituci (věta 6.57) bude vypadat takto:

Předpokládejme, že pro funkce $F:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$ a $G:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^n)$ existuje integrál $\int_a^b F\,\mathrm{d}\,G$. Potom pro každou ohraničenou funkci $H:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$ platí:

Existuje-li jeden z integrálů

$$\int_a^b H(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x F\,\mathrm{d}\,G\Big],\quad \int_a^b (H\,F)\,\mathrm{d}\,G,$$

existuje i druhý a v takovém případě pak platí

$$\int_a^b H(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x F\,\mathrm{d}\,G\Big]=\int_a^b (H\,F)\,\mathrm{d}\,G.$$

6.11 Souvislost s dalšími typy integrálů

V odstavci 6.2 jsme si již vyjasnili vzájemné vztahy mezi Kurzweilovým-Stieltjesovým integrálem na straně jedné a Riemannovými-Stieltjesovými integrály resp. Perronovým-Stieltjesovým integrálem na straně druhé. Dotkli jsme se i vztahu s Newtonovým integrálem. Nyní stručně načrtneme souvislosti i s několika dalšími známými integrály Stieltjesova typu.

LEBESGUEŮV-STIELTJESŮV INTEGRÁL (LS–integrál)
byl popsán v řadě monografií a učebnic, viz např. T. H. Hildebrandt [12, kapitola VI], V. Jarník [16, kapitoly II a X], A. N. Kolmogorov a S. V. Fomin [17, VI.6.3], J. Lukeš [33, kapitola 12], S. Saks [45, kapitola III]. Existuje několik cest k jeho definici. Vesměs se ale jedná o poměrně komplikovaný proces. Nejčastěji je integrál $(\mathrm{LS})\int_M f\,\mathrm{d}g$ přes množinu $M\subset[a,b]$ definován zprvu pro f nezáporné, ohraničené a borelovsky měřitelné a g neklesající a zprava spojité jako Lebesgueův integrál vzhledem k Lebesgueově-Stieltjesově míře μ_g, tj. σ-aditivní míře vzniklé rozšířením míry intervalu $G((c,d\,])=g(d)-g(c)$ pro $[c,d\,]\subset[a,b]$ podobným způsobem, jako se buduje Lebesgueova míra rozšířením obvyklé míry intervalu $\ell([c,d\,])=d-c.$ Definice se pak pomocí rozkladu funkcí s konečnou variací na rozdíl dvou neklesajících funkcí a rozkladu $f=f^+-f^-$ rozšíří na případ, kdy f je ohraničená a borelovsky měřitelná a $g\in\mathbb{BV}[a,b].$ Alternativní možností je definovat LS–integrál jako rozšíření RS–integrálu Daniellovou metodou.

Na rozdíl od KS–integrálu, LS–integrál má poněkud užší třídu integrovatelných funkcí. Nezahrnuje například integraci vzhledem k regulovaným funkcím. Na druhou stranu, neomezuje se na integraci přes interval. Má smysl uvažovat o LS–integraci přes libovolnou LS-měřitelnou množinu.

Vztah mezi LS–integrálem a PS–integrálem (a tedy i KS–integrálem) je dobře charakterizován následujícím tvrzením obsaženým v Saksově monografii (viz [45, Theorem VI (8.1)]). (Všimněme si její souvislosti s naší větou 6.68, která do značné míry ospravedlňuje naši definici 6.61 KS –integrálu přes elementární množiny.)

Nechť $g\in\mathbb{BV}[a,b],\ f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *a nechť existuje integrál* $(\mathrm{LS})\int_{(a,b)}f\,\mathrm{d}g.$ *Potom existuje také* PS*–integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g=(\mathrm{LS})\int_{(a,b)}f\,\mathrm{d}g+f(a)\,\Delta^+g(a)+f(b)\,\Delta^-g(b).$$

Odtud podle věty o substituci (věta 6.57) plyne i následující zajímavé tvrzení.

Je-li f *ohraničená na* $[a,b],\ h\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *lebesgueovsky integrovatelná na* $[a,b]$ *a*

$$g(t)=g(a)+\int_a^t h(x)\,\mathrm{d}x\quad \textit{pro}\ \ t\in[a,b],$$

pak

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_a^b f(t)\,h(t)\,\mathrm{d}\,t,$$

kde integrál na pravé straně je Lebesgueův.

YOUNGŮV INTEGRÁL A KREJČÍHO KN–INTEGRÁL

Nechť $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ a $g\in\mathbb{G}[a,b]$. Označme $\mathscr{T}_Y[a,b]$ množinu všech značených dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ takových, že platí

$$\sigma_{j-1}<\xi_j<\sigma_j \quad \text{pro každé } j\in\{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\},$$

a definujme

$$\begin{aligned}S_Y(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(a)\,\Delta^+g(a) + &\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1} f(\sigma_j)\,\Delta\,g(\sigma_j)\\ &+\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j-)-g(\sigma_{j-1}+)] + f(b)\Delta^-g(b).\end{aligned}$$

pro $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$. Dosadíme-li nyní $S_Y(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ místo $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ a $\mathscr{T}_Y[a,b]$ místo $\mathscr{T}[a,b]$ do RS–integrálu, dostaneme *Youngovy* ((δ) nebo (σ)) integrály.

O Youngově integrálu a zejména o jeho (σ)-verzi $(\sigma\mathrm{Y})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ je podrobně pojednáno v odstavci II.19 monografie T. H. Hildebrandta [12]. Youngovy integrály jsou zřejmě obecnější než odpovídající RS-integrály. Jestliže funkce f je regulovaná na $[a,b]$ a g má na $[a,b]$ konečnou variaci, pak integrál $(\sigma\mathrm{Y})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje a má stejnou hodnotu jako KS–integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$.

Na druhou stranu, jestliže g je regulovaná na $[a,b]$ a

$$g(a)=g(t-)=g(s+)=g(b) \quad \text{pro } t\in(a,b] \text{ a } s\in[a,b),$$

pak je

$$S_Y(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=0 \quad \text{pro každou funkci } f\colon[a,b]\to\mathbb{R} \text{ a každé } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}_Y[a,b],$$

tj.

$$(\sigma\mathrm{Y})\int_a^b f\,\mathrm{d}g = 0.$$

Takové tvrzení ovšem neplatí obecně pro KS–integrál, jak je ukázáno v [51, Example 1.1]. P. Krejčí proto nedávno (viz [19]) upravil definici KS–integrálu tak, že jeho modifikovaný KS–integrál, který nazývá KN–integrál, už v sobě plně zahrnuje i integrál (σ)–Youngův. Jeho definice spočívá v šikovném zúžení množiny přípustných značených dělení a můžeme ji zformulovat takto:

Nechť $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ a $I \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $(\mathrm{KN})\int_a^b f\,\mathrm{d}g = I$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existují kalibr δ a spočetná podmnožina A intervalu $[a,b]$ taková, že nerovnost

$$|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon$$

platí pro každé δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ takové, že žádná z jeho značek ξ_j neleží v množině A.

DUSHNIKŮV (VNITŘNÍ) INTEGRÁL

Dosadíme-li do definice 5.3 místo množiny $\mathscr{T}[a,b]$ značených dělení množinu $\mathscr{T}_Y[a,b]$ uvedenou v předchozím odstavci, dostaneme *Dushnikovy* neboli také *vnitřní* ((δ) nebo (σ)) integrály. Je zřejmé, že jestliže existuje integrál $(\sigma)\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, pak existuje i Dushnikův (σ)–integrál $(\sigma\mathrm{D})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a mají stejnou hodnotu. Z hlediska množiny integrovatelných funkcí je Dushnikův integrál podobně obecný jako KS–integrál. Obecně se však jeho hodnoty liší od odpovídajících hodnot KS–integrálu. To lze nahlédnout z následujícího vztahu (viz [14, Theorem 4.7])

$$(\sigma\mathrm{Y})\int_a^b f\,\mathrm{d}g + (\sigma\mathrm{D})\int_a^b g\,\mathrm{d}f = f(b)\,g(a) - f(a)\,g(a),$$

který platí, jestliže jsou obě funkce f a g regulované na $[a,b]$ a alespoň jedna z nich má na $[a,b]$ konečnou variaci. Dushnikův integrál je podrobně popsán v monografii [13] Ch.S. Höniga, který rozšířil jeho definici i na funkce s hodnotami v Banachových prostorech a vyšetřil jeho vlastnosti natolik, že mohl na jejich základě vybudovat teorii Volterrových-Stieltjesových integrálních rovnic v Banachových prostorech.

INTEGRACE V ABSTRAKTNÍCH PROSTORECH

Rozšíření integrace na vektorové a maticové funkce jsme ukázali v odstavci 6.10. Analogicky lze postupovat i v případě abstraktních funkcí, tj. funkcí s hodnotami v Banachových prostorech. Je-li $\mathbb{X}$ Banachův prostor a $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ odpovídající Banachův prostor spojitých lineárních operátorů na $\mathbb{X}$ a

$$F : [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{X}),\; G : [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{X}),\; g : [a,b] \to \mathbb{X},$$

pak můžeme definovat KS–integrály

$$\int_a^b \mathrm{d}F\,g, \quad \int_a^b F\,\mathrm{d}g, \quad \int_a^b \mathrm{d}F\,G, \quad \int_a^b F\,\mathrm{d}G.$$

Na příklad $\int_a^b F\,\mathrm{d}g = I \in \mathbb{X}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kalibr $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí

$$\Big\| \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} F(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big] - I \Big\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon$$

pro každé δ–jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$. Pojem variace lze snadno přenést i na abstraktní funkce. Pro funkci $f:[a,b]\to\mathbb{X}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$V(f,\boldsymbol{\sigma})=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}|f(\sigma_j)-f(\sigma_{j-1})|_{\mathbb{X}} \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b f=\sup\{V(f,\boldsymbol{\sigma}):\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\}.$$

Je také zřejmé, jak definovat prostor $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{X})$ regulovaných funkcí s hodnotami v $\mathbb{X}$. Potom např. oba integrály

$$\int_a^b \mathrm{d}F\,G \quad \text{a} \quad \int_a^b F\,\mathrm{d}G$$

existují, jestliže $F\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{X}))$ a $G\in\mathbb{G}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{X}))$ a platí i většina tvrzení známých pro integraci skalárních funkcí (viz [53], [56] a [40]). Jsou však i výjimky: např. Lemma 6.56 platí pouze, pokud má prostor $\mathbb{X}$ konečnou dimenzi. To znamená mj., že jsou jisté potíže s přenesením např. věty o substituci na abstraktní integrály. V této stručné informaci stojí ještě za zmínku, že pokud nemá prostor $\mathbb{X}$ konečnou dimenzi, má smysl místo variace uvažovat obecně slabší pojem *semivariace*, který se definuje takto:

Pro danou funkci $F:[a,b]\to L(\mathbb{X})$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ položme nejprve

$$V_a^b(F,\boldsymbol{\sigma})=\|\sup\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}[F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})]\,x_j\Big\|_{\mathbb{X}}\Big\},$$

kde supremum se bere přes všechny možné volby prvků $x_j\in\mathbb{X},\ j=1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ takových, že $\|x_j\|_X\le 1.$ Potom číslo

$$(\mathcal{B})\operatorname{var}_a^b F=\sup\{V_a^b(F,\boldsymbol{\sigma}):\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\}$$

se nazývá *semivariace* funkce F na $[a,b]$ (viz např. [13]). Zpravidla (ne vždy) je možno předpoklady o konečné variaci zeslabit na konečnou semivariaci. Je známo, že má-li $\mathbb{X}$ konečnou dimenzi, pak pojmy variace a semivariace splývají.

Poznamenejme ještě, že integrace funkcí s hodnotami v Hilbertových, resp. reflexivních Banachových prostorech má uplatnění např. v teorii hystereze (viz např. [22] nebo [23]).

Důkazy podstatné části tvrzení uvedených v této kapitole byly převzaty z monografie [63] (viz též [62]). Některé jsou pak modifikacemi důkazů analogických tvrzení pro speciální případ $g(x)\equiv x$ ze Schwabikovy monografie [49]. Odstavec 6.8 týkající se integrace na elementárních množinách a část odstavce 6.9 věnovaná přímému důkazu Osgoodovy věty jsou založeny na práci [39].

Kapitola 7

Aplikace Stieltjesova integrálu ve funkcionální analýze

V této kapitole nejprve ukážeme, jak se Stieltjesovy integrály uplatní při reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů na některých prostorech funkcí. Nejprve připomeňme několik základních pojmů.

7.1 Několik základních pojmů z funkcionální analýzy

(i) Nechť $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ jsou lineární (vektorové) prostory. Zobrazení

$$\beta : (x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \beta(x,y) \in \mathbb{R}$$

se nazývá *bilineární*, jestliže platí

$$\begin{aligned}
&\beta(x_1+x_2,y) = \beta(x_1,y) + \beta(x_2,y) && \text{pro všechna } x_1,x_2 \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y},\\
&\beta(\lambda\, x,y) = \lambda\, \beta(x,y) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y},\ \lambda \in \mathbb{R},\\
&\beta(x,y_1+y_2) = \beta(x,y_1) + \beta(x,y_2) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X},\ y_1,y_2 \in \mathbb{Y},\\
&\beta(x,\lambda\, y) = \lambda\, \beta(x,y) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y},\ \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(ii) Prostory $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ tvoří *duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení* β, jestliže platí

$$\begin{aligned}
&\beta(x,y) = 0 \ \text{ pro všechna } x \in \mathbb{X} \implies y = 0,\\
&\beta(x,y) = 0 \ \text{ pro všechna } y \in \mathbb{X} \implies x = 0.
\end{aligned}$$

(iii) Lineárním zobrazením lineárního prostoru $\mathbb{X}$ do $\mathbb{R}$ říkáme *lineární funkcionály* na $\mathbb{X}$. Pro libovolné lineární funkcionály Φ, Ψ na $\mathbb{X}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{X}$ definujeme

$$(\Phi + \Psi)(x) = \Phi(x) + \Psi(x) \quad \text{a} \quad (\lambda\, \Phi)(x) = \lambda\, \Phi(x).$$

Množina lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{X}$ je zřejmě vzhledem k takto zavedeným operacím také lineární prostor. (Nulovým prvkem množiny lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{X}$ je přirozeně funkcionál $0 : x \in \mathbb{X} \to 0 \in \mathbb{R}$.)

(iv) Je-li $\mathbb{X}$ Banachův prostor s normou $x \in \mathbb{X} \to \|x\|_{\mathbb{X}}$, pak lineární funkcionál Φ na $\mathbb{X}$ je spojitý (vzhledem k topologii indukované normou $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$) právě tehdy, když je ohraničený, tj. existuje číslo $K \in [0,\infty)$ takové, že $|\Phi(x)| \le K\, \|x\|_{\mathbb{X}}$ platí pro každé $x \in \mathbb{X}$ (viz [17, IV.1.2]). Prostor spojitých lineárních funkcionálů na Banachově prostoru $\mathbb{X}$ značíme $\mathbb{X}^*$ a nazýváme *duální* (nebo též *adjungovaný prostor*) k $\mathbb{X}$. Předpisem

$$\Phi \in \mathbb{X}^* \to \|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}} \le 1\}$$

je přirozeně definována norma na $\mathbb{X}^*$ a $\mathbb{X}^*$ je vzhledem k této normě také Banachův prostor (viz [17, IV.2.1]). Povšimněme si též, že zobrazení

$$x \in \mathbb{X},\ \Phi \in \mathbb{X}^* \to \Phi(x) \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

je bilineární.

Významnou roli v teorii spojitých lineárních operátorů hraje věta Hahnova-Banachova, kterou zde (společně s jedním jejím užitečným důsledkem) připomeneme v obecnosti postačující pro naše účely. Důkazy lze najít ve většině učebnic funkcionální analýzy, viz například [17, IV.1.3].

7.1 Věta (HAHN-BANACH)**.** *Nechť* $\mathbb{X}$ *je Banachův prostor a* $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ *je jeho podprostor. Potom pro každý spojitý lineární funkcionál* Φ *na* $\mathbb{Y}$ *existuje spojitý lineární funkcionál* $\widetilde{\Phi}$ *na* $\mathbb{X}$ *takový, že*

$$\widetilde{\Phi}(y) = \Phi(y) \quad \textit{pro}\ \ y \in \mathbb{Y} \quad \textit{a} \quad \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*} = \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}. \tag{7.2}$$

7.2 Věta. *Nechť* $\mathbb{X}$ *je Banachův prostor a* $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ *je jeho podprostor. Potom pro každý prvek* $z \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$ *existuje spojitý lineární funkcionál* Φ *na* $\mathbb{X}$ *takový, že*

$$\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = 1, \quad \Phi(y) = 0 \quad \textit{pro}\ \ y \in \mathbb{Y} \quad \textit{a} \quad \Phi(z) = \operatorname{dist}(\mathbb{Y}, z),$$

kde $\operatorname{dist}(\mathbb{Y}, z)$ *značí vzdálenost prvku* z *od množiny* $\mathbb{Y}$, *tj.*

$$\operatorname{dist}(\mathbb{Y}, z) = \inf\{\|y - z\|_{\mathbb{X}} : y \in \mathbb{Y}\}.$$

Pomocí věty 7.2 snadno dokážeme následující tvrzení.

7.3 Důsledek. *Je-li* $\mathbb{X}$ *Banachův prostor a* $\mathbb{X}^*$ *jeho duální prostor, pak* $\mathbb{X}, \mathbb{X}^*$ *je duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení* (7.1).

D ů k a z . a) Je-li $\Phi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{X}$, znamená to, že Φ je nulový funkcionál, tj. $\Phi = 0 \in \mathbb{X}^*$.
b) Podle věty 7.2 pro libovolné $x \neq 0$ existuje funkcionál $\Phi \in \mathbb{X}^*$ takový, že $\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = 1$ a $\Phi(x) = \|x\|$. (Položíme $\mathbb{Y} = \{0\}$.) Nemůže se tedy stát, že by bylo současně $\Phi(x) = 0$ pro každé $\Phi \in \mathbb{X}^*$ a $x \neq 0$. □

7.2 Spojité lineární funkcionály na prostoru spojitých funkcí

Mezi významné výsledky funkcionální analýzy patří reprezentace spojitých lineárních funkcionálů na některých často používaných prostorech funkcí. Speciálně v případě prostoru $\mathbb{C}[a, b]$ funkcí spojitých na $[a, b]$ se dobře uplatní klasický (δ) RS-integrál.

7.4 Věta (RIESZ). *Φ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a,b]$ právě tehdy, když existuje funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ taková, že je*

$$\Phi(x) = (\delta)\int_a^b x \,\mathrm{d}\, p \quad \textit{pro každou funkci} \;\; x \in \mathbb{C}[a,b]\,. \tag{7.3}$$

D ů k a z . a) Nechť $x \in \mathbb{C}[a,b]$ a $p \in \mathbb{BV}[a,b]$. Potom podle věty 5.54 existuje integrál $(\delta)\int_a^b x \,\mathrm{d}\, p$ a podle lemmatu 5.10 platí $\left|(\delta)\int_a^b x \,\mathrm{d}\, p\right| \le \left(\operatorname{var}_a^b p\right) \|x\|$. Zobrazení

$$\Phi_p \,:\, x \in \mathbb{C}[a,b] \to (\delta)\int_a^b x \,\mathrm{d}\, p \in \mathbb{R}$$

je tedy ohraničený (tj. spojitý) lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a,b]$, přičemž

$$\|\Phi_p\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} \le \operatorname{var}_a^b p. \tag{7.4}$$

b) Buď dán libovolný spojitý lineární funkcionál Φ na $\mathbb{C}[a,b]$.

Nechť $\mathbb{M}[a,b]$ značí množinu všech funkcí ohraničených na $[a,b]$. $\mathbb{M}[a,b]$ je zřejmě Banachův prostor vzhledem k operacím a normě definovaným stejně jako v $\mathbb{C}[a,b]$. Dále je zřejmé, že $\mathbb{C}[a,b]$ je uzavřený podprostor $\mathbb{M}[a,b]$.

Ve zbývající části tohoto důkazu budeme značit $\mathbb{X} = \mathbb{M}[a,b]$ a $\mathbb{Y} = \mathbb{C}[a,b]$.

Podle věty 7.1 můžeme funkcionál Φ rozšířit na celý prostor $\mathbb{X}$, tj. existuje funkcionál $\widetilde{\Phi} \in \mathbb{X}^*$ takový, že platí (7.2). Položme

$$p\,(a) = 0 \quad \text{a} \quad p\,(t) = \widetilde{\Phi}(\chi_{[a,t]}) \quad \text{pro} \;\; t \in (a,b]. \tag{7.5}$$

Dokážeme, že $p \in \mathbb{BV}[a,b]$. Buď tedy dáno dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$. Položme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom

$$V(p,\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^m |p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})| = \sum_{j=1}^m \alpha_j\,[p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})],$$

kde $\alpha_j = \operatorname{sign}[p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})]$ pro $j = 1, 2, \ldots, m$. Vzhledem k definici (7.5) tedy dostáváme

$$\begin{aligned} V(p,\boldsymbol{\sigma}) &= \alpha_1\,\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]}) + \sum_{j=2}^m \alpha_j\,\big[\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_j]}) - \widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_{j-1}]})\big] \\ &= \alpha_1\,\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]}) + \sum_{j=2}^m \alpha_j\,\widetilde{\Phi}(\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}) \\ &= \widetilde{\Phi}\Big(\alpha_1\,\chi_{[a,\sigma_1]} + \sum_{j=2}^m \alpha_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}\Big) = \widetilde{\Phi}(h), \end{aligned}$$

kde $h(t)=\alpha_1\,\chi_{[a,\sigma_1]}(t)+\sum_{j=2}^{m}\alpha_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}(t)$ pro $t\in[a,b]$. Zřejmě $\|h\|=1$, a tedy

$$V(p,\boldsymbol{\sigma})\le\|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*}=\|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}\quad\text{pro každé }\ \boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b].$$

To ovšem znamená, že

$$\operatorname{var}_a^b p\le\|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}. \tag{7.6}$$

Zbývá dokázat, že platí (7.3). Buďte tedy dána libovolná $x\in\mathbb{Y}$ a $\varepsilon>0$. Protože funkce x je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$, existuje $\delta>0$ takové, že platí

$$\Big(t,s\in[a,b]\ \text{ a }\ |t-s|<\delta\Big)\implies|x(t)-x(s)|<\varepsilon. \tag{7.7}$$

Dále, protože existuje integrál $(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p$, můžeme zvolit $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ tak, aby platilo $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta$ a

$$\left|S_{x\Delta p}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}})-(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\right|<\varepsilon\,, \tag{7.8}$$

kde $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m\}$ a $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$. Položme

$$x_{\boldsymbol{\sigma}}(t)=\begin{cases}x(\sigma_1) & \text{když }\ t\in[a,\sigma_1],\\ x(\sigma_j) & \text{když }\ t\in(\sigma_{j-1},\sigma_j]\ \text{ a }\ j\in\{2,3,\dots,m\}.\end{cases}$$

Podle (7.7) platí $|x(t)-x_{\boldsymbol{\sigma}}(t)|<\varepsilon$ pro každé $t\in[a,b]$ (je totiž $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta$), neboli

$$\|x-x_{\boldsymbol{\sigma}}\|\le\varepsilon. \tag{7.9}$$

Dále,

$$x_{\boldsymbol{\sigma}}(t)=x(\sigma_1)\,\chi_{[a,\sigma_1]}(t)+\sum_{j=2}^{m}x(\sigma_j)\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}(t)\quad\text{pro }\ t\in[a,b].$$

Odtud, vzhledem k definici (7.5), dostaneme

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\sigma}})&=x(\sigma_1)\,\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]})+\sum_{j=2}^{m}x(\sigma_j)\,\big[\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_j]})-\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_{j-1}]})\big]\\&=x(\sigma_1)\,\big[p\,(\sigma_1)-p\,(a)\big]+\sum_{j=2}^{m}x(\sigma_j)\,\big[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})\big]\\&=\sum_{j=1}^{m}x(\sigma_j)\,\big[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})\big]=S_{x\Delta p}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}})\end{aligned}$$

a tudíž, díky (7.8),

$$\Big|\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\rho}}) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| = \Big|S_{x\Delta p}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| < \varepsilon\,.$$

Konečně, s využitím (7.9) dostaneme

$$\begin{aligned}\Big|\Phi(x) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| &= \Big|\widetilde{\Phi}(x) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| \\ &\le \Big|\widetilde{\Phi}(x) - \widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\sigma}})\Big| + \Big|\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\sigma}}) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| \\ &< \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*}\,\|x - x_{\boldsymbol{\rho}}\| + \varepsilon \le \big(\|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*} + 1\big)\,\varepsilon.\end{aligned}$$

To ovšem, vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ může být libovolně malé, znamená, že musí platit

$$\Phi(x) = (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\,.$$

□

7.5 Poznámka. Všimněme si, že podle (7.4) a (7.6) je $\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*} = \operatorname{var}_a^b p$, jakmile je funkce p definována vztahem (7.5) Jak ukazuje následující tvrzení, není ale přiřazení

$$\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^* \to p \in \mathbb{BV}[a,b]$$

určeno vztahem (7.3) jednoznačně.

7.6 Lemma. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom platí*

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = 0 \quad \textit{pro každou funkci } f \in \mathbb{C}[a,b] \tag{7.10}$$

tehdy a jen tehdy, když existuje nejvýše spočetná množina $D \subset (a,b)$ *taková, že*

$$g(t) = g(a) \quad \textit{pro } t \in [a,b] \setminus D. \tag{7.11}$$

D ů k a z . Bez újmy na obecnosti se můžeme omezit na případ $g(a) = 0$.

a) Předpokládejme, že platí (7.11) a nechť f je libovolná funkce spojitá na $[a,b]$. Je-li $D = \emptyset$, pak (7.10) evidentně platí. Předpokládejme tedy, že D je neprázdná.

Nejprve vyšetříme případ, kdy D je jednobodová množina, tj.

$$g = g(d)\,\chi_{[d]} \quad \text{pro nějaké } d \in (a,b).$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta > 0$ je takové, že

$$\Big(t, s \in [a,b] \text{ a } |t-s| < 2\,\delta\Big) \implies |f(t) - f(s)| < \varepsilon.$$

Pro libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta,$ pak máme

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| = \begin{cases} 0 & \text{když } d\notin\boldsymbol{\sigma}, \\ \big|f(\xi_j)-f(\xi_{j+1})\big|\,|g(d)|<\varepsilon\,\|g\| & \\ & \text{když } d=\sigma_j \text{ pro nějaké } j\in\{0,1,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\}. \end{cases}$$

Odtud ovšem okamžitě plyne, že je

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = 0.$$

Je zřejmé. že (7.10) lze snadno rozšířit i na případ, že množina D je konečná, tj. když bude pro nějaká $N\in\mathbb{N}$ a $\{d_k\}_{k=1}^N\subset(a,b)$ platit

$$g=\sum_{k=0}^N g(d_k)\,\chi_{[d_k]}\,.$$

Předpokládejme nyní, že D je nekonečná, tj. $D=\{d_k\}.$ Podle věty 2.28 je

$$\sum_{k=1}^\infty |g(d_k)| \le \sum_{k=1}^\infty \big(|\Delta^-g(d_k)|+|\Delta^+g(d_k)|\big) \le \operatorname{var}_a^b g<\infty\,.$$

Následně, je-li dáno $\varepsilon>0,$ pak existuje $N\in\mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=N+1}^\infty |g(d_k)|<\varepsilon\,. \tag{7.12}$$

Rozložme funkci g na součet $g=h+\widetilde{h},$ kde

$$h(t)=\begin{cases} g(t) & \text{když } t\in\{d_1,d_2,\dots,d_N\}, \\ 0 & \text{když } t\in[a,b]\setminus\{d_1,d_2,\dots,d_N\}. \end{cases}$$

Máme

$$\widetilde{h}(t)=\begin{cases} g(t) & \text{když } t\in\{d_k: k\ge N+1\}, \\ 0 & \text{když } t\in[a,b]\setminus\{d_k: k\ge N+1\}. \end{cases}$$

Podle předchozí části důkazu je

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,h = 0. \tag{7.13}$$

Na druhou stranu, pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$ máme podle (7.12)

$$\begin{aligned}\left|S_{f\Delta\widetilde{h}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\right| &= \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,[\widetilde{h}(\sigma_j)-\widetilde{h}(\sigma_{j-1})]\Big|\\ &\le 2\,\|f\|\sum_{k=N+1}^{\infty}|g(d_k)| < 2\,\|f\|\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\widetilde{h}=0$$

a, vzhledem k (7.13), platí také (7.10).

b) Nechť platí (7.10).

α) Předpokládejme zprvu, že g je zprava spojitá na (a,b). Dosadíme-li $f\equiv 1$ do (7.10), zjistíme, že musí platit

$$g(a)=g(b)=0. \tag{7.14}$$

Položme dále

$$f(t)=(\delta)\int_t^b g(s)\,\mathrm{d}\,s \quad \text{pro } t\in[a,b].$$

Potom $f\in\mathbb{C}[a,b]$ a podle věty o integraci per-partes (věta 5.50) a věty o substituci (věta 5.45) je

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = -(\delta)\int_a^b g\,\mathrm{d}\,f = (\delta)\int_a^b g^2\,\mathrm{d}\,t.$$

Nechť $g(t_0)\ne g(a)$ pro nějaké $t_0\in[a,b]$. Vzhledem k (7.14) musí být $t_0\in(a,b)$ a vzhledem ke spojitosti zprava funkce g tedy existuje $\Delta>0$ takové, že

$$[t_0,t_0{+}\Delta)\subset(a,b) \quad \text{a} \quad \big(g(t)-g(t_0)\big)^2>0 \ \text{pro } t\in(t_0,t_0+\Delta).$$

Odtud plyne, že

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=(\delta)\int_a^b (g(t))^2\,\mathrm{d}\,t \ge (\delta)\int_{t_0}^{t_0+\Delta}(g(t))^2\,\mathrm{d}\,t>0,$$

což je ve sporu s předpokladem (7.10). Platí tedy (7.11) (kde $g(a)=0$, .

β) Nyní opusťme předpoklad o tom, že g je spojitá zprava na (a,b) a nechť g je libovolná funkce s konečnou variací taková, že platí (7.10). Položme

$$\widetilde{g}(t)=\begin{cases} g(a)(=0) & \text{když } t=a,\\ g(t+) & \text{když } t\in(a,b),\\ g(b) & \text{když } t=b\end{cases}$$

a $h = g - \widetilde{g}$. Potom může být $h(t) \neq 0$ jenom pro ta $t \in (a,b)$, ve kterých není funkce g zprava spojitá. Existuje tedy nejvýše spočetná množina D taková, že je $h(t) = 0$ pro $t \in [a,b] \setminus D$. Podle části a) tohoto důkazu musí tedy být

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}h = (\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}[g - \widetilde{g}] = 0 \quad \text{pro každé } f \in C[a,b].$$

V důsledku předpokladu (7.10) tedy platí

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\,\widetilde{g} = 0 \quad \text{pro každé } f \in C[a,b].$$

Protože $\widetilde{g}$ je zprava spojitá na (a,b), podle části b) $\alpha)$ tohoto důkazu to ale znamená, že musí být $\widetilde{g} = 0$ na $[a,b]$, neboli $g = h$ na $[a,b]$. Platí tedy (7.11). □

7.7 Poznámka. Jestliže $f \in \mathbb{C}[a,b]$, pak podle lemmatu 7.6 integrál $(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\,g$ se nezmění, změníme-li hodnoty $g(t)$ v nejvýše spočetně mnoha bodech $t \in (a,b)$. Speciálně nahradíme-li funkci g funkcí

$$\widetilde{g}(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t = a, \\ g(t+) - g(a) & \text{pro } t \in (a,b), \\ g(b) - g(a) & \text{pro } t = b, \end{cases}$$

bude platit

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\,g = (\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\,\widetilde{g} \quad \text{pro každé } f \in \mathbb{C}[a,b]\,,$$

přičemž ovšem $\widetilde{g}(a) = 0$ a $\widetilde{g}$ je zprava spojitá na (a,b).

Odtud okamžitě plyne, že pro každý spojitý lineární funkcionál Φ na prostoru $\mathbb{C}[a,b]$ existuje právě jedna funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ taková, že

$$\left.\begin{aligned} & p\,(a) = 0,\ p\,(t+) = p\,(t) \ \text{ pro } t \in (a,b) \\ \text{a} \quad & \\ & \Phi(x) = (\delta)\int_a^b x \,\mathrm{d}\,p \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{C}[a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

Funkce $p \in \mathbb{BV}[a,b]$, které jsou zprava spojité na (a,b) a takové, že $p\,(a) = 0$, se nazývají *normalizované funkce s konečnou variací* a tvoří uzavřený podprostor v $\mathbb{BV}[a,b]$, který budeme značit $\mathbb{NBV}[a,b]$. Prostory $(\mathbb{C}[a,b])^*$ a $\mathbb{NBV}[a,b]$ jsou podle věty 7.4 a lemmatu 7.6 izomorfní, tj. zobrazení

$$\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^* \to p \in \mathbb{NBV}[a,b] \tag{7.16}$$

určené vztahy (7.15) je vzájemně jednoznačné. To by zřejmě neplatilo, kdybychom $\mathbb{NBV}[a,b]$ nahradili prostorem $\mathbb{BV}[a,b]$ všech funkcí s konečnou variací na $[a,b]$. Na druhou stranu, $\mathbb{NBV}[a,b]$ lze nahradit (viz cvičení 7.8) např. prostorem funkcí s konečnou variací na $[a,b]$, které jsou spojité zleva na (a,b) a rovnají se nule v nějakém pevně daném bodě $c\in[a,b]$.

7.8 Cvičení. Dokažte, že platí :

Pro každý spojitý lineární funkcionál Φ na prostoru $\mathbb{C}[a,b]$ existuje právě jedna funkce $p\in\mathbb{BV}[a,b]$ taková, že

$$p(b)=0,\ \ p(t-)=p(t)\ \ \textit{pro}\ \ t\in(a,b)$$

a

$$\Phi(x) = (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p \quad \textit{pro každé}\ \ x\in\mathbb{C}[a,b].$$

Odstavec uzavřeme důkazem tvrzení, podle kteréhp jsou prostory $(\mathbb{C}[a,b])^*$ a $\mathbb{NBV}[a,b]$ dokonce izometricky izomorfní.

7.9 Věta. *Zobrazení $\Phi\in(\mathbb{C}[a,b])^*\to p\in\mathbb{NBV}[a,b]$, kde p je určeno vztahem (7.15), je izometrický izomorfismus.*

D ů k a z . Nechť $p\in\mathbb{NBV}[a,b]$ a $\Phi(x) = (\delta)\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p$ pro každé $x\in\mathbb{C}[a,b]$. Dokážeme, že pak platí

$$\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} = \|p\|_{\mathbb{BV}} = \operatorname{var}_a^b p\,.$$

Podle lemmatu 5.10 máme

$$\left|(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\right| \le \left(\operatorname{var}_a^b p\right)\|x\|$$

neboli

$$\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} \le \|p\|_{\mathbb{BV}}\,. \tag{7.17}$$

K tomu, abychom dokázali, že platí i obrácená nerovnost k (7.17), bude stačit, když dokážeme, že existuje funkce $\widetilde{x}\in\mathbb{C}[a,b]$ taková, že

$$\|\widetilde{x}\|=1 \quad \text{a} \quad (\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p=\operatorname{var}_a^b p\,. \tag{7.18}$$

Buď dáno libovolné $\varepsilon>0$. Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ tak, aby bylo $\nu(\boldsymbol{\sigma})\ge 2$ a

$$V(p,\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) > \operatorname{var}_a^b p - \varepsilon \quad \text{pro každé jeho zjemnění}\ \ \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{7.19}$$

Položme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Vzhledem ke spojitosti funkce p na (a,b) zprava můžeme pro každé $j = 1, 2, \ldots, m-1$ najít bod $t_j \in (\sigma_j, \sigma_{j+1})$ takový, že

$$|p(t_j) - p(\sigma_j)| < \frac{\varepsilon}{m-1}. \tag{7.20}$$

Položme

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\big(p(\sigma_1) - p(a)\big) & \text{když } t \in [a, \sigma_1] \\ \operatorname{sign}\big(p(\sigma_{j+1}) - p(t_j)\big) & \text{když } t \in [t_j, \sigma_{j+1}],\ j \in \{1, 2, \ldots, m\}, \end{cases}$$

a dodefinujme funkci $\widetilde{x}$ na intervalech $[\sigma_j, t_j]$ lineárně a tak, aby byla spojitá na $[a,b]$. Zřejmě je $\|\widetilde{x}\| = 1$. Navíc

$$(\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p = \big|p(\sigma_1) - p(a)\big| + \sum_{j=1}^{m-1} \big|p(\sigma_{j+1}) - p(t_j)\big| + \sum_{j=1}^{m-1} (\delta)\int_{\sigma_j}^{t_j} \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p.$$

Protože je $|\widetilde{x}(t)| \le 1$ pro $t \in [a,b]$, plyne odtud podle (7.20), že

$$\begin{aligned} \Big|(\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p\Big| &\ge \big|p(\sigma_1) - p(a)\big| + \sum_{j=1}^{m} \big|p(\sigma_{j+1}) - p(t_j)\big| - \sum_{j=1}^{m-1} \big|p(t_j) - p(\sigma_j)\big| \\ &= V(p, \boldsymbol{\rho}) - 2\sum_{j=1}^{m-1} \big|p(t_j) - p(\sigma_j)\big| > V(p, \boldsymbol{\rho}) - 2\,\varepsilon, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\rho} = \{a, \sigma_1, t_1, \sigma_2\ \ldots, \sigma_{m-1}, t_{m-1}, b\} \supset \boldsymbol{\sigma}$. Podle (7.19) tedy dostáváme

$$\Big|(\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p\Big| > V(p, \boldsymbol{\rho}) - 2\,\varepsilon > \operatorname{var}_a^b p - 3\,\varepsilon\,.$$

Protože ε může být libovolné kladné číslo, znamená to, že platí (7.18), a tudíž

$$\sup_{\|x\| \le 1} |\Phi(x)| \ge \operatorname{var}_a^b p\,.$$

Odtud a z (7.17) plyne tvrzení věty. $\square$

7.3 Spojité lineární funkcionály na prostorech integrovatelných, resp. absolutně spojitých funkcí

Další dobře známé reprezentace spojitých lineárních prostorů využívají Lebesgueova integrálu:

Pro $\alpha \in [1,\infty)$ označme symbolem $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ prostor funkcí x měřitelných na $[a,b]$ a takových, že $\int_a^b |x(t)|^\alpha\,\mathrm{d}t < \infty$, přičemž norma na $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ je definována předpisem

$$\|x\|_\alpha = \left(\int_a^b |x(t)|^\alpha\,\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha} \quad \text{pro } x \in \mathbb{L}^\alpha[a,b]$$

a rovnost $x=y$ pro $x,y \in \mathbb{L}^\alpha[a,b]$ znamená, že $x(t)=y(t)$ pro s.v. $t \in [a,b]$. Jestliže položíme

$$\alpha^* = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha-1} & \text{jestliže } \alpha > 1, \\ \infty & \text{jestliže } \alpha = 1, \end{cases}$$

pak obecný tvar spojitého lineárního funkcionálu na $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ je dán předpisem

$$\Phi \in (\mathbb{L}^\alpha[a,b])^* \iff \text{existuje } p \in \mathbb{L}^{\alpha^*}[a,b] \quad \text{takové, že}$$
$$\Phi(x) = \int_a^b p(t)\,x(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in \mathbb{L}^\alpha[a,b],$$

kde $\mathbb{L}^\infty[a,b]$ je prostor funkcí esenciálně (v podstatě) omezených na $[a,b]$, tj. reálných funkcí f měřitelných na $[a,b]$ a takových, že platí $\sup\,\mathrm{ess}\,|f| < \infty$, kde $\sup\,\mathrm{ess}\,|f|$ je infimum množiny všech $A \in (0,\infty)$ takových, že množina

$$\{t \in [a,b] : |f(t)| > A\}$$

má nulovou míru.

Na prostoru $\mathbb{AC}[a,b]$ funkcí absolutně spojitých na intervalu $[a,b]$ definujeme normu předpisem

$$\|f\|_{\mathbb{AC}} = |f(a)| + \|f'\|_1 \quad \text{pro } f \in \mathbb{AC}[a,b]$$

a $\mathbb{AC}[a,b]$ je pak Banachův prostor. Podle věty 3.18 představují zobrazení

$$f \in \mathbb{AC}[a,b] \to (f(a), f') \in \mathbb{R} \times \mathbb{L}^1[a,b]$$

a

$$(c,g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{L}^1[a,b] \to f(x) := c + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{AC}[a,b]$$

vzájemně jednoznačný vztah mezi $\mathbb{AC}[a,b]$ a $\mathbb{R} \times \mathbb{L}^1[a,b]$. Lze ukázat, že obecný spojitý lineární funkcionál na prostoru $\mathbb{AC}[a,b]$ je dán předpisem

$$\Phi \in (\mathbb{AC}[a,b])^* \iff \text{existují } q \in \mathbb{R} \text{ a } p \in \mathbb{L}^\infty[a,b] \text{ takové, že}$$
$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p(t)\,x'(t)\,\mathrm{d}t \text{ pro } x \in \mathbb{AC}[a,b].$$

Důkazy výše uvedených tvrzení a další podrobnosti lze nalézti ve většině učebnic funkcionální analýzy. Všeobecně dostupná je také on-line verze plzeňských skript [4].

7.4 Spojité lineární funkcionály na prostorech regulovaných funkcí

Naším cílem je nyní odvození obecného tvaru spojitých lineárních funkcionálů na některých podprostorech prostoru $\mathbb{G}[a,b]$. Pro začátek si připomeňme, že podle věty 6.35 je výraz

$$\Phi_\eta(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}\,x \tag{7.21}$$

definován pro každou funkci $x \in \mathbb{G}[a,b]$ a každý pár $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$. Navíc, pro každé $\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$, předpis (7.21) definuje ohraničený (a tedy spojitý) lineární funkcionál na $\mathbb{G}[a,b]$ (viz větu 6.26).

Snadno ověříme, že předpisem

$$\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} = |q| + \|p\|_{\mathbb{BV}}$$

je definována norma na prostoru $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ je Banachův prostor vzhledem k této normě. Z formulí uvedených v příkladech 6.22 (viz též příklady 6.54, resp. cvičení 6.55) také snadno odvodíme následující tvrzení.

7.10 Lemma.

(i) *Pro libovolnou dvojici* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *platí*

$$\left.\begin{aligned} \Phi_\eta(1) &= q, \\ \Phi_\eta(\chi_{(\tau,b]}) &= p(\tau), \quad \textit{když}\ \ \tau \in [a,b), \\ \Phi_\eta(\chi_{[\tau]}) &= 0, \qquad\ \ \textit{když}\ \ \tau \in (a,b), \\ \Phi_\eta(\chi_{[b]}) &= p(b). \end{aligned}\right\} \tag{7.22}$$

(ii) *Pro libovolnou funkci* $x \in \mathbb{G}[a,b]$ *platí*

$$\left.\begin{aligned} \Phi_\eta(x) &= x(a), &&\textit{když}\ \ p \equiv 0 \ \textit{na}\ [a,b],\ q = 1, \\ \Phi_\eta(x) &= x(b), &&\textit{když}\ \ p \equiv 1 \ \textit{na}\ [a,b],\ q = 1, \\ \Phi_\eta(x) &= x(\tau-), &&\textit{když}\ \ p = \chi_{[a,\tau)} \ \textit{na}\ [a,b],\ \tau \in (a,b],\ q = 1, \\ \Phi_\eta(x) &= x(\tau+), &&\textit{když}\ \ p = \chi_{[a,\tau]} \ \textit{na}\ [a,b],\ \tau \in [a,b),\ q = 1. \end{aligned}\right\} \tag{7.23}$$

Přímým důsledkem vztahů (7.22), (7.23) a lemmatu 4.19 je následující tvrzení.

7.11 Lemma.

(i) *Jestliže* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *a*

$$\Phi_\eta(x) = 0 \ \textit{ pro každé } x \in \operatorname{Lin}\Big(1, \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b), \chi_{[b]}\Big),$$

pak $p(t) = 0$ *na* $[a,b]$ *a* $q = 0$.

(ii) *Jestliže* $x \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$\Phi_\eta(x) = 0 \ \textit{pro všechny dvojice} \ \eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R},$$

pak

$$x(a) = x(a+) = x(\tau-) = x(\tau+) = x(b-) = x(b) = 0 \tag{7.24}$$

platí pro $\tau \in (a,b)$.

7.12 Poznámka. Všimněme si, že vzhledem k třetímu vztahu v (7.22), můžeme v tvrzení (i) předešlého lemmatu nahradit množinu $\mathrm{Lin}\Big(1,\ \chi_{(\tau,b]}, \tau \in [a,b),\ \chi_{[b]}\Big)$ množinami

$$\mathrm{Lin}\Big(\chi_{[\tau,b]}, \tau \in [a,b],\ \chi_{[a]}\Big) \quad \text{resp.} \quad \mathrm{Lin}\Big(1, \chi_{[a,\tau)}, \tau \in (a,b],\ \chi_{[a]}\Big)$$

$$\text{resp.} \quad \mathrm{Lin}\Big(1,\ \tfrac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}, \tau \in (a,b),\ \chi_{[b]}\Big).$$

Odtud okamžitě plyne též následující tvrzení, kde symboly $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$, $\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]$ a $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ byly definovány v (4.9).

7.13 Věta. *Každý z následujících párů prostorů*

$$(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\ \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}),\ (\mathbb{G}_{reg}[a,b],\ \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}),\ (\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b],\ \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R})$$

tvoří duální pár vzhledem k bilineární formě

$$x \in \mathbb{G}[a,b],\ \eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta(x).$$

Na druhou stranu, máme také

7.14 Lemma. *Jestliže* Φ *je lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ *a*

$$p\,(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(t,b]}), & \textit{když} \ \ t \in [a,b), \\ \Phi(\chi_{[b]}), & \textit{když} \ \ t = b, \end{cases} \tag{7.25}$$

pak $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a*

$$\left.\begin{aligned} &|p\,(a)| + |p\,(b)| + \mathrm{var}_a^b\, p \le 2\, \|\Phi\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*}, \\ &\qquad \textit{kde} \ \ \|\Phi\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*} = \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\ \|x\| \le 1\}. \end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

D ů k a z. Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ a libovolný vektor $(c_0, c_1, \ldots, c_m, c_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+2}$ platí

$$\Big|c_0\, p\,(a) + c_{m+1}\, p\,(b) + \sum_{j=1}^{m} c_j\, [p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})]\Big|$$

$$= \Big|\Phi\Big(c_0\, \chi_{(a,b]} + c_{m+1}\, \chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\, \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]} + c_m\, \chi_{(\sigma_{m-1},b)}\Big)\Big| = |\Phi(h)|,$$

kde

$$h = c_0\,\chi_{(a,b]} + c_{m+1}\,\chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]} + c_m\,\chi_{(\sigma_{m-1},b)} \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b].$$

Snadno ověříme, že bude-li $|c_j| \le 1$ pro $j = 0, 1, \ldots, m+1,$ pak bude $\|h\| \le 2.$ Položíme-li tedy

$$c_0 = \operatorname{sign} p\,(a),\ c_{m+1} = \operatorname{sign} p\,(b),\ c_j = \operatorname{sign}(p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1}))$$

pro $j = 1, 2, \ldots, m,$ získáme vztah

$$|p\,(a)| + |p\,(b)| + V(p,\boldsymbol{\sigma}) \le 2\,\|\Phi\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*} \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b].$$

Odtud už plyne, že platí i (7.26). □

Analogicky předchozímu lemmatu máme také

7.15 Lemma. *Nechť* Φ *je libovolný lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$. *Položme*

$$p\,(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(a,b]}), & \textit{když } t = a, \\ \Phi(\frac{1}{2}\chi_{[t]} + \chi_{(t,b]}), & \textit{když } t \in (a,b), \\ \Phi(\chi_{[b]}), & \textit{když } t = b. \end{cases} \tag{7.27}$$

Potom

$$\operatorname{var}_a^b p \le \|\Phi\|^*_{\mathbb{G}_{reg}[a,b]} < \infty,$$

kde

$$\|\Phi\|_{(\mathbb{G}_{reg}[a,b])^*} = \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{reg}[a,b],\ \|x\| \le 1\}.$$

tj. $p \in \mathbb{BV}[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $\Phi \in (\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b])^*$, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ a nechť reálná čísla $c_j,\ j = 1, 2, \ldots, m,$ jsou taková, že je $|c_j| \le 1$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, m.$ Potom

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} c_j\,[p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})] \\ &\quad = c_1\Big[\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} + \chi_{(\sigma_1,b]}) - \Phi(\chi_{(a,b]})\Big] \\ &\qquad + \sum_{j=2}^{m-1} c_j\Big[\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]} + \chi_{(\sigma_j,b]}) - \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]} + \chi_{(\sigma_{j-1},b]})\Big] \\ &\qquad + c_m\Big[\Phi(\chi_{[b]}) - \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} + \chi_{(\sigma_{m-1},b]})\Big] = \Phi(h), \end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

kde

$$
\begin{aligned}
h = \ & c_1 \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} + \chi_{(\sigma_1,b]} - \chi_{(a,b]}\Big] + c_m \Big[\chi_{[b]} - \tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} - \chi_{(\sigma_{m-1},b]}\Big] \\
& + \sum_{j=2}^{m-1} c_j \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]} + \chi_{(\sigma_j,b]} - \tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]} - \chi_{(\sigma_{j-1},b]}\Big] \\
= \ & c_1 \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} - \chi_{(a,\sigma_1]}\Big] - c_m \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} + \chi_{(\sigma_{m-1},b)}\Big] \\
& + \sum_{j=2}^{m-1} c_j \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]} - \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]} - \tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]}\Big] \\
= \ & - c_1 \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} + \chi_{(a,\sigma_1)}\Big] - c_m \Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} + \chi_{(\sigma_{m-1},b)}\Big] \\
& - \tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{m-1} c_j\, \chi_{[\sigma_j]} - \tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{m-1} c_j\, \chi_{[\sigma_{j-1}]} - \sum_{j=2}^{m-1} c_j\, \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)} \\
= \ & - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\, \chi_{[\sigma_j]} - \tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{m} c_j\, \chi_{[\sigma_{j-1}]} - \sum_{j=1}^{m} c_j\, \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)} \\
= \ & - \sum_{j=1}^{m-1} \tfrac{c_j+c_{j+1}}{2}\chi_{[\sigma_j]} - \sum_{j=1}^{m} c_j\, \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)} \\
= \ & - \sum_{j=1}^{m-1} \Big(\tfrac{c_j+c_{j+1}}{2}\, \chi_{[\sigma_j]} + c_j\, \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}\Big) - c_m\, \chi_{(\sigma_{m-1},b)}.
\end{aligned}
$$

Z tohoto vyjádření snadno nahlédneme, že $h(a+) = -c_1,\ h(b-) = -c_m,$

$$h(\sigma_j-) = -c_j,\ \ h(\sigma_j+) = -c_{j+1},\ h(\sigma_j) = -\tfrac{1}{2}(c_j + c_{j+1}) \ \text{ pro } j = 1, 2, \dots, m$$

čili $h \in \mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$ a $|h(t)| \le 1$ pro všechna $t \in [a,b]$.

Vzhledem k (7.28) tedy dostáváme, že nerovnost

$$
\begin{aligned}
& \sup\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{m} c_j \big[p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})\big]\Big| : |c_j| \le 1,\ j = 1, 2, \dots, m-1\Big\} \\
& \qquad\qquad \le \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b],\ \|x\| \le 1\}
\end{aligned}
$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ a reálná čísla c_j, taková že je $|c_j| \le 1$ pro všechna $j = 1, 2, \dots, m$. Zvolíme-li nyní

$$c_j = \operatorname{sign}\big[p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})\big] \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, m,$$

zjistíme, že platí

$$V(p,\boldsymbol{\sigma}) \le \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b],\ \|x\| \le 1\} < \infty \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b],$$

tj. $\operatorname{var}_a^b p \leq \|\Phi\|^*_{\mathbb{G}\mathrm{reg}[a,b]} < \infty.$ $\square$

Prvním hlavním výsledkem této kapitoly je následující věta.

7.16 Věta. *Φ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b]$ právě tehdy, když existuje dvojice $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ taková, že*

$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro } x \in \mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b]. \tag{7.29}$$

Navíc, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in (\mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b])^* \tag{7.30}$$

je izomorfismus.

Důkaz. a) Nechť $\Phi \in (\mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b]))^*$ a nechť $\Phi_\eta \in (\mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b]))^*$ je funkcionál definovaný předpisem (7.21), kde $\eta = (p,q)$, $q = \Phi(1)$ a funkce p je definovaná v (7.25). Podle lemmatu 7.14 $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a podle (7.22) a (7.25) máme

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= q &&= \Phi_\eta(1), \\ \Phi(\chi_{(\tau,b]}) &= p\,(\tau) &&= \Phi_\eta(\chi_{(\tau,b]}) \quad \text{pro } \tau \in [a,b), \\ \Phi(\chi_{[b]}) &= p\,(b) &&= \Phi_\eta(\chi_{[b]}). \end{aligned}$$

Protože podle lemmatu 4.19 je každá funkce z $\mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b]$ lineární kombinací funkcí 1, $\chi_{(\tau,b]}$, $\tau \in [a,b)$, $\chi_{[b]}$, plyne odtud, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$. Konečně, protože podle lemmatu 4.18 je $\mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ hustá množina v $\mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b]$ a protože funkcionály Φ a Φ_η jsou spojité, plyne odtud, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b]$.
b) Podle věty 7.13 je (7.30) vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ na $(\mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b])^*$. Dále podle věty 6.26 máme

$$|\Phi_\eta(x)| \leq \big(|p\,(a)| + |p\,(b)| + \operatorname{var}_a^b p + |q|\big)\,\|x\| \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b],$$

a tudíž

$$\|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b])^*} \leq |p\,(a)| + |p\,(b)| + \operatorname{var}_a^b p + |q| \leq 2\,\big(\|p\|_{\mathbb{BV}} + |q|\big) = 2\,\|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}}.$$

Na druhou stranu, podle (7.26) a podle lemmatu 7.14 je

$$|q| = |\Phi(1)| \leq \|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b])^*}$$

a

$$\|p\|_{\mathbb{BV}} \leq \big(|p\,(a)| + |p\,(b)| + \operatorname{var}_a^b p\big) \leq 2\,\|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b])^*}.$$

Souhrnem máme

$$\frac{1}{2}\,\|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b])^*} \leq \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} \leq 3\,\|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_\mathrm{L}[a,b])^*}$$

čili, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in (\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*$$

je izomorfismus. $\square$

7.17 Věta. Φ *je lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$ $(\Phi \in (\mathbb{G}_{reg}[a,b])^*)$ *právě tehdy, když existuje dvojice* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *taková, že*

$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro} \;\; x \in \mathbb{G}_{reg}[a,b]. \tag{7.31}$$

Navíc, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in (\mathbb{G}_{reg}[a,b])^* \tag{7.32}$$

je izomorfismus.

D ů k a z . Nechť $\Phi \in (\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b])^*$ a $\Phi_\eta \in (\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b])^*$ je definován vztahem (7.21), kde $\eta = (p,q)$, $q = \Phi(1)$ a p je funkce definovaná vztahem (7.27). Podle lemmatu 7.15 je $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a podle (7.22) a (7.27) máme

$$\begin{array}{lll} \Phi(1) & = q & = \Phi_\eta(1), \\ \Phi(\chi_{(a,b]}) & = p\,(a) & = \Phi_\eta(\chi_{(a,b]}) \\ \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}) & = p\,(\tau) & = \Phi_\eta(\tfrac{1}{2}\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}) \quad \text{pro každé } \tau \in (a,b), \\ \Phi(\chi_{[b]}) & = p\,(b) & = \Phi_\eta(\chi_{[b]}). \end{array}$$

Pomocí lemmatu 4.19 odtud odvodíme, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_\eta(x) \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b].$$

Podle lemmatu 4.18 je ovšem množina $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$, a tudíž dostáváme konečně, že platí $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro všechna $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$.

Podobně jako jsme dokázali analogickou nerovnost v závěru důkazu věty 7.16, dokázali bychom nyní, že platí také

$$\frac{1}{2}\,\|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b])^*} \le \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} \le 3\,\|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b])^*}. \qquad \square$$

7.18 Cvičení. Postupem použitým v důkazech vět 7.16 a 7.17 ukažte, že také platí:

(i) Φ *je lineární ohraničený funkcionál na*

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b] = \{x \in \mathbb{G}[a,b] : x(t-) = x(t) \textit{ pro } t \in (a,b]\},$$

(viz (4.8)) *právě tehdy, když existuje funkce* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$\Phi(x) = p\,(b)\,x(b) - \int_a^b p\,\mathrm{d}\,x \quad \textit{pro} \;\; x \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b].$$

(ii) Φ *je lineární ohraničený funkcionál na*

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{x \in \mathbb{G}[a,b] : x(t+) = x(t) \text{ pro } t \in [a,b)\},$$

(viz (4.8)) *právě tehdy, když existuje funkce* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$\Phi(x) = p(a)\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}\,x \quad \textit{pro} \;\; x \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b].$$

7.5 Aplikace v teorii distribucí

V tomto odstavci naznačíme možnosti použití KS–integrálu v teorii distribucí. Distribuce zde budeme chápat ve smyslu L. Schwartze. Připomeňme si nejprve několik základních pojmů a definic.

7.19 Definice. Množinu funkcí $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které mají pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ derivaci $\varphi^{(k)}$ k-tého řádu spojitou na $\mathbb{R}$ a takovou, že $\varphi^{(k)}(t) = 0$ pro všechny $t \in \mathbb{R} \setminus (a,b)$, označíme symbolem $\mathfrak{D}[a,b]$. Funkcím z $\mathfrak{D}[a,b]$ říkáme *testovací funkce* na $[a,b]$.

Množina $\mathfrak{D}[a,b]$ je lineární prostor vzhledem k přirozeným operacím sčítání a násobení skalárem. Množina $\mathfrak{D}[a,b]$ se stane topologickým vektorovým prostorem, zavedeme-li na ní topologii, ve které posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathfrak{D}[a,b]$ konverguje k $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\| = 0 \quad \text{pro každé } \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Spojitým lineárním funkcionálem na topologickém vektorovém prostoru $\mathbb{X}$ rozumíme, analogicky jako v případě Banachových prostorů, lineární zobrazení prostoru $\mathbb{X}$ do $\mathbb{R}$, které je spojité vzhledem k topologii na $\mathbb{X}$.

Typickými příklady funkcí z prostoru $\mathfrak{D}[a,b]$ jsou funkce tvaru

$$\varphi_{c,d}(t) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{1}{t-c} + \frac{1}{d-t}\right)\right) & \text{pro } \; t \in (c,d), \\ 0 & \text{pro } \; t \in \mathbb{R} \setminus (c,d), \end{cases}$$

kde $[c,d]$ může být libovolný podinterval v $[a,b]$.

7.20 Definice. Spojité lineární funkcionály na topologickém vektorovém prostoru $\mathfrak{D}[a,b]$ se nazývají *distribuce* na $[a,b]$. Množina všech distribucí na $[a,b]$ je tedy duálním prostorem k $\mathfrak{D}[a,b]$. Značíme ji symbolem $\mathfrak{D}^*[a,b]$.

Pro danou distribuci $f \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ a testovací funkci $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$, hodnotu funkcionálu f na φ značíme symbolem $\langle f, \varphi \rangle$.

7.21 Poznámka. Je-li $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$, pak předpisem

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro} \;\; \varphi \in \mathfrak{D}[a,b],$$

(kde je použit Lebesgueoův integrál) je definována distribuce na $[a,b]$, kterou budeme značit také symbolem f. Říkáme, že distribuce f je určena funkcí f.

Funkce $f\in\mathbb{L}^1[a,b]$ je nulový prvek prostoru $\mathfrak{D}^*[a,b]$ jestliže $f=0$ s.v. na $[a,b]$. Speciálně je-li $f\in\mathbb{G}[a,b]$, pak $f=0\in\mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když

$$f(t-)=f(s+)=0 \quad \text{pro všechna } t\in(a,b] \text{ a } s\in[a,b).$$

Tudíž, je-li $f\in\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$, pak $f=0\in\mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t)=0$ pro všechna $t\in[a,b]$. Pro libovolné distribuce $f,g\in\mathfrak{D}^*[a,b]$ rovnost $f=g$ znamená, že je

$$f-g=0\in\mathfrak{D}^*[a,b].$$

Z výše uvedeného plyne, že pro každou funkci $g\in\mathbb{L}^1[a,b]$ existuje nejvýše jedna funkce $f\in\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$ taková, že $f=g$ s.v. na $[a,b]$. Dále, pro dané reálné funkce $f,g\in\mathbb{L}^1[a,b]$ platí rovnost $f=g$ ve smyslu $\mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f=g$ s.v. na $[a,b]$.

7.22 Definice. Pro danou distribuci $f\in\mathfrak{D}^*[a,b]$ definujeme její (*distributivní*) *derivaci* f' předpisem $\langle f',\varphi\rangle = -\langle f,\varphi'\rangle$ pro $\varphi\in\mathfrak{D}[a,b]$.

Podobně, pro každé $k\in\mathbb{N}$, $\langle f^{(k)},\varphi\rangle=(-1)^k\langle f,\varphi^{(k)}\rangle$ pro $\varphi\in\mathfrak{D}[a,b]$.

7.23 Poznámka. Distributivní derivace absolutně spojitých funkcí jsou určeny jejich klasickými derivacemi.

7.24 Poznámka. Definujme $H(t)=\begin{cases}0 & \text{pro } t<0,\\ \dfrac{1}{2} & \text{pro } t=0,\\ 1 & \text{pro } t>0.\end{cases}$

Nechť $\tau\in(a,b)$ a $h_\tau(t)=H(t-\tau)$ pro $t\in[a,b]$. Potom použitím vět 6.46 a 6.57 a s přihlédnutím k (6.21) a (6.25) dostaneme

$$\langle h_\tau',\varphi\rangle = -\langle h_\tau,\varphi'\rangle = -\int_a^b h_\tau \,\mathrm{d}\,\varphi = \int_a^b \varphi \,\mathrm{d}\,h_\tau = \varphi(\tau).$$

Funkce h_τ se nazývá *Heavisideova funkce* (se středem v bodě τ) a její distributivní derivace h_τ' se značí δ_τ a nazývá se *Diracova δ-distribuce* (se středem v bodě τ).

7.25 Věta. *Nechť $f\in\mathbb{L}^1[a,b]$. Potom její distributivní derivace f' je nulová distribuce tehdy a jen tehdy, když existuje konstanta $c\in\mathbb{R}$ taková, že $f(t)=c$ pro s.v. $t\in[a,b]$.*

D ů k a z . Jestliže $f(t)=c$ pro s.v. $t\in[a,b]$ a $\varphi\in\mathfrak{D}[a,b]$, pak

$$\langle f',\varphi\rangle = -\langle c,\varphi'\rangle = -c\int_a^b \varphi'(s)\,\mathrm{d}s = -c\,(\varphi(b)-\varphi(a)) = 0.$$

Naopak, nechť $\langle f, \varphi' \rangle = 0$ pro každou $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$. Nechť je dána libovolná testovací funkce $\rho \in \mathfrak{D}[a,b]$. Položme

$$\varphi(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^t \big(\rho(s) - a_0\,\Theta(s)\big)\,\mathrm{d}s & \text{pro } t \in [a,b], \\ 0 & \text{pro } t \in \mathbb{R} \setminus [a,b], \end{cases}$$

kde

$$a_0 = \int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{a} \quad \Theta(t) = \frac{\varphi_{a,b}(t)}{\displaystyle\int_a^b \varphi_{a,b}(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Potom

$$\int_a^b \Theta(s)\,\mathrm{d}s = 1.$$

Odtud snadno plyne, že $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ a také že $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$. Dále

$$\varphi'(t) = \rho(t) - a_0\,\Theta(t) \quad \text{pro } t \in [a,b].$$

Tudíž $0 = \langle f, \varphi' \rangle = \langle f, \rho \rangle - \Big(\int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\langle f, \Theta \rangle$. Pro každé $\rho \in \mathfrak{D}[a,b]$ tedy platí

$$\langle f, \rho \rangle = \Big(\int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}s\Big)\,\langle f, \Theta \rangle = \int_a^b c\,\rho(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde $c = \langle f, \Theta \rangle \in \mathbb{R}$ je konstanta. Tedy $f = c$ ve smyslu distribucí. □

7.26 Cvičení. Nechť $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$ a $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $f^{(k)} = 0 \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když existují $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R}$ takové, že

$$f(t) = c_0 + c_1\,t + \cdots + c_{k-1}\,t^{k-1} \quad \text{pro s.v. } t \in [a,b].$$

Vážným problémem v teorii distribucí je otázka, jak definovat jejich součin. Následující dvě klasické definice se týkají jen jistých speciálních typů distribucí.

7.27 Definice. (i) Jestliže f, g a $f\,g \in \mathbb{L}^1[a,b]$, pak

$$\langle f\,g, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\,g(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{pro } \varphi \in \mathfrak{D}[a,b].$$

(ii) Jestliže $f \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ a funkce g má na $[a,b]$ spojité derivace libovolného řádu, pak $\langle f\,g, \varphi \rangle = \langle f, g\,\varphi \rangle$.

Pro zkoumání diferenciálních rovnic s distributivními koeficienty je užitečné mít k dispozici rozumnou definici součinu distribucí f a g' (resp. f' a g), kde $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Definice 7.27 ovšem takové součiny definovat neumožňuje. Jejich smysluplnou definici můžeme formulovat teprve využitím KS-integrálu.

7.28 Definice. Jestliže $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, pak definujeme

$$\langle f' g, \varphi\rangle = \int_a^b \varphi\, g \,\mathrm{d} f \quad \text{a} \quad \langle f\, g', \varphi\rangle = \int_a^b \varphi\, f \,\mathrm{d} g.$$

7.29 Lemma. *Nechť* $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom*

$$f' g = F', \quad \textit{kde} \;\; F(t) = \int_a^t g \,\mathrm{d} f \;\; \textit{pro}\; t \in [a,b] \tag{7.33}$$

a

$$f\, g' = G', \quad \textit{kde} \;\; G(t) = \int_a^t f \,\mathrm{d} g \;\; \textit{pro}\; t \in [a,b]. \tag{7.34}$$

D ů k a z . Použitím věty o substituci (věta 6.57) a věty o integraci per-partes (věta 6.46) pro libovolné $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$ dostaneme

$$\begin{aligned}\langle f' g, \varphi\rangle &= \int_a^b \varphi(t) \,\mathrm{d}\Big[\int_a^t g \,\mathrm{d} f\Big] = -\int_a^b \varphi'(t) \Big(\int_a^t g \,\mathrm{d} f\Big) \,\mathrm{d} t \\ &= \Big\langle\Big(\int_a^t g \,\mathrm{d} f\Big)', \varphi\Big\rangle,\end{aligned}$$

tj. platí (7.33). Vztah (7.34) se dokazuje analogicky. □

7.30 Důsledek. Jestliže funkce $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ splňují

$$\Delta^+ f(t)\, \Delta^+ g(t) = \Delta^- f(t)\, \Delta^- g(t) \quad \text{pro každé } t \in (a,b), \tag{7.35}$$

pak

$$(f\, g)' = f\, g' + f'\, g.$$

D ů k a z . Podle definice 7.22, věty o integraci per-partes (viz větu 6.46) a lemmatu 7.29 dostáváme

$$\begin{aligned}\langle (f\, g)', \varphi\rangle &= -\langle f\, g, \varphi'\rangle \\ &= -\int_a^b \varphi' f\, g \,\mathrm{d} t = \int_a^b \varphi(t) \,\mathrm{d}\big[f(t)\, g(t) - f(a)\, g(a)\big] \\ &= \int_a^b \varphi(t) \,\mathrm{d}\Big[\int_a^t g \,\mathrm{d} f + \int_a^t f \,\mathrm{d} g\Big] = \langle f\, g', \varphi\rangle + \langle f'\, g, \varphi\rangle.\end{aligned}$$ □

7.31 Poznámka. Nechť $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Podmínka (7.35) je pak zřejmě splněna např. v následujících případech:

(i) obě funkce jsou regulární (viz poznámku 4.17),

(ii) alespoň jedna z nich je spojitá na (a, b),

(iii) jedna z nich zleva spojitá na (a, b) a druhá je zprava spojitá na (a, b).

7.32 Cvičení. Dokažte, že jestliže $\tau \in (a, b)$ a h_τ, resp. δ_τ jsou Heavisideova funkce, resp. Diracova distribuce se středem v τ, pak $h_\tau\, \delta_\tau = \delta_\tau / 2$.

(Návod: Použijte cvičení 6.43.)

Kapitola 8

Zobecněné lineární diferenciální rovnice

8.1 Úvod

Všechny integrály v této kapitole jsou KS–integrály, jejichž definice je rozšířena ve smyslu odstavce 6.10 na maticové funkce (tj. funkce zobrazující interval $[a,b]$ do prostoru matic). Jak jsme již v odstavci 6.10 vysvětlili, všechny vlastnosti KS–integrálu i obou typů RS-integrálu, které jsme doposud dokázali pro skalární funkce, platí i pro funkce vektorové či maticové, pokud se v příslušných formulích nezmění pořadí, v jakém se tam maticové funkce objevují. V důkazech se tedy budeme pro potřebné vlastnosti funkcí a integrálů odvolávat na odpovídající tvrzení pro skalární funkce z kapitol 1–6.

Následující definice zavádí prostory vektorových, resp. maticových funkcí, se kterými budeme v této kapitole pracovat.

8.1 Definice. (i) $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je Banachův prostor funkcí $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, které jsou regulované na $[a,b]$. Norma na $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je definována předpisem

$$\|f\| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \quad \text{pro } f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n),$$

kde $|f(t)|$ je norma vektoru $f(t)$ v $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ je Banachův prostor funkcí $F:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, které mají konečnou variaci na $[a,b]$. Norma na $\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ je definována předpisem $\|F\|_{\mathbb{BV}} = |F(a)| + \operatorname{var}_a^b F$ pro $F\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, kde $\operatorname{var}_a^b F$ se definuje jako v odstavci 6.10 a $|F(a)|$ je norma matice $F(a)$ v $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.

Podobně se definují prostory $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{C}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ a $\mathbb{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a normy na nich. Množinu funkcí $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ s derivací spojitou na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathbb{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Jako obvykle, definujeme

$$f'(a) = f'(a+) \quad \text{a} \quad f'(b) = f'(b-) \quad \text{pro } f\in\mathbb{C}^1([a,b],\mathbb{R}^n).$$

Tématem této kapitoly budou rovnice tvaru

$$x(t) - x(s) - \int_s^t \mathrm{d}\,A\,x = f(t) - f(s), \tag{8.1}$$

kde $t,\ s\in[a,b]$, A je $n\times n$-maticová funkce, f je n-vektorová funkce a hledáme n-vektorovou funkci x vyhovující následující definici.

8.2 Definice. Funkce $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ je řešením rovnice (8.1) na intervalu $[a,b]$, jestliže existuje integrál $\int_a^b \mathrm{d}A x$ a rovnost (8.1) je splněna pro libovolná $t,s\in[a,b]$.

Rovnice (8.1) se nazývá *zobecněná lineární diferenciální rovnice*.

8.3 Poznámka. Buď dáno $t_0 \in [a,b]$ a nechť x splňuje rovnost

$$x(t) - x(t_0) - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,A\,x = f(t) - f(t_0) \tag{8.2}$$

pro $t \in [a,b]$. Potom pro libovolné $s \in [a,b]$ máme

$$x(s) = x(t_0) + \int_{t_0}^{s} \mathrm{d}\,A\,x + f(s) - f(t_0).$$

Odečteme-li tuto rovnost od (8.2), zjistíme, že (8.1) platí pro libovolná $t, s \in [a,b]$, tj. x je řešení rovnice (8.1). Funkce $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je tedy řešením rovnice (8.1) na $[a,b]$ právě tehdy, když pro nějaké pevné $t_0 \in [a,b]$ splňuje rovnost (8.2) na $[a,b]$.

8.2 Diferenciální rovnice s impulsy

Motivací pro studium zobecněných diferenciálních rovnic jsou mj. úlohy s impulsy. V řadě praktických úloh se totiž potkáme s perturbacemi, jejichž doba působení je sice zanedbatelná v porovnání s dobou celého procesu, které ale nicméně podstatně ovlivní studovaný proces. Zpravidla vhodným modelem pro popis takovýchto procesů jsou *diferenciální rovnice s impulsy*, tj. diferenciální rovnice, jejichž řešení nemusí být hladká, ba ani spojitá.

Zdrojem modelů s impulsy je zejména fyzika (např. popis hodinových mechanismů, oscilace elektromechanických systémů, vyzařování elektrických, resp. magnetických vln v prostředí s rychle se měnícími parametry, stabilizace Kapicova kyvadla, optimální regulace metodou bang-bang), ale také medicína (distribuce léčivých látek v těle, strategie impulsní vakcinace v epidemiologických modelech, studium účinku hromadného očkování proti spalničkám), populační dynamika (modely s rychlými změnami počtu některých populací) či ekonomie (modely trhu, které připouštějí prudké změny cen).

Nejjednodušší idealizací impulsních procesů jsou procesy popsané lineárními diferenciálními rovnicemi, na které v konečném počtu pevně daných bodů působí lineární impulsy.

Předpokládejme, že

$$\left.\begin{aligned} & r \in \mathbb{N}, \quad a < \tau_1 < \ldots < \tau_r < b, \\ & P \in \mathbb{C}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)), \quad q \in \mathbb{C}([a,b], \mathbb{R}^n), \\ & B_k \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n), \quad d_k \in \mathbb{R}^n \ \text{ pro } k = 1, 2, \ldots, r. \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

(V této kapitole budou symboly typu B_k, resp. d_k značit také matice, resp. vektory.)

Označme $D=\{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_r\}$, $\tau_0=a$, $\tau_{r+1}=b$ a pro každou regulovanou funkci $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ definujme

$$\left.\begin{aligned} &x_{[1]}(t)=x(t) \quad \text{pro } t\in[a,\tau_1] \\ &\text{a} \\ &x_{[k]}(t)=\begin{cases} x(\tau_{k-1}+) & \text{když } t=\tau_{k-1}, \\ x(t) & \text{když } t\in(\tau_{k-1},\tau_k] \end{cases} \quad \text{pro } k=2,3,\dots,r+1. \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Lineární impulsní úloha je pak tvořena lineární diferenciální rovnicí

$$x'=P(t)\,x+q(t) \tag{8.5}$$

a lineárními impulsními podmínkami

$$\Delta^+x(\tau_k)=B_k\,x(\tau_k)+d_k, \quad k=1,2,\dots,r, \tag{8.6}$$

přičemž řešení jsou určena podle následující definice.

8.4 Definice. Řekneme, že funkce $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ je řešením úlohy (8.5), (8.6), jestliže

$$x_{[k]}\in\mathbb{C}^1([\tau_{k-1},\tau_k]) \quad \text{pro každé } k=1,2,\dots,r{+}1, \tag{8.7}$$

x vyhovuje impulsním podmínkám (8.6) a splňuje diferenciální rovnost

$$x'(t)=P(t)\,x(t)+q(t) \quad \text{pro } t\in[a,b]\setminus D. \tag{8.8}$$

8.5 Poznámka. Povšimněme si, že řešení úlohy (8.5), (8.6) jsou regulované funkce.

Ukážeme nyní, že úlohu (8.5), (8.6) můžeme ekvivalentně přeformulovat jako zobecněnou lineární diferenciální rovnici tvaru (8.2).

Předpokládejme zprvu, že $r=1$, a nechť $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ je řešení impulsní úlohy (8.5), (8.6). Integrací rovnosti (8.8) dostaneme vztahy

$$x(t)=x(a)+\int_a^t P(s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s+\int_a^t q(s)\,\mathrm{d}s \qquad \text{pro } t\in[a,\tau_1]$$

a

$$x(t)=x(\tau_1+)+\int_{\tau_1}^t P(s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s+\int_{\tau_1}^t q(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro } t\in(\tau_1,b].$$

Dosazením z podmínek (8.6) (kde $k=r=1$) do druhého vztahu pak pro $t\in(\tau_1,b]$ dostaneme

$$\begin{aligned} x(t)&=x(\tau_1)+B_1\,x(\tau_1)+d_1+\int_{\tau_1}^t P(s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s+\int_{\tau_1}^t q(s)\,\mathrm{d}s \\ &=x(a)+\int_a^t P(s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s+B_1\,x(\tau_1)+\int_a^t q(s)\,\mathrm{d}s+d_1, \end{aligned}$$

a tedy

$$\left.\begin{aligned} x(t) = x(a) + \int_a^t P(s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s + \chi_{(\tau_1,b]}(t)\,B_1\,x(\tau_1) \\ + \int_a^t q(s)\,\mathrm{d}s + \chi_{(\tau_1,b]}(t)\,d_1 \end{aligned}\right\} \text{ pro } t\in[a,b]. \tag{8.9}$$

Pro $t\in[a,b]$ položme

$$A(t) = \int_a^t P(s)\,\mathrm{d}\,s + \chi_{(\tau_1,b]}(t)\,B_1 \quad \text{a} \quad f(t) = \int_a^t q(s)\,\mathrm{d}\,s + \chi_{(\tau_1,b]}(t)\,d_1\,.$$

Pak

$$A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)),\ f\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n),\ A(t-)=A(t) \ \text{ a } \ f(t-)=f(t) \text{ pro } t\in(a,b].$$

Dále

$$A(t+) = \int_a^t P(s)\,\mathrm{d}\,s + \chi_{[\tau_1,b]}(t)\,B_1 \quad \text{a} \quad f(t+) = \int_a^t q(s)\,\mathrm{d}\,s + \chi_{[\tau_1,b]}(t)\,d_1$$

neboli

$$\Delta^+A(t) = \chi_{[\tau_1]}(t)\,B_1 \quad \text{a} \quad \Delta^+f(t) = \chi_{[\tau_1]}(t)\,d_1 \quad \text{pro } \ t\in[a,b).$$

Podle věty o substituci 6.57 a formule (6.21) z příkladů 6.22 (ii) (viz též příklady 6.54) platí

$$\int_a^t \mathrm{d}\,A\,x = \int_a^t P(s)\,x(s)\,\mathrm{d}\,s + \chi_{(\tau_1,b]}(t)\,B_1\,x(\tau_1)$$

a

$$f(t) - f(a) = \int_a^t q(s)\,\mathrm{d}s + \chi_{(\tau_1,b]}(t)\,d_1$$

pro $t\in[a,b]$ a $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$. Dosazením do (8.9) zjistíme, že x splňuje na $[a,b]$ rovnost (8.2), kde $t_0=a$.

Obráceně, jestliže $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ splňuje (8.2) na $[a,b]$, pak podle výše uvedeného platí opět (8.9). Odtud vidíme, že definujeme-li funkce $x_{[k]}$ jako v (8.4), bude platit (8.7) a (8.8). Navíc, podle Hakeovy věty (viz též cvičení 6.53) je $x(t-)=x(t)$ pro každé $t\in(a,b]$ a

$$\begin{aligned} x(t+) &= x(a) + \lim_{s\to t+}\int_a^s \mathrm{d}\,A\,x + f(t+) - f(a) \\ &= x(a) + \int_a^t \mathrm{d}\,A\,x + f(t) - f(a) + \Delta^+A(t)\,x(t) + \Delta^+f(t) \\ &= x(t) + \chi_{[\tau_1]}(t)\,\big(B_1\,x(t)+d_1\big) \quad \text{pro každé } \ t\in[a,b]. \end{aligned}$$

Speciálně dosazením $t = \tau_1$ zjistíme, že x splňuje impulsní podmínku (8.6), kde $k = r = 1.$

Vzhledem k poznámce 8.3 je tedy pro $r = 1$ úloha (8.5), (8.6) ekvivalentní se zobecněnou diferenciální rovnicí (8.1).

V obecném případě $r \in \mathbb{N},$ definujeme

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= \int_a^t P(s)\,\mathrm{d}\,s + \sum_{k=1}^{r} \chi_{(\tau_k,b]}(t)\,B_k,\\ f(t) &= \int_a^t q(s)\,\mathrm{d}\,s + \sum_{k=1}^{r} \chi_{(\tau_k,b]}(t)\,d_k, \end{aligned}\right\} \quad \text{pro } t \in [a,b]. \tag{8.10}$$

Indukcí snadno ověříme následující tvrzení.

8.6 Věta. *Předpokládejme* (8.3) *a* (8.10). *Potom impulsní úloha* (8.5), (8.6) *je ekvivalentní se zobecněnou diferenciální rovnicí* (8.2), *tj.* $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *je řešením úlohy* (8.5), (8.6) *na intervalu* $[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když je řešením rovnice* (8.1) *na intervalu* $[a,b].$ □

8.3 Lineární operátory

Připomeňme nyní stručně několik základních pojmů z funkcionální analýzy, které budeme nadále potřebovat. Podrobnější informaci lze najít ve většině učebnic funkcionální analýzy (viz např. [4], [17], [34], [44]). Základní přehled je obsažen také v úvodní části monografie [58].

Nechť $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ jsou Banachovy prostory. Zobrazení $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ (T zobrazuje $\mathbb{X}$ do $\mathbb{Y}$) je *spojitý operátor*, jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_{\mathbb{X}} = 0 \implies \lim_{n\to\infty} \|T(x_n) - T(x)\|_{\mathbb{Y}} = 0,$$

kde $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$ je norma na $\mathbb{X}$ a $\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}$ je norma na $\mathbb{Y}.$ Operátor $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ se nazývá *lineární*, jestliže platí

$$T(c_1\,x_2 + c_2\,x_2) = c_1\,T(x_1) + c_2\,T(x_2) \ \text{ pro } x_1, x_2 \in \mathbb{X} \ \text{ a } \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Dále řekneme, že lineární operátor T je *ohraničený*, existuje-li číslo $K \in [0,\infty)$ takové, že platí $\|T(x)\|_{\mathbb{Y}} \le K\,\|x\|_{\mathbb{X}}$ pro každé $x \in \mathbb{X}.$

Je-li T lineární operátor, píšeme, jak je zvykem, $T\,x$ místo $T(x).$ Je známo, že lineární operátor $T : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ je spojitý právě tehdy, když je ohraničený.

Množinu ohraničených lineárních zobrazení prostoru $\mathbb{X}$ do $\mathbb{Y}$ značíme $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y}).$ Je-li $\mathbb{X} = \mathbb{Y},$ píšeme $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ místo $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{X}).$ Na $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ jsou zřejmým způsobem zavedeny operace sčítání operátorů a násobení operátorů reálným číslem a $\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ je pak Banachův prostor vzhledem k normě

$$\|L\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X},\mathbb{Y})} = \sup\big\{\|L\,x\|_{\mathbb{Y}} : x \in \mathbb{X} \ \text{ a } \ \|x\|_{\mathbb{X}} \le 1\big\}.$$

Je známo, že prostor $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ je ekvivalentní s prostorem matic typu $n \times n$.

Konečně, řekneme, že $L \in \mathscr{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ je *kompaktní*, jestliže zobrazuje každou množinu ohraničenou v $\mathbb{X}$ na množinu relativně kompaktní v $\mathbb{Y}$, tj. jestliže pro každou posloupnost $\{x_n\}$ ohraničenou v $\mathbb{X}$ její obraz $\{L\,x_n\} \subset \mathbb{Y}$ obsahuje podposloupnost konvergentní v $\mathbb{Y}$. Je známo, že každý kompaktní lineární operátor je současně spojitý.

V důkazech hlavních výsledků této kapitoly využijeme následující dvě tvrzení. První z nich je zobecněním jedné z Fredholmových vět známých z teorie integrálních rovnic. Jeho důkaz je obsažen např. v monografiích N. Dunforda a J. T. Schwartze [6], M. Schechtera [47] nebo ve skriptech J. Lukeše [34].

8.7 Věta (FREDHOLMOVA VĚTA O ALTERNATIVĚ)**.** *Buď $\mathbb{X}$ Banachův prostor a nechť operátor $L \in \mathscr{L}(\mathbb{X})$ je kompaktní. Potom operátorová rovnice*

$$x - L\,x = g \tag{8.11}$$

má jediné řešení pro každé $g \in \mathbb{X}$ tehdy a jen tehdy, když příslušná homogenní rovnice

$$x - L\,x = 0 \tag{8.12}$$

má pouze triviální řešení $x = 0 \in \mathbb{X}$.

Druhé tvrzení je známo také z elementární teorie matic. Připomeňme si zde jeho obecnou podobu převzatou z monografie [61] (viz Lemma 4.1-C).

8.8 Lemma. *Nechť $\mathbb{X}$ je Banachův prostor, $T \in \mathscr{L}(\mathbb{X})$ a $\|T\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})} < 1$. Potom existuje ohraničený inverzní operátor $\big[I - T\big]^{-1}$ k operátoru $\big[I - T\big]$ a platí nerovnost*

$$\Big\|\big[I - T\big]^{-1}\Big\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})} \le \frac{1}{1 - \|T\|_{\mathscr{L}(\mathbb{X})}}.$$

8.4 Existence řešení zobecněných lineárních diferenciálních rovnic

Studium zobecněných lineárních diferenciálních rovnic zahájíme prostým pozorováním vycházejícím ze známých vlastností KS–integrálu.

8.9 Věta. *Nechť $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ a $f \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$. Potom každé řešení x rovnice* (8.1) *na $[a,b]$ je regulované na $[a,b]$ a platí pro něj vztahy*

$$\left.\begin{aligned} \Delta^- x(t) &= \Delta^- A(t)\; x(t) + \Delta^- f(t) \quad \textit{když } t \in (a,b], \\ \Delta^+ x(s) &= \Delta^+ A(s)\, x(s) + \Delta^+ f(s) \quad \textit{když } s \in [a,b). \end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

D ů k a z plyne z důsledku 6.51 Saksova-Henstockova lemmatu. □

Vzhledem k větě 8.9 je tedy vhodné hledat řešení zobecněných lineárních diferenciálních rovnic ve třídě $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Analogiemi počátečních úloh pro lineární obyčejné diferenciální rovnice jsou úlohy

$$x(t) - \widetilde{x} - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\, A\, x = f(t) - f(t_0), \tag{8.14}$$

kde bod $t_0 \in [a,b]$ a vektor $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ jsou dány předem.

8.10 Definice. Řešením počáteční úlohy (8.14) na intervalu $[a,b]$ je funkce $x\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, pro kterou je splněna rovnost (8.14) pro každé $t \in [a,b]$.

8.11 Poznámka. Vzhledem k poznámce 8.3 je zřejmé, že funkce x je řešením počáteční úlohy (8.14) na $[a,b]$ právě tehdy, když je řešením rovnice (8.1) na $[a,b]$ a platí $x(t_0) = \widetilde{x}$.

Každé funkci $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a bodu $t_0 \in [a,b]$ přiřaďme funkci $\mathscr{A}_{t_0}x$ předpisem

$$(\mathscr{A}_{t_0}x)(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\, A\, x \quad \text{pro} \ \ t \in [a,b]. \tag{8.15}$$

Podle důsledku 6.51 jsou funkce $\mathscr{A}_{t_0}x$ regulované na $[a,b]$. Zobrazení

$$\mathscr{A}_{t_0} : x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathscr{A}_{t_0}x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$$

je zřejmě lineární a dále podle věty 6.25 platí

$$\|\mathscr{A}_{t_0}x\| \le \big(\mathrm{var}_a^b\, A\big)\, \|x\| \ \text{ pro každé } x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n).$$

Pro každé $t_0 \in [a,b]$ je tedy $\mathscr{A}_{t_0}$ spojitý lineární operátor na $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$, tj.

$$\mathscr{A}_{t_0} \in \mathscr{L}(\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)).$$

Dokážeme nyní, že současně je předpisem (8.15) definován spojitý lineární operátor zobrazující $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ do $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

8.12 Lemma. *Nechť $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$ a nechť funkce $\mathscr{A}_{t_0}x$ je definována pro $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ vztahem* (8.15).

Potom $\mathscr{A}_{t_0}x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ pro každé $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a operátor

$$x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathscr{A}_{t_0}x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$$

je ohraničený.

D ů k a z . Buď $\boldsymbol{\sigma}$ libovolné dělení intervalu $[a,b]$. Podle věty 6.25 pro $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ máme

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |(\mathscr{A}_{t_0}x)(\sigma_j) - (\mathscr{A}_{t_0}x)(\sigma_{j-1})| = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}\, A\, x \Big|$$
$$\leq \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(\operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A\big)\, \|x\| = \big(\operatorname{var}_a^b A\big)\, \|x\|$$

a

$$|(\mathscr{A}_{t_0}x)(a)| = \Big| \int_{t_0}^{a} \mathrm{d}\, A\, x \Big| \leq \big(\operatorname{var}_a^b A\big)\, \|x\|.$$

Tudíž $\mathscr{A}_{t_0}x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a

$$\|\mathscr{A}_{t_0}x\|_{\mathbb{BV}} = |(\mathscr{A}_{t_0}x)(a)| + \operatorname{var}_a^b (\mathscr{A}_{t_0}x) \leq 2\, \big(\operatorname{var}_a^b A\big)\, \|x\|$$

pro každé $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$. □

Pomocí operátoru $\mathscr{A}_{t_0}$ z (8.15) můžeme přepsat počáteční úlohu (8.14) jako operátorovou rovnici

$$x - \mathscr{A}_{t_0}x = g, \quad \text{kde } \ g = \widetilde{x} + f - f(t_0).$$

Protože nemáme k dispozici prostředky postačující k důkazu kompaktnosti operátoru $\mathscr{A} \in \mathscr{L}(\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n))$, nemůžeme přímo aplikovat Fredholmovu větu (věta 8.7) a musíme postupovat tak trochu oklikou. V následující větě ukážeme pomocí Hellyovy věty a Osgoodovy věty, že operátor $\mathscr{A}_{t_0}$ generuje kompaktní zobrazení prostoru $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ do sebe.

8.13 Věta. *Nechť* $t_0 \in [a,b]$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$. *Pro* $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *definujme* $L\,x = \mathscr{A}_{t_0}x$.

Potom L *je kompaktní lineární operátor na* $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

D ů k a z . Protože je $\|x\| \leq \|x\|_{\mathbb{BV}}$ pro každé $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$, plyne z lemmatu 8.12, že $L \in \mathscr{L}(\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n))$.

Dokážeme, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$ ohraničenou v $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ její obraz $\{L\,x_n\} \subset \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ obsahuje podposloupnost konvergentní v $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

Nechť jsou tedy posloupnost $\{x_n\} \subset \mathbb{BV}[a,b]$ a číslo $\varkappa \in [0,\infty)$ takové, že je

$$\|x_n\|_{\mathbb{BV}} \leq \varkappa < \infty \quad \text{pro každé } \ n \in \mathbb{N}.$$

Podle Hellyovy věty (věta 2.49) existují funkce $x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a rostoucí podposloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ takové, že

$$\|x\|_{\mathbb{BV}} \leq 2\,\varkappa \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k}(t) = x(t) \quad \text{pro každé } \ t \in [a,b].$$

Označme $z_k(t) = x_{n_k}(t) - x(t)$ a pro $k \in \mathbb{N}$ a $t \in [a,b]$. Potom

$$|z_k(t)| \le 4\,\varkappa \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} z_k(t) = 0 \quad \text{pro} \;\; k \in \mathbb{N} \;\; \text{a} \;\; t \in [a,b].$$

Vzhledem k tomu, že integrály $\displaystyle\int_c^d \mathrm{d}\,A\,z_k$ a $\displaystyle\int_c^d \mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^s\,A]\,|z_k(s)|$ existují pro libovolná $c, d \in [a,b]$ a $k \in \mathbb{N}$, věta 6.25 zaručuje, že platí

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |(L\,z_k)(\sigma_j) - (L\,z_k)(\sigma_{j-1})| = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}\,A\,z_k \Big|$$
$$\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^s\,A\big]\,|z_k(s)| \le \int_a^b \mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^s\,A\big]\,|z_k(s)|$$

pro libovolná $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $k \in \mathbb{N}$. Máme tedy

$$\mathrm{var}_a^b\,(L\,z_k) \le \int_a^b \mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^s\,A\big]\,|z_k(s)| \quad \text{pro} \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Podle věty 6.76 je ovšem

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b \mathrm{d}\big[\mathrm{var}_a^s\,A\big]\,|z_k(s)| = 0,$$

a tudíž také

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{var}_a^b\,\big(L\,x_{n_k} - L\,x\big) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{var}_a^b\,(L\,z_k) = 0.$$

Podobně

$$\lim_{k\to\infty} \big|\big(L\,x_{n_k}(a) - L\,x(a)\big)\big| = \lim_{k\to\infty} |(L\,z_k)(a)| = \lim_{k\to\infty} \Big| \int_{t_0}^a \mathrm{d}\,A\,z_k \Big|$$
$$\le \lim_{k\to\infty} \int_{t_0}^a \big[\mathrm{var}_a^s\,A\big]\,|z_k(s)| = 0.$$

Věta je dokázána. □

Následující tvrzení je důsledkem věty 8.7 a věty 8.13.

8.14 Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $t_0 \in [a,b]$. *Potom počáteční úloha*

$$x(t) - \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,x = g(t) \tag{8.16}$$

má pro každou funkci $g \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^n)$ *jediné řešení na* $[a,b]$ *právě tehdy, když odpovídající homogenní úloha*

$$x(t) - \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,x = 0 \tag{8.17}$$

má na $[a,b]$ *pouze triviální řešení* $x \equiv 0$.

D ů k a z . Rovnice (8.16) je ekvivalentní s operátorovou rovnicí $x - Lx = g$, kde

$$L\,x = \mathscr{A}_{t_0}\,x \quad \text{pro} \;\; x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n),$$

tj.

$$(L\,x)(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\,A\,x \quad \text{pro} \;\; x \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n) \;\; \text{a} \;\; t \in [a,b].$$

Podle věty 8.13 je L lineární kompaktní operátor na $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$. K dokončení důkazu věty využijeme větu 8.7. □

Předpokládejme nyní, že $\tau \in (t_0, b]$ a funkce $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ splňuje rovnost (8.14) na intervalu $[t_0, \tau)$. Zřejmě je $x(t_0) = \widetilde{x}$. Pomocí Hakeovy věty (věta 6.52, viz též příklady 6.54 a cvičení 6.55) snadno ověříme, že platí

$$\begin{aligned} x(\tau-) &= \widetilde{x} + \lim_{s \to \tau-} \int_{t_0}^{s} \mathrm{d}\,A\,x + f(\tau-) - f(t_0) \\ &= \widetilde{x} + \int_{t_0}^{\tau} \mathrm{d}\,A\,x + f(\tau) - f(t_0) - \Delta^- A(\tau)\,x(\tau) - \Delta^- f(\tau) \\ &= \big[I - \Delta^- A(\tau)\big]\,x(\tau) - \Delta^- f(\tau). \end{aligned}$$

Má-li tedy funkce x splňovat (8.14) také v bodě τ, musí hodnota $x(\tau)$ vyhovovat rovnici

$$\big[I - \Delta^- A(\tau)\big]\,x(\tau) = x(\tau-) + \Delta^- f(\tau), \tag{8.18}$$

kde I značí jednotkovou matici typu $n \times n$ (viz Úmluvy a označení (xiv)). Odtud je zřejmé, že řešení počáteční úlohy (8.14) na intervalu $[t_0, \tau)$ bude možno jednoznačným způsobem prodloužit do bodu τ, jestliže bude platit

$$\det\big[I - \Delta^- A(\tau)\big] \neq 0. \tag{8.19}$$

Podobně jako výše můžeme usoudit, že funkce $x \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ splňující (8.14) na intervalu $(\tau, t_0]$, kde $\tau \in [a, t_0)$, splňuje (8.14) také v bodě τ tehdy a jen tehdy, když platí

$$\big[I + \Delta^+ A(\tau)\big]\,x(\tau) = x(\tau+) - \Delta^+ f(\tau), \tag{8.20}$$

a k tomu stačí, aby platilo

$$\det\big[I + \Delta^+ A(\tau)\big] \neq 0. \tag{8.21}$$

(Rozmyslete si detaily!) Můžeme tedy očekávat, že podmínky (8.19) a (8.21) jsou podstatné pro existenci řešení úlohy (8.14).

8.15 Lemma. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $t_0 \in [a,b]$. *Potom úloha* (8.16) *má jediné řešení pro každou funkci* $g \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^n)$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$\det\left[I - \Delta^- A(t)\right] \neq 0 \quad \textit{pro každé } t \in (t_0, b] \tag{8.22}$$

a

$$\det\left[I + \Delta^+ A(s)\right] \neq 0 \quad \textit{pro každé } s \in [a, t_0). \tag{8.23}$$

(*Zde* $(t_0, b] = \emptyset$, *když* $t_0 = b$, *a* $[a, t_0) = \emptyset$, *když* $t_0 = a$.)

D ů k a z. a) Předpokládejme, že $t_0 \in [a,b)$, A splňuje (8.22) a (8.23) a x splňuje (8.17) na $[a,b]$. Vzhledem k poznámce 8.3 je x řešením rovnice (8.1) na $[a,b]$, přičemž $x(t_0) = 0$. Podle věty 8.9 je x regulovaná na $[a,b]$ a z druhé rovnice v (8.13) plyne, že platí $\Delta^+ x(t_0) = \Delta^+ A(t_0)\, x(t_0) = 0$, tj. $x(t_0+) = 0$.

Označme $\alpha(t) = \operatorname{var}_{t_0}^t A$ pro $t \in [t_0, b]$. Funkce α je neklesající na intervalu $[t_0, b]$. Existuje tedy konečná limita $\alpha(t_0+)$ a můžeme zvolit $\delta \in (0, b - t_0)$ tak, aby platilo $0 \leq \alpha(t_0 + \delta) - \alpha(t_0+) < 1/2$. Pro každé $t \in [t_0, t_0+\delta]$ odtud pomocí vět 6.25 a 6.52 odvodíme nerovnosti

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \int_{t_0}^t |x| \,\mathrm{d}\,\alpha = \Delta^+\alpha(t_0)\, |x(t_0)| + \lim_{\tau \to t_0+} \int_\tau^t |x| \,\mathrm{d}\,\alpha \\ &= \lim_{\tau \to t_0+} \int_\tau^t |x| \,\mathrm{d}\,\alpha \leq \left[\alpha(t_0+\delta) - \alpha(t_0+)\right] \Big(\sup_{t \in [t_0, t_0+\delta]} |x(t)| \Big) \\ &\leq \frac{1}{2} \Big(\sup_{t \in [t_0, t_0+\delta]} |x(t)| \Big). \end{aligned}$$

Tudíž $\Big(\sup_{t \in [t_0, t_0+\delta]} |x(t)| \Big) \leq \frac{1}{2} \Big(\sup_{t \in [t_0, t_0+\delta]} |x(t)| \Big)$. To je ale možné pouze tehdy, když $x = 0$ na $[t_0, t_0 + \delta]$.

Položme $t^* = \sup\{\tau \in (t_0, b] : x = 0$ na $[t_0, \tau]$. Zřejmě je $x = 0$ na $[t_0, t^*)$, a tudíž také $x(t^*-) = 0$. Dále podle (8.13) máme $0 = \left[I - \Delta^- A(t^*)\right] x(t^*)$. To je ale, vzhledem k předpokladu (8.22), možné pouze tehdy, když $x(t^*) = 0$.

Předpokládejme, že $t^* < b$. Stejnou argumentací, jakou jsme na začátku důkazu dokázali, že existuje $\delta \in (0, b - t_0]$ takové, že x je nulové na $[t_0, t_0 + \delta]$, ukázali bychom nyní, že existuje $\eta \in (0, b - t^*)$ takové, že x se anuluje na $[t^*, t^* + \eta]$, což je ovšem vzhledem k definici t^* nemožné, tudíž musí být $t^* = b$. Dokázali jsme, že každé řešení úlohy (8.17) je nulové na $[t_0, b]$.

Podobně bychom pomocí předpokladu (8.23) dokázali, že je-li $t_0 \in (a, b]$, pak se řešení x úlohy (8.17) anuluje také na $[a, t_0]$.

Dokázali jsme, že platí-li (8.22) a (8.23), má úloha (8.17) pouze triviální řešení na $[a,b]$. Podle věty 8.14 má tedy pro každé $g \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^n)$ úloha (8.16) jediné řešení na $[a,b]$.

b) Předpokládejme, že neplatí např. (8.22). Podle lemmatu 8.8 je

$$\det\left[I - \Delta^- A(t)\right] \neq 0,$$

pro ta $t \in (a,b]$, pro která platí

$$|\Delta^- A(t)| \le 1/2.$$

Na druhou stranu, podle důsledku 4.9 může obrácená nerovnost

$$|\Delta^- A(t)| > 1/2$$

platit pro nejvýše konečně mnoho bodů $t \in (t_0, b\,]$. Matice $I - \Delta^- A(t)$ tedy není regulární pro nejvýše konečně mnoho bodů $t \in (t_0, b\,]$.

Můžeme tedy zvolit $t^* \in (t_0, b\,]$ takové, že

$$\det\big[I - \Delta^- A(t)\big] \ne 0 \text{ pro } t \in (t_0, t^*) \quad \text{a} \quad \det\big[I - \Delta^- A(t^*)\big] = 0.$$

Dále ze základů lineární algebry je známo, že potom existuje $d \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\big[I - \Delta^- A(t^*)\big]\, c \ne d \quad \text{pro každé } c \in \mathbb{R}^n. \tag{8.24}$$

Definujme

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{když } t \ne t^*, \\ d & \text{když } t = t^*. \end{cases}$$

Máme $g \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ a $\Delta^- g(t^*) = d$. Předpokládejme, že rovnice (8.16) má na $[a,b]$ řešení x. Potom podle první části důkazu musí být $x = 0$ na $[a,t^*)$, a tedy také $x(t^*-) = 0$. Podle věty 8.9 musí platit $\big[I - \Delta^- A(t^*)\big]\, x(t^*) = d$. To je ovšem ve sporu s tvrzením (8.24). Úloha (8.16) tedy nemůže mít řešení.

Neplatí-li (8.23), pak analogicky najdeme bod $t^* \in [a, t_0)$ a funkci g takové, že bude

$$\big[I + \Delta^+ A(t^*)\big]\, c \ne \Delta^+ g(t^*) \quad \text{pro každé } c \in \mathbb{R}^n,$$

což vede opět ke sporu s větou 8.9. □

8.16 Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a* $t_0 \in [a,b]$. *Potom počáteční úloha* (8.14) *má pro každou funkci* $f \in \mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *a každý vektor* $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *jediné řešení tehdy a jen tehdy, když platí* (8.22) *a* (8.23).

D ů k a z . Věta je důsledkem lemmatu 8.15, kde položíme

$$g(t) = \widetilde{x} + f(t) - f(t_0) \quad \text{pro } t \in [a,b].$$

□

8.5 Zobecněné Gronwallovo lemma a apriorní odhady řešení

Důležitou roli v teorii obyčejných diferenciálních rovnic (např. při důkazu jednoznačnosti řešení počáteční úlohy nebo při důkazech spojité závislosti řešení na některých parametrech) hraje tvrzení, které se nazývá Gronwallovo lemma. Připomeňme si jeho znění. Důkaz lze najít ve většině učebnic obyčejných diferenciálních rovnic (viz např. [24, Pomocná věta 4.3.1]).

8.17 Lemma (GRONWALL). *Nechť funkce u a p jsou spojité a nezáporné na $[a,b]$, $K \geq 0$ a nechť*

$$u(t) \leq K + \int_a^t \big(p(s)\,u(s)\big)\,\mathrm{d}\,s \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b].$$

Potom

$$u(t) \leq K\,\exp\Big(\int_a^t p(s)\,\mathrm{d}\,s\Big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b].$$

Pro nás bude podobně důležité zobecnění Gronwallova lemmatu na případ, kdy se v příslušných integrálních nerovnostech vyskytuje Stieltjesův integrál.

8.18 Věta (ZOBECNĚNÉ GRONWALLOVO LEMMA). *Nechť $u\colon[a,b]\to[0,\infty)$ je ohraničená na $[a,b]$, $h\colon[a,b]\to[0,\infty)$ je neklesající a zleva spojitá na $(a,b]$, $K\geq 0$, $L\geq 0$ a nechť*

$$u(t) \leq K + L\int_a^t u\,\mathrm{d}\,h \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.25}$$

Potom

$$u(t) \leq K\,\exp\big(L\,[h(t)-h(a)]\big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.26}$$

D ů k a z . Nechť $\kappa \geq 0$ a $w_\kappa(t) = \kappa\,\exp\big(L\,[h(t)-h(a)]\big)$ pro $t\in[a,b]$. Potom

$$\begin{aligned}\int_a^t w_\kappa\,\mathrm{d}\,h &= \kappa\int_a^t \exp\big(L\,[h(s)-h(a)]\big)\,\mathrm{d}\,h(s)\\ &= \kappa\int_a^t \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L^k}{k!}\,\big[h(s)-h(a)\big]^k\Big)\,\mathrm{d}\,h(s) \quad \text{pro} \;\; t\in[a,b].\end{aligned}$$

Protože, jak známo, řada $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L^k}{k!}\,\big[h(t)-h(a)\big]^k$ konverguje stejnoměrně na $[a,b]$, můžeme přehodit pořadí operací integrace a sčítání. Použijeme-li nyní navíc větu 6.31 (kde ovšem funkci h nahradíme rozdílem $h-h(a)),$ dostaneme

$$\begin{aligned}\int_a^t w_\kappa \,\mathrm{d}\,h &= \kappa \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{L^k}{k!}\int_a^t \big[h(s)-h(a)\big]^k\Big)\,\mathrm{d}\,[h(s)]\\ &\leq \kappa \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{L^k\,[h(t)-h(a)]^{k+1}}{(k+1)!}\Big) = \frac{\kappa}{L}\,\Big(\exp(L\,[h(t)-h(a)])-1\Big)\\ &= \frac{w_\kappa(t)-\kappa}{L}\end{aligned}$$

pro $t\in[a,b].$ To znamená, že funkce w_κ splňuje pro každé $\kappa\geq 0$ a $t\in[a,b]$ nerovnost

$$w_\kappa(t) \geq \kappa + L\int_a^t w_\kappa \,\mathrm{d}\,h. \tag{8.27}$$

Buď dáno $\varepsilon>0$ a položme $\kappa=K+\varepsilon$ a $v_\varepsilon = u - w_\kappa.$ Odečtením nerovností (8.25) a (8.27) zjistíme, že platí

$$v_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon + L\int_a^t v_\varepsilon \,\mathrm{d}\,h \quad \text{pro} \;\; t\in[a,b]. \tag{8.28}$$

Speciálně $v_\varepsilon(a)\leq -\varepsilon<0.$ Zbývající část důkazu bude připomínat postup z důkazu lemmatu 8.15. Funkce u i w_κ jsou evidentně ohraničené na $[a,b]$ pro každé $\kappa\geq 0.$ Tudíž také funkce v_ε je ohraničená na $[a,b].$ Podle Hakeovy věty 6.52 (ii) máme

$$\begin{aligned}\int_a^t v_\varepsilon \,\mathrm{d}\,h &= v_\varepsilon(a)\,\Delta^+ h(a) + \lim_{\delta\to 0+}\int_{a+\delta}^t v_\varepsilon \,\mathrm{d}\,h\\ &\qquad\leq -\varepsilon\,\Delta^+ h(a) + \|v_\varepsilon\|\,[h(t)-h(a+)] \leq \|v_\varepsilon\|\,[h(t)-h(a+)],\end{aligned}$$

a tedy

$$v_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon + L\int_a^t v_\varepsilon \,\mathrm{d}\,h \leq -\varepsilon + L\,\|v_\varepsilon\|\,[h(t)-h(a+)] \quad \text{pro} \;\; t\in[a,b].$$

Zvolme $\eta>0$ tak, aby platilo $L\,\|v_\varepsilon\|\,[h(t)-h(a+)]<\varepsilon/2$ pro $t\in[a,a+\eta].$ Pak bude $v_\varepsilon<0$ na $[a,a+\eta].$ Označme $t^*=\sup\{\tau\in[a,b]: v_\varepsilon<0 \;\text{na}\; [a,\tau]\}.$

Vidíme, že je $t^*>a$ a $v_\varepsilon<0$ na $[a,t^*).$ Opětným použitím Hakeovy věty 6.52 (i) dostaneme z (8.28)

$$\begin{aligned}v_\varepsilon(t^*) &\leq -\varepsilon + L\int_a^{t^*} v_\varepsilon \,\mathrm{d}\,h\\ &= -\varepsilon + L\,\Big(v_\varepsilon(t^*)\Delta^- h(t^*) + \lim_{\delta\to 0+}\int_a^{t^*-\delta} v_\varepsilon \,\mathrm{d}\,h\Big) \leq -\varepsilon < 0,\end{aligned}$$

protože $\Delta^- h(t^*) = 0$ a $\displaystyle\int_a^{t^*-\delta} v_\varepsilon \,\mathrm{d}\, h \le 0$ pro každé $\delta > 0$.

Kdyby bylo $t^* < b$, zopakovali bychom předcházející postup a ukázali, že existuje $\theta \in (0, b - t^*)$ takové, že $v_\varepsilon < 0$ na intervalu $[a, t^* + \theta]$, což je ve sporu s definicí t^*. Tudíž $t^* = b$, $v_\varepsilon < 0$ na celém $[a, b]$ a

$$\begin{aligned} u(t) < w_\kappa(t) &= K \,\exp\big(L\,(h(t){-}h(a))\big) + \varepsilon\,\exp\big(L\,(h(t){-}h(a))\big) \\ &\le K\,\exp\big(L\,(h(t){-}h(a))\big) + \varepsilon\,\exp\big(L\,(h(b){-}h(a))\big) \text{ pro } t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, znamená to, že platí (8.26). □

8.19 Cvičení. Dokažte následující variantu věty 8.18:

Nechť $u : [a, b] \to [0, \infty)$ *je ohraničená na* $[a, b]$, $h : [a, b] \to [0, \infty)$ *je neklesající a zprava spojitá na* $[a, b)$, $K \ge 0$, $L \ge 0$ *a*

$$u(t) \le K + L \int_t^b u \,\mathrm{d}\, h \quad \textit{pro} \;\; t \in [a, b]. \tag{8.29}$$

Potom

$$u(t) \le K\,\exp\big(L\,[h(b) - h(t)]\big) \quad \textit{pro} \;\; t \in [a, b]. \tag{8.30}$$

8.20 Poznámka. Obecnější verze zobecněného Gronwallova lemmatu jsou obsaženy v monografiích Š. Schwabika [48] (viz větu 1.40) a J. Kurzweila [28] (viz kapitola 22).

V následující větě využijeme zobecněné Gronwallovo lemma k odvození důležitého odhadu pro řešení úlohy (8.14).

8.21 Věta. *Nechť* $t_0 \in [a, b]$ *a* $A \in \mathbb{BV}([a, b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňují podmínky* (8.22) *a* (8.23), $f \in \mathbb{G}([a, b], \mathbb{R}^n)$, $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *a nechť* x *je řešení počáteční úlohy* (8.14) *na* $[a, b]$. *Potom*

$$\operatorname{var}_a^b (x - f) \le (\operatorname{var}_a^b A)\, \|x\| < \infty, \tag{8.31}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{(A,t_0)} := \max\Big\{1,\, &\sup_{t \in (t_0, b]} \big|[I - \Delta^- A(t)]^{-1}\big|, \\ &\sup_{t \in [a, t_0)} \big|[I + \Delta^+ A(t)]^{-1}\big| \;\Big\} < \infty, \end{aligned}\right\} \tag{8.32}$$

$$\left.\begin{aligned} |x(t)| &\le c_{(A,t_0)} \big(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|\big)\,\exp\big(2\,c_{(A,t_0)} \operatorname{var}_{t_0}^t A\big) \quad \textit{pro}\; t \in [t_0, b], \\ |x(t)| &\le c_{(A,t_0)} \big(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|\big)\,\exp\big(2\,c_{(A,t_0)} \operatorname{var}_t^{t_0} A\big) \quad \textit{pro}\; t \in [a, t_0]. \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

D ů k a z . a) Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a, b]$ máme

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| x(\sigma_j) - f(\sigma_j) - x(\sigma_{j-1}) + f(\sigma_{j-1}) \Big|$$

$$= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} \mathrm{d}[\,A]\,x \Big| \leq \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big[(\mathrm{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A)\,\|x\|\big] = (\mathrm{var}_a^b A)\,\|x\| < \infty.$$

Odtud okamžitě plyne, že platí (8.31).

b) Pro $t \in (t_0, b\,]$ takové, že $|\Delta^- A(t)| \leq \frac{1}{2}$ máme podle lemmatu 8.8

$$\big|[I - \Delta^- A(t)]^{-1}\big| \leq \frac{1}{1 - |\Delta^- A(t)|} < 2.$$

Protože množina $\big\{t \in [a,b]\colon |\Delta^- A(t)| > \frac{1}{2}\big\}$ je podle důsledku 4.9 nejvýše konečná, plyne odtud, že

$$\sup_{t\in(t_0,b\,]} \big|[I - \Delta^- A(t)]^{-1}\big| < \infty.$$

Podobně bychom dokázali, že je $\sup\limits_{t\in[a,t_0)} \big|[I + \Delta^+ A(t)]^{-1}\big| < \infty.$ Platí tedy (8.32).

c) Nechť x splňuje (8.14). Položme

$$B(t) = \begin{cases} A(t), & \text{když } t \in [a, t_0], \\ A(t-), & \text{když } t \in (t_0, b\,]. \end{cases}$$

Zřejmě $A(t) - B(t) = \Delta^- A(t)$ a

$$\mathrm{var}_{t_0}^t (B - A) = \sum_{s\,\in\,(t_0,b\,]} |\Delta^- A(s)| \leq \mathrm{var}_{t_0}^t A \quad \text{pro } t \in (t_0, b]$$

(viz důsledek 2.30). Tudíž

$$A - B \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^n) \quad \text{a} \quad \mathrm{var}_{t_0}^t B \leq 2\,\mathrm{var}_{t_0}^t A.$$

Dále, $\Delta^+ B(t_0) = \Delta^+ A(t_0)$ a podle lemmatu 6.39 tedy dostáváme

$$\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A - B\,]\,x = \Delta^- A(t)\,x(t) \quad \text{pro } t \in (t_0, b\,].$$

Rovnice (8.14) se tedy na intervalu $(t_0, b\,]$ redukuje na

$$[I - \Delta^- A(t)]\,x(t) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[B\,]\,x + f(t) - f(t_0)$$

a odtud snadno (také díky tomu, že je $c_{(A,t_0)} \geq 1$) odvodíme nerovnost

$$|x(t)| \leq K + L \int_{t_0}^t |x|\,\mathrm{d}\,h \quad \text{pro } t \in [t_0, b\,],$$

kde $K = c_{(A,t_0)}\,(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|)\,,\ L = c_{(A,t_0)}$ a $h(t) = \operatorname{var}_{t_0}^t B$. Funkce h je neklesající na $[t_0, b]$. Dále protože B je zleva spojitá na $(t_0, b]$, je podle lemmatu 2.24 funkce h také zleva spojitá na $(t_0, b]$. Podle zobecněného Gronwallova lemmatu 8.18 dostáváme tedy konečně první nerovnost v (8.33).

Důkaz druhé nerovnosti v (8.33) by se za pomoci varianty Gronwallovy nerovnosti ze cvičení 8.19 provedl podobně. □

8.22 Cvičení. Za předpokladů věty 8.21 dokažte podrobně nerovnosti

$$0 < \sup_{t\in[a,t_0)} \left|[I + \Delta^+ A(t)]^{-1}\right| < \infty$$

a

$$|x(t)| \le c_{(A,t_0)}\left(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\|\right)\,\exp\left(2\,c_{(A,t_0)} \operatorname{var}_t^{t_0} A\right) \quad \text{pro } t \in [a, t_0\,].$$

8.6 Spojitá závislost řešení na parametrech a existence řešení pro regulované pravé strany

Nechť $t_0 \in [a,b]$ a $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ splňují podmínky (8.22) a (8.23), $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a nechť x je řešení úlohy (8.14) na $[a,b]$. Dále nechť y je na $[a,b]$ řešení počáteční úlohy

$$y(t) - \widetilde{y} - \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,y = g(t) - g(t_0), \tag{8.34}$$

kde $g \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a $\widetilde{y} \in \mathbb{R}^n$. Potom

$$\big(x(t) - y(t)\big) = \left(\widetilde{x} - \widetilde{y}\right) + \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,(x-y) + \big(f(t) - g(t)\big) - \big(f(t_0) - g(t_0)\big)$$

pro $t \in [a,b]$. Podle věty 8.21 tedy máme

$$\|x - y\| \le c_{(A,t_0)}\,\exp\left(2\,c_{(A,t_0)} \operatorname{var}_a^b A\right)\left(\left|\widetilde{x} - \widetilde{y}\right| + 2\,\|f - g\|\right),$$

kde $c_{(A,t_0)} \in (0,\infty)$ je definováno v (8.32). Vidíme, že vzájemná „vzdálenost“ řešení počátečních úloh (8.14) a (8.34) je přímo úměrná tomu, jak jsou od sebe „vzdálena“ vstupní data (tj. počáteční hodnoty $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ a pravé strany f, g) těchto rovnic. Podrobněji je tento jev popsán v následující větě.

8.23 Věta. *Nechť $t_0 \in [a,b]$ a $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ splňují (8.22) a (8.23). Dále nechť $f, f_k \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a $\widetilde{x}, \widetilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$ pro $k \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0 \tag{8.35}$$

a

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{x}_k = \widetilde{x}. \tag{8.36}$$

Nechť počáteční úlohy

$$x_k(t) - \widetilde{x}_k - \int_{t_0}^t \mathrm{d}\, A\, x_k = f_k(t) - f_k(t_0) \tag{8.37}$$

mají pro $k \in \mathbb{N}$ *řešení* x_k *na intervalu* $[a,b]$. *Potom má také úloha* (8.14) *řešení* x *na intervalu* $[a,b]$ *a platí*

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0. \tag{8.38}$$

D ů k a z . a) V důsledku (8.35) a (8.36) existuje k_0 takové, že $\|f_k\| \le \|f\| + 1$ a $|\widetilde{x}_k| \le |\widetilde{x}| + 1$ platí pro $k \ge k_0$. Podle věty 8.21 platí tedy pro $k \ge k_0$ také

$$\|x_k\| \le \varkappa_0 < \infty, \quad \text{kde } \varkappa_0 = c_{(A,t_0)} \left(|\widetilde{x}| + 2\,\|f\| + 3\right) \exp\left(2\, c_{(A,t_0)} \operatorname{var}_a^b A\right)$$

nezávisí na k. Podle téže věty máme dále

$$\operatorname{var}_a^b (x_k - f_k) \le \varkappa_0 \operatorname{var}_a^b A < \infty \quad \text{pro } k \ge k_0.$$

Nyní, podle Hellyovy věty o výběru (věta 2.49) existují funkce $y \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^n)$ a rostoucí posloupnost $\{k_\ell\} \subset \mathbb{N}$ takové, že $k_1 \ge k_0$,

$$\|y\|_{\mathbb{BV}} \le 2\, \max\{\varkappa_0 \operatorname{var}_a^b A, \varkappa_0 + \|f\| + 1\}$$

a

$$\lim_{\ell\to\infty} \left(x_{k_\ell}(t) - f_{k_\ell}(t)\right) = y(t) \quad \text{pro } t \in [a,b].$$

Vzhledem k předpokladu (8.35) to ovšem znamená, že pro každé $t \in [a,b]$ existuje limita $x(t) := \lim_{\ell\to\infty} x_{k_\ell}(t)$ Díky stejnoměrné ohraničenosti posloupnosti $\{x_{k_\ell}\}$ a pomocí Osgoodovy věty (věta 6.76) tedy získáme pro každé $t \in [a,b]$ rovnost

$$\lim_{\ell\to\infty} \int_{t_0}^t \mathrm{d}\, A\, x_{k_\ell} = \int_{t_0}^t \mathrm{d}\, A\, x.$$

Tudíž limitním přechodem $\ell \to \infty$ v rovnici (8.37) (a také s použitím předpokladů (8.35) a (8.36)) dospějeme ke zjištění, že x je řešením úlohy (8.14) na $[a,b]$.

b) Zopakujeme-li nyní pro každé $k \in \mathbb{N}$ úvahu z úvodu tohoto odstavce, přičemž v ní x_k nahradí y, f_k nahradí g a $\widetilde{x}_k$ nahradí $\widetilde{y}$, zjistíme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\|x - x_k\| \le K\left(|\widetilde{x} - \widetilde{x}_k| + 2\,\|f - f_k\|\right),$$

kde $K = c_{(A,t_0)} \exp\left(2\, c_{(A,t_0)} \operatorname{var}_a^b A\right) < \infty$ nezávisí na k. Platí tedy také (8.38). □

Požadavek existence řešení rovnic (8.37) v předchozí větě byl podstatný. Existenční věta 8.16, kterou máme zatím k dispozici, se vztahuje pouze na případy, kdy pravá strana f má konečnou variaci na $[a,b]$.

Nyní můžeme konečně rozšířit větu 8.16 na obecný případ $f \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n)$.

8.24 Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$ *a platí* (8.22) *a* (8.23).

Potom pro každou funkci $f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *a každý vektor* $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ *má počá-teční úloha* (8.14) *jediné řešení na* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Máme-li dvě řešení x, y úlohy (8.14) na intervalu $[a,b]$, bude jejich rozdíl na $[a,b]$ řešením homogenní úlohy (8.17), která má ovšem podle lemmatu 8.15 pouze triviální řešení. Musí tedy platit $x \equiv y$ na $[a,b]$.

b) Položme $\widetilde{x}_k = \widetilde{x}$ pro $k \in \mathbb{N}$. Podle věty 4.7 existuje posloupnost $\{f_k\}$ jednoduchých skokových funkcí (tedy funkcí z $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$), která konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k f. Podle věty 8.16 pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje jediné řešení x_k úlohy (8.37) a podle věty 8.23 posloupnost $\{x_k\}$ konverguje stejnoměrně k řešení úlohy (8.14). □

Ve zbývající části odstavce se omezme pro jednoduchost na případ $t_0 = a$, tj. vyšetřujeme počáteční úlohu

$$x(t) - \widetilde{x} - \int_a^t \mathrm{d}\,A\,x = f(t) - f(a) \tag{8.39}$$

jako limitu úloh

$$x_k(t) - \widetilde{x}_k - \int_a^t \mathrm{d}\,A_k\,x_k = f_k(t) - f_k(a), \tag{8.40}$$

kde také jádra A_k závisí na parametru $k \in \mathbb{N}$. Tento případ je poněkud složitější než ten, který jsme řešili ve větě 8.23. Nejprve dokážeme konvergenční větu pro KS–integrály pro situaci, která není pokryta větami z kapitoly 6.

8.25 Věta. *Nechť* f, $f_k \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$, $A, A_k \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *pro* $k \in \mathbb{N}$. *Předpokládejme, že platí* (8.35),

$$\lim_{k\to\infty} \|A_k - A\| = 0 \tag{8.41}$$

a

$$\alpha^* := \sup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{var}_a^b A_k < \infty. \tag{8.42}$$

Potom

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{t\in[a,b]}\left|\int_a^t \mathrm{d}\,A_k\,f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,A\,f\right|\right) = 0.$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle věty 4.7 můžeme zvolit funkci $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ takovou, že každá její komponenta je jednoduchá skoková funkce na $[a,b]$ a přitom $\|f - \varphi\| < \varepsilon$. Dále podle (8.35) a (8.41) můžeme zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby současně platilo

$$\|f_k - f\| < \varepsilon \quad \text{a} \quad \|A_k - A\| < \varepsilon \quad \text{pro } k \ge k_0.$$

Pro dané $t \in [a,b]$ a $k \geq k_0$ máme podle vět 6.25 a 6.26

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_a^t \mathrm{d}\,A_k\,f_k - \int_a^t \mathrm{d}\,A\,f\Big| \\
&\quad\leq \Big|\int_a^t \mathrm{d}\,A_k\,\big(f_k - \varphi\big)\Big| + \Big|\int_a^t \mathrm{d}\,\big[A_k - A\big]\,\varphi\Big| + \Big|\int_a^t \mathrm{d}\,A\,\big(\varphi - f\big)\Big| \\
&\quad\leq (\mathrm{var}_a^b\,A_k)\,\|f_k - \varphi\| + 2\,\|A_k - A\|\,\|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + (\mathrm{var}_a^b\,A)\,\|\varphi - x\| \\
&\quad\leq \alpha^*\,\big(\|f_k - f\| + \|f - \varphi\|\big) + 2\,\|A_k - A\|\,\|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + (\mathrm{var}_a^b\,A)\,\|\varphi - f\| \\
&\quad\leq \big(2\,\alpha^* + 2\,\|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + \mathrm{var}_a^b\,A\big)\,\varepsilon = K\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

kde $K = \big(2\,\alpha^* + 2\,\|\varphi\|_{\mathbb{BV}} + \mathrm{var}_a^b\,A\big) \in (0,\infty)$ nezávisí ani na k ani na t. Tím je věta dokázána. □

Dále je třeba dokázat následující pomocné tvrzení.

8.26 Lemma. *Předpokládejme, že* $A, A_k \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *pro* $k \in \mathbb{N}$ *a, že platí* (8.22) $($*kde* $t_0 = a)$ *a* (8.41).

Potom existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $k \geq k_0$ *platí*

$$\det\big[I - \Delta^- A_k(t)\big] \neq 0 \quad \textit{pro} \;\; t \in (a,b] \tag{8.43}$$

a

$$\sup_{t \in (a,b]} \big|[I - \Delta^- A_k(t)]^{-1}\big| < 2\,c_A, \tag{8.44}$$

kde $c_A = c_{(A,a)} \in (0,\infty)$ *je konstanta definovaná v* (8.32) *pro* $t_0 = a$.

D ů k a z . Díky (8.41) platí podle lemmatu 4.15 $\lim\limits_{k\to\infty} \|\Delta^- A_k - \Delta^- A\| = 0$. Můžeme tedy zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby bylo

$$|\Delta^- A_k(t) - \Delta^- A(t)| < \frac{1}{4\,c_A} \;\; \text{pro} \;\; t \in [a,b] \;\; \text{a} \;\; k \geq k_0. \tag{8.45}$$

Nechť $t \in (a,b]$ a $k \geq k_0$ jsou dány. Snadno ověříme, že platí rovnost

$$I - \Delta^- A_k(t) = \big[I - \Delta^- A(t)\big]\,\big[I - T_k(t)\big],$$

kde

$$T_k(t) = \big[I - \Delta^- A(t)\big]^{-1}\,\big(\Delta^- A_k(t) - \Delta^- A(t)\big).$$

Vzhledem k předpokladu (8.22) je tudíž matice $I - \Delta^- A_k(t)$ regulární tehdy a jen tehdy, když je regulární matice $I - T_k(t)$.

Podle (8.32) a (8.45) máme

$$|T_k(t)| = \left|\left[I - \Delta^- A(t)\right]^{-1}\right| \left|\Delta^- A_k(t) - \Delta^- A(t)\right| < \frac{1}{4}.$$

Lemma 8.8 tedy zaručuje, že matice $I - T_k(t)$, a tudíž také $I - \Delta^- A_k(t)$ jsou regulární, a že platí $\left|\left[I - T_k(t)\right]^{-1}\right| < 2.$ Odtud a z (8.32) plyne

$$\left|\left[I - \Delta^- A_k(t)\right]^{-1}\right| \le \left|\left[I - T_k(t)\right]^{-1}\right| \left|\left[I - \Delta^- A(t)\right]^{-1}\right| < 2\, c_A.$$

Důkaz je dokončen. □

Nyní můžeme zformulovat a dokázat hlavní větu tohoto odstavce.

8.27 Věta. *Nechť* $t_0 = a,\ A,\ A_k \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)),\ f,\ f_k \in \mathbb{G}([a,b], \mathbb{R}^n),\ \widetilde{x},\ \widetilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$ *pro* $k \in \mathbb{N}$. *Dále předpokládejme, že platí* (8.22), (8.35), (8.36), (8.41) *a* (8.42).

Potom existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $k \ge k_0$ *má počáteční úloha* (8.40) *jediné řešení* x_k *na* $[a,b]$ *a platí* (8.38), *kde* x *je řešení úlohy* (8.39).

D ů k a z . Podle věty 8.24 má úloha (8.39) jediné řešení x na $[a,b]$. Dále podle lemmatu 8.26 existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ takové, že (8.43) platí pro $k \ge k_0$. Tudíž, vzhledem k větě 8.24, úloha (8.40) má pro každé $k \ge k_0$ jediné řešení x_k na $[a,b]$. Položme

$$w_k = (x_k - f_k) - (x - f). \tag{8.46}$$

Potom

$$w_k(t) = \widetilde{w}_k + \int_a^t \mathrm{d}\, A_k\, w_k + h_k(t) - h_k(a) \quad \text{pro } k \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad t \in [a,b],$$

kde $\widetilde{w}_k = (\widetilde{x}_k - f_k(a)) - (\widetilde{x} - f(a))$ a

$$h_k(t) = \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k - A]\,(x - f) + \left(\int_a^t \mathrm{d}\, A_k\, f_k - \int_a^t \mathrm{d}\, A\, f\right). \tag{8.47}$$

Dokážeme, že

$$\lim_{k\to\infty} \|w_k\| = 0. \tag{8.48}$$

Podle (8.42), (8.44) a věty 8.21 je

$$|w_k(t)| \le 2\, c_A\, (|\widetilde{w}_k| + \|h_k\|)\, \exp\left(4\, c_A\, \alpha^*\right) \quad \text{pro } t \in [a,b], \tag{8.49}$$

kde, podobně jako v lemmatu 8.26, píšeme c_A místo $c_{(A,a)}$. Stačí tedy dokázat, že

$$\lim_{k\to\infty} |\widetilde{w}_k| = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} \|h_k\| = 0. \tag{8.50}$$

Nejprve si povšimněme, že první vztah z (8.50) plyne okamžitě z předpokladů (8.35) a (8.36). Dále podle věty 8.25 je

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} \left| \int_a^t \mathrm{d}\, A_k\, f_k - \int_a^t \mathrm{d}\, A\, f \right| = 0. \tag{8.51}$$

Současně podle věty 6.26 máme

$$\left| \int_a^t \mathrm{d}\,[A_k - A]\,(x - f) \right| \le 2\, \|A_k - A\|\, \|x - f\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{pro } \ t\in[a,b].$$

Protože $(x - f)\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ podle (8.31), plyne odtud díky (8.41), že platí také

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} \left| \int_a^t \mathrm{d}[\, A_k - A]\,(x - f) \right| = 0. \tag{8.52}$$

Souhrnem, podle (8.47) a (8.51)–(8.52) dostáváme $\lim\limits_{k\to\infty} \|h_k\| = 0$. Platí tedy (8.50), a vzhledem k (8.49) tudíž také (8.48).

Podle (8.46) je $x_k - x = w_k + \big(f_k - f\big)$. Tvrzení věty tudíž plyne z (8.35) a (8.48). □

8.7 Fundamentální matice

Zobecněním homogenních systémů lineárních obyčejných diferenciálních rovnic je rovnice

$$x(t) - x(s) - \int_s^t \mathrm{d}\, A\, x = 0. \tag{8.53}$$

Nechť $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0\in[a,b]$ a nechť platí (8.22) a (8.23). Potom podle věty 8.16 (kde $f(t) \equiv f(a)$ na $[a,b]$) má rovnice (8.53) pro každé $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$ právě jedno řešení $x\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ na $[a,b]$ takové, že $x(t_0)=\widetilde{x}$. Naopak, každému řešení x rovnice (8.53) můžeme přiřadit hodnotu $x(t_0)\in\mathbb{R}^n$. Vzhledem k poznámkám 8.3 a 8.11 je tento vztah mezi řešeními rovnice (8.53) a vektorovým prostorem $\mathbb{R}^n$ vzájemně jednoznačný. Snadno ověříme, že jsou-li x, y řešení rovnice (8.53) na $[a,b]$ a $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$, pak $\alpha\, x + \beta\, y$ je také řešení rovnice (8.53) na $[a,b]$. Nyní můžeme tyto úvahy shrnout do následujícího tvrzení.

8.28 Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a nechť platí* (8.22) *a* (8.23). *Potom množina řešení rovnice* (8.53) *je lineární a tvoří podprostor* $\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *dimenze* n.

Nyní ukážeme, že i pro zobecněné lineární diferenciální rovnice existuje obdoba fundamentální matice. Fundamentální matici pro zobecněné lineární diferenciální rovnice definujeme následujícím způsobem.

8.29 Definice. Maticová funkce $X : [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ se nazývá *fundamentální matice rovnice* (8.53) na intervalu $[a,b]$, jestliže splňuje rovnost

$$X(t) = X(s) + \int_s^t \mathrm{d}\,A\,X \quad \text{pro } \ t,s \in [a,b] \tag{8.54}$$

a $\det\, X(t) \neq 0$ pro alespoň jedno $t \in [a,b]$.

8.30 Poznámka. Jestliže maticová funkce X splňuje vztah (8.54), pak snadno ověříme, že pro libovolné $c \in \mathbb{R}^n$ je funkce $x(t) = X(t)\,c$ řešením rovnice (8.53).

8.31 Lemma. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$ *a nechť platí* (8.22) *a* (8.23). *Potom pro každou matici* $\widetilde{X} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *existuje právě jedna maticová funkce*

$$X_{t_0} \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$$

taková, že platí

$$X_{t_0}(t) = \widetilde{X} + \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,X_{t_0} \quad \textit{pro } \ t \in [a,b]. \tag{8.55}$$

D ů k a z. Pro $k = 1,2,\ldots,n$ označme k-tý sloupec matice $\widetilde{X}$ jako $\widetilde{x}_k$. Máme tedy $\widetilde{x}_k \in \mathbb{R}^n$ pro $k = 1,2,\ldots,n$ a $\widetilde{X} = \big(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n\big)$. Podle věty 8.16 pak pro každé $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ existuje právě jedna funkce $x_k \in \mathbb{BV}([a,b], \mathbb{R}^n)$ vyhovující rovnosti

$$x_k(t) - \widetilde{x}_k - \int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,x_k = 0 \quad \text{pro } \ t \in [a,b].$$

Funkce $X_{t_0}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\big)$ (tj. maticová funkce se sloupci x_k) splňuje tedy vztah (8.55) a je určena jednoznačně. □

8.32 Poznámka. Je-li $t_0 \in [a,b]$, $\widetilde{X} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ a funkce X_{t_0} je určená lemmatem 8.31, pak funkce $X = X_{t_0}$ zřejmě splňuje vztah (8.54). Je-li tedy $\det\, \widetilde{X} \neq 0$, pak je takto definovaná funkce X fundamentální maticí rovnice (8.53).

Nyní, pro usnadnění, poněkud zesílíme naše předpoklady (8.22) a (8.23). Budeme nyní předpokládat, že platí

$$\left.\begin{aligned} &\det\big[I - \Delta^- A(t)\big] \neq 0 \quad \text{pro každé } \ t \in (a,b] \\ \text{a}\quad & \\ &\det\big[I + \Delta^+ A(s)\big] \neq 0 \quad \text{pro každé } \ s \in [a,b). \end{aligned}\right\} \tag{8.56}$$

8.33 Lemma. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *a nechť platí* (8.56). *Potom pro libovolnou fundamentální matici* X *rovnice* (8.53) *je*

$$\det\, X(t) \neq 0 \quad \textit{pro každé } \ t \in [a,b]. \tag{8.57}$$

D ů k a z . Nechť X je fundamentální matice rovnice (8.53) na $[a,b]$ a nechť (8.57) neplatí. Potom existují body $\tau_0, \tau_1 \in [a,b]$ takové, že

$$\det X(\tau_0) \neq 0 \quad \text{a} \quad \det X(\tau_1) = 0.$$

Z druhé rovnosti plyne, že sloupce $x_1(\tau_1), x_2(\tau_1), \dots, x_n(\tau_1)$ matice $X(\tau_1)$ jsou lineárně závislé. Existují tedy koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| > 0 \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(\tau_1) = 0.$$

Položme $x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(t)$ pro $t \in [a,b]$. Potom x je řešením rovnice (8.53) (viz poznámku 8.30) a $x(\tau_1) = 0$. Dosazením $s = \tau_1$ do (8.53) a odečtením takto získané rovnosti od (8.53) zjistíme, že x je řešením počáteční úlohy

$$x(t) = \int_{\tau_1}^{t} \mathrm{d}\, A\, x \quad \text{pro} \quad t \in [a,b].$$

Vzhledem k předpokladu (8.56) jsou podmínky (8.22) a (8.23) splněny pro $t_0 = \tau_1$, a protože stejnou úlohu jako x splňuje i identicky nulová funkce, plyne z věty 8.16, kde položíme $t_0 = \tau_1$, že $x = 0$ na $[a,b]$. Speciálně

$$x(\tau_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k(\tau_0) = 0,$$

což ovšem, vzhledem k předpokladům $\det X(\tau_0) \neq 0$ a $\sum_{k=1}^{n} |c_k| > 0$, není možné.

□

Připomeňme nyní některá označení užívaná pro funkce dvou proměnných.

8.34 Označení. Nechť $U\colon [a,b] \times [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Potom pro dané $\tau \in [a,b]$ značí symboly $U(\tau,\cdot)$, resp. $U(\cdot,\tau)$ funkce jedné proměnné

$$U(\tau,\cdot): s \in [a,b] \to U(\tau,s) \text{ resp. } U(\cdot,\tau): t \in [a,b] \to U(t,\tau).$$

Podobně

$$U(\tau, s+) = \lim_{\delta \to 0+} U(\tau, s+\delta),\ U(\tau, s-) = \lim_{\delta \to 0+} U(\tau, s-\delta),$$
$$U(t+, \tau) = \lim_{\delta \to 0+} U(t+\delta, \tau),\ U(t-, \tau) = \lim_{\delta \to 0+} U(t-\delta, \tau).$$

Následující věta je důsledkem lemmat 8.31 a 8.33.

8.35 Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *splňuje* (8.56). *Potom existuje právě jedna maticová funkce* $U:[a,b]\times[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *taková, že platí*

$$U(t,s)=I+\int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s) \quad \textit{pro}\ \ t,s\in[a,b]\times[a,b]. \tag{8.58}$$

Pro každé $t_0\in[a,b]$ *je funkce* $U(\cdot,t_0):t\in[a,b]\to U(t,t_0)\in\mathbb{R}^n$ *fundamentální matice rovnice* (8.53).

Funkce U *má navíc tyto vlastnosti:*

(i) $U(\cdot,s)\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ *pro každé* $s\in[a,b]$,

(ii) $U(t,t)=I$ *pro každé* $t\in[a,b]$,

(iii) $\det U(t,s)\neq 0$ *pro všechna* $t,s\in[a,b]$.

D ů k a z . Pro každé $s\in[a,b]$ existuje podle lemmatu 8.31 právě jedna maticová funkce $X_s\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ taková, že platí

$$X_s(t)=I+\int_s^t \mathrm{d}\,A\,X_s \quad \text{pro}\ \ t\in[a,b].$$

Definujme $U(t,s)=X_s(t)$ pro $t,s\in[a,b]$. Potom U splňuje (8.58) a $U(t,t)=I$ pro $t\in[a,b]$. Vzhledem k poznámce 8.32 odtud plyne, že pro každé $t_0\in[a,b]$ je $U(\cdot,t_0)$ fundamentální matice rovnice (8.53) na $[a,b]$. Konečně, podle lemmatu 8.33 máme

$$\det U(t,s)\neq 0 \quad \text{pro všechna}\ \ t,s\in[a,b].$$

□

8.36 Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0\in[a,b]$, $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$, *nechť platí* (8.56) *a nechť maticová funkce* U *je určena větou* 8.35. *Potom* $x:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ *je řešení počáteční úlohy*

$$x(t)-\widetilde{x}-\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,x=0 \tag{8.59}$$

na intervalu $[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$x(t)=U(t,t_0)\,\widetilde{x} \quad \textit{pro}\ \ t\in[a,b]. \tag{8.60}$$

D ů k a z . a) Dosadíme-li (8.60) do $\displaystyle\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,x$ a využijeme-li (8.58), dostaneme

$$\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,A\,x=\int_{t_0}^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)\,\widetilde{x}=\big(U(t,t_0)-I\big)\,\widetilde{x}=x(t)-\widetilde{x}$$

pro $t\in[a,b]$, tj. funkce x definovaná vztahem (8.60) je řešení úlohy (8.59).

b) Obrácená implikace plyne z jednoznačnosti řešení počáteční úlohy (8.59) (viz větu 8.16). □

8.37 Definice. Nechť $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ a nechť platí (8.56). Potom maticovou funkci U určenou větou 8.35 nazýváme *Cauchyova matice* rovnice (8.53).

8.38 Důsledek. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, $t_0 \in [a,b]$ *a* $\widetilde{X} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. *Dále, předpokládejme, že platí* (8.56) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.53). *Potom maticová funkce* $X : [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ *splňuje rovnost*

$$X(t) = \widetilde{X} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\, A\, X \tag{8.61}$$

pro $t \in [a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když*

$$X(t) = U(t,t_0)\,\widetilde{X} \quad \textit{pro} \;\; t \in [a,b]. \tag{8.62}$$

D ů k a z . Pro každý sloupec x_k, $k = 1,2,\dots,n$, maticové funkce X platí podle věty 8.36

$$x_k(t) = U(t,t_0)\,\widetilde{x}_k \quad \text{pro} \;\; t \in [a,b],$$

kde $\widetilde{x}_k$ jsou sloupce matice $\widetilde{X}$. Odtud tvrzení okamžitě plyne. □

8.39 Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.56) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.53). *Potom vztahy*

$$U(t,r)\,U(r,s) = U(t,s), \tag{8.63}$$

$$(U(t,r))^{-1} = U(r,t) \tag{8.64}$$

platí pro libovolnou trojici bodů t,s,r *z intervalu* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Pro libovolná $t,s,r \in [a,b]$ máme podle (8.58)

$$\begin{aligned} U(t,s) &= I + \int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s) \\ &= I + \int_s^r \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s) + \int_r^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s) \\ &= U(r,s) + \int_r^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s). \end{aligned}$$

Podle důsledku 8.38 tedy platí (8.63).

b) Speciálně jestliže $t = s$, pak podle věty 8.35 dostáváme $U(t,r)\,U(r,t) = I$ pro každé $r \in [a,b]$. Vzhledem k větě 8.35 (iii) tedy platí (8.64). □

8.40 Poznámka. Je-li U Cauchyova matice pro (8.53), pak podle věty 8.39 platí

$$U(t,s) = U(t,a)\,U(a,s) = U(t,a)\,(U(s,a))^{-1} \quad \text{pro} \;\; t,s \in [a,b].$$

Označíme-li tedy $X(t) = U(t,a)$, bude platit $U(t,s) = X(t)\,(X(s))^{-1}$ pro $t,s \in [a,b]$. Připomeňme, že X je fundamentální matice rovnice (8.53).

Ve zbývající části tohoto odstavce uvedeme ještě několik dalších vlastností Cauchyovy matice rovnice (8.53).

8.41 Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.56) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.53). *Potom existuje* $M \in (0,\infty)$ *takové, že platí*

$$|U(t,s)| + \mathrm{var}_a^b\, U(\cdot,s) + \mathrm{var}_a^b\, U(t,\cdot) \le M \quad \textit{pro } t,s \in [a,b]. \tag{8.65}$$

D ů k a z. a) Pro $k = 1,2,\dots,n$ označme symbolem e_k k-tý sloupec jednotkové matice I. Potom $|e_k| = 1$ pro každé $k = 1,2,\dots,n$. Podle věty 8.21 máme

$$|u_k(t,s)| \le M_1 := c_A \,\exp\big(2\, c_A\, \mathrm{var}_a^b\, A\big) < \infty \text{ pro } t,s \in [a,b] \text{ a } k = 1,2,\dots,n,$$

kde díky předpokladu (8.56) můžeme položit

$$c_A := \max\Big\{1, \sup_{t\in(a,b]} \big|[I - \Delta^- A(t)]^{-1}\big|, \sup_{t\in[a,b)} \big|[I + \Delta^+ A(t)]^{-1}\big| \Big\}.$$

Tudíž

$$|U(t,s)| = \max_{k=1,2,\dots,n} |u_k(t,s)| \le M_1 \quad \text{pro } t,s \in [a,b]. \tag{8.66}$$

b) Nechť $t_1, t_2, s \in [a,b]$ a $t_1 \le t_2$. Potom

$$|u_k(t_2,s) - u_k(t_1,s)| = \Big|\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\, u_k(\tau,s)\Big| \le M_1\, \mathrm{var}_{t_1}^{t_2} A.$$

Pro libovolné $s \in [a,b]$, $k = 1,2,\dots,n$ a libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ tedy máme

$$V(u_k(\cdot,s),\boldsymbol{\sigma}) \le M_1 \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \mathrm{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A = M_1\, \mathrm{var}_a^b\, A =: M_2 < \infty,$$

a proto

$$\mathrm{var}_a^b\, U(\cdot,s) \le \max_{k=1,2,\dots,n} \mathrm{var}_a^b\, u_k(\cdot,s) \le M_2 \quad \text{pro } s \in [a,b]. \tag{8.67}$$

c) Nechť $s_1, s_2 \in [a,b]$ a $s_1 \le s_2$. Potom pro každé $t \in [a,b]$ máme

$$\begin{aligned} &u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1)\\ &\quad= \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\, u_k(\tau,s_2) - \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\, u_k(\tau,s_1) - \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\, u_k(\tau,s_1)\\ &\quad= -\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\, u_k(\tau,s_1) + \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\big(u_k(\tau,s_2) - u_k(\tau,s_1)\big). \end{aligned}$$

Funkce $x(t) = u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1)$ je tedy na $[a,b]$ řešením počáteční úlohy

$$x(t) = -\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]u_k(\tau,s_1) + \int_{s_2}^{t} \mathrm{d}\,A\,x.$$

Podle věty 8.36 pro každé $t\in[a,b]$ a $k=1,2,\ldots,n$ platí

$$u_k(t,s_2) - u_k(t,s_1) = -U(t,s_2)\Big(\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]u_k(\tau,s_1)\Big).$$

Tudíž $|u_k(t,s_2)-u_k(t,s_1)| \le M_1^2 \operatorname{var}_{s_1}^{s_2} A$ pro $k=1,2,\ldots,n$ a $t\in[a,b]$.

Pro libovolné $t\in[a,b]$, $k=1,2,\ldots,n$ a libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ platí

$$V(u_k(t,\cdot),\boldsymbol{\sigma}) \le M_1^2 \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \operatorname{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} A = M_1^2 \operatorname{var}_a^b A =: M_3 < \infty,$$

a proto

$$\operatorname{var}_a^b U(t,\cdot) \le \max_{k=1,2,\ldots,n} \operatorname{var}_a^b u_k(t,\cdot) \le M_3 \quad \text{pro } t\in[a,b]. \tag{8.68}$$

d) Podle (8.65)–(8.67) tvrzení věty platí pro $M = M_1 + M_2 + M_3$. □

8.42 Věta. *Nechť* $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.56) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.53). *Potom platí*

$$\left.\begin{aligned}
U(t+,s) &= \big[I+\Delta^+A(t)\big]\,U(t,s) && \textit{pro } t\in[a,b),\ s\in[a,b],\\
U(t-,s) &= \big[I-\Delta^-A(t)\big]\,U(t,s) && \textit{pro } t\in(a,b],\ s\in[a,b],\\
U(t,s+) &= U(t,s)\,\big[I+\Delta^+A(s)\big]^{-1} && \textit{pro } t\in[a,b],\ s\in[a,b),\\
U(t,s-) &= U(t,s)\,\big[I-\Delta^+A(s)\big]^{-1} && \textit{pro } t\in[a,b],\ s\in(a,b].
\end{aligned}\right\} \tag{8.69}$$

D ů k a z . Nejprve si všimněme, že podle předchozí věty mají funkce $U(\cdot,s)$ a $U(t,\cdot)$ konečné variace na $[a,b]$ pro libovolná $t,s\in[a,b]$. Všechny jednostranné limity objevující se ve vztazích (8.69) tedy mají smysl.

a) První dva vztahy odvodíme, jestliže do vztahů (8.13) z lemmatu 8.15 dosadíme postupně za x sloupce maticové funkce U.

b) Nechť $s\in[a,b)$ a $\delta\in(0,b-s)$. Potom podle (8.58) máme

$$\begin{aligned}
U(t,s+\delta) - U(t,s) &= \int_{s+\delta}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s+\delta) - \int_{s}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)\\
&= \int_{s+\delta}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,\big(U(\tau,s+\delta)-U(\tau,s)\big) - \int_{s}^{s+\delta} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)
\end{aligned}$$

pro každé $t \in [a,b]$. Maticová funkce $Y(t) = U(t, s+\delta) - U(t,s)$ tedy splňuje rovnost

$$Y(t) = \widetilde{Y} + \int_{s+\delta}^{t} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,Y(\tau) \quad \text{pro } t \in [a,b],$$

kde

$$\widetilde{Y} = -\int_{s}^{s+\delta} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau, s).$$

Podle důsledku 8.38 tudíž máme

$$\begin{aligned} U(t, s+\delta) - U(t,s) &= Y(t) = U(t, s+\delta)\,\widetilde{Y} \\ &= -U(t, s+\delta) \int_{s}^{s+\delta} \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau, s) \end{aligned}$$

pro $t \in [a,b]$. Limitním přechodem $\delta \to 0+$ při použití Hakeovy věty 6.52 odtud dostaneme

$$U(t, s+) - U(t,s) = -U(t, s+)\,\Delta^+ A(s)\,U(s,s) = -U(t,s+)\,\Delta^+ A(s)$$

neboli $U(t,s) = U(t,s+)\,\big[I + \Delta^+ A(s)\big]$. Odtud okamžitě plyne platnost třetího vztahu z (8.69). Zbývající rovnost bychom dokázali analogicky. □

Pro funkce dvou proměnných je možno definovat pojem variace několika různými způsoby. Pro nás je zajímavá definice Vitaliova.

8.43 Definice. Nechť $F : [a,b] \times [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Pro daná dělení $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}$ intervalu $[a,b]$, $j = 1, 2, \ldots, \nu(\boldsymbol{\sigma})$ a $k = 1, 2, \ldots, \nu(\boldsymbol{\rho})$ položme

$$\Delta_{j,k}(F, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}) = F(\sigma_j, \rho_k) - F(\sigma_{j-1}, \rho_k) - F(\sigma_j, \rho_{k-1}) + F(\sigma_{j-1}, \rho_{k-1}).$$

Potom veličina

$$v(F) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho} \in \mathscr{D}[a,b]} \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \sum_{k=1}^{\nu(\boldsymbol{\rho})} \big|\Delta_{j,k}(F, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho})\big|$$

se nazývá *Vitaliova variace* funkce F na intervalu $[a,b] \times [a,b]$.

8.44 Věta. *Nechť* $A \in \mathbb{BV}([a,b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$, *nechť platí* (8.56) *a nechť* U *je Cauchyova matice rovnice* (8.53). *Potom* $v(U) < \infty$.

D ů k a z . Mějme dvě libovolná dělení $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho}$ intervalu $[a,b]$. Podle věty 8.39 (viz též poznámku 8.40) je

$$U(t,s) = U(t,a)\,U(a,s) \quad \text{pro } t, s \in [a,b].$$

Pro libovolná $j = 1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\sigma})$ a $k = 1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\rho})$ tedy máme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \sum_{k=1}^{\nu(\boldsymbol{\rho})} \left|\Delta_{j,k}(U, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho})\right| \\ &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \sum_{k=1}^{\nu(\boldsymbol{\rho})} \left|\left[U(\sigma_j, a) - U(\sigma_{j-1}, a)\right] \left[U(a, \rho_k) - U(a, \rho_{k-1})\right]\right| \\ &\le \operatorname{var}_a^b U(\cdot, a) \operatorname{var}_a^b U(a, \cdot)| \le M^2,\end{aligned}$$

kde $M < \infty$ bylo určeno ve větě 8.41. □

8.8 Nehomogenní rovnice

Vraťme se nyní k nehomogenní počáteční úloze

$$x(t) - \widetilde{x} - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\, A\, x = f(t) - f(t_0). \tag{8.14}$$

Budeme předpokládat, že $A \in \mathbb{BV}([a, b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ splňuje (8.56). Pro libovolná $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ a $f \in \mathbb{G}([a, b], \mathbb{R}^n)$ existuje podle věty 8.24 jediné řešení x počáteční úlohy (8.14) a toto řešení je regulované na $[a, b]$.

Následující věta ukazuje, že toto řešení je možno vyjádřit ve tvaru připomínajícím formuli *variace konstant* známou z teorie obyčejných diferenciálních rovnic.

8.45 Věta. *Nechť $t_0 \in [a, b]$, $A \in \mathbb{BV}([a, b], \mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ splňuje* (8.56) *a nechť U je Cauchyova matice rovnice* (8.53). *Potom úloha* (8.14) *má pro každá $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$ a $f \in \mathbb{G}([a, b], \mathbb{R}^n)$ jediné řešení x na $[a, b]$. Toto řešení je dáno formulí*

$$\left.\begin{aligned} x(t) = U(t, t_0)\, \widetilde{x} + f(t) - f(t_0) - \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}_s[U(t, s)]\, \big(f(s) - f(t_0)\big) \\ \textit{pro}\ \ t \in [a, b]. \end{aligned}\right\} \tag{8.70}$$

Je zřejmé, že pro podrobný důkaz je nutné něco vědět o integrálních operátorech typu

$$\mathscr{K}\colon x \in \mathbb{G}([a, b], \mathbb{R}^n) \to y(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}_s[K(t, s)]\, x(s), \tag{8.71}$$

kde funkce K má stejné vlastnosti jako Cauchyova matice U příslušné homogenní rovnice a symbol d_s naznačuje, že integrujeme funkce proměnné s, zatímco t je zde parametr. Vzhledem k vlastnostem funkce U popsaným v předešlém odstavci je vidět, že pro každou funkci $x \in \mathbb{G}([a, b], \mathbb{R}^n)$ je její obraz $y = \mathscr{K}\, x$ dobře definován na celém intervalu $[a, b]$. (Jde vždy o integraci funkce regulované vzhledem k funkci s konečnou variací.) Bohužel, vlastnosti operátorů tvaru (8.71) nejsou už tak na první pohled zřejmé. Navíc, abychom dokázali, že funkce x je řešením úlohy (8.14), potřebujeme umět zaměnit pořadí integrace ve dvojném integrálu

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,\Big(\int_{t_0}^{\tau} \mathrm{d}_s\,[U(\tau,s)\,]\,\big(f(s)-f(t_0)\big)\Big)$$

tak, aby bylo možno využít vztah (8.58) definující funkci $U.$ K tomu je nutné mít k dispozici aparát umožňující zacházení s dvojnými integrály. Ten se opírá též o pojem variace funkcí dvou proměnných zavedený v definici 8.43. Toto vše se v potřebném rozsahu už do tohoto textu nevejde. Nebudeme zde tedy provádět podrobné důkazy a jenom se pokusíme aspoň přiblížit jejich hlavní myšlenky. Většinou není obtížné doplnit vynechané detaily na základě znalosti postupů z předešlých kapitol. Podrobnosti týkající se variace funkcí dvou proměnných a integrálních operátorů určených takovýmito funkcemi lze najít zejména v kapitole III monografie [12] a v odstavci I.6 a kapitole II monografie [58]. Formule variace konstant pro $f\in\mathbb{BV}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je dokázána v [58, III.2] nebo v [48, Theorem 6.17], zatímco v [62, Proposition 4.4.3] je dokázána pro f regulovanou.

Omezíme se nyní na případ $t_0=a,$ tj. hledáme řešení úlohy (8.39). Důkaz je rozdělen na čtyři kroky:

Nejprve definujeme

$$K(t,s)=\begin{cases} U(t,s) \text{ když } a\le s\le t\le b,\\ U(t,t) \text{ když } a\le t< s\le b.\end{cases}$$

Zřejmě je

$$\operatorname{var}_a^b K(t,\cdot\,)\le \operatorname{var}_a^t U(t,\cdot\,) \quad\text{a}\quad \operatorname{var}_a^b K(\cdot,s)\le \operatorname{var}_s^b U(\cdot,s) \quad \text{pro libovolná } t,s\in[a,b].$$

Lze také dokázat, že je $v(K)<\infty$ (viz [58, Lemma III.2.7]). Existuje tedy konstanta $\varkappa\in(0,\infty)$ taková, že

$$v(K)+\operatorname{var}_a^b K(t,\cdot\,)+\operatorname{var}_a^b K(\cdot,s)\le\varkappa<\infty \quad \text{pro } t,s\in[a,b].$$

Dále pro každé $x\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je funkce

$$y: t\in[a,b]\to\int_a^b \mathrm{d}_s[K(t,s)\,]\,x(s) \tag{8.72}$$

dobře definována na $[a,b],$ přičemž

$$\int_a^c \mathrm{d}_s\,[K(t,s)\,]\,x(s)=\int_a^t \mathrm{d}_s[U(t,s)\,]\,x(s) \quad \text{pro každé } t\in[a,b] \text{ a } c\in[t,b].$$

Podle [58, Theorem I.6.18] je $\operatorname{var}_a^b y\le v(K)\,\|x\|<\infty.$

Druhý krok spočívá v důkazu, že platí

$$y(t+) = \int_a^b \mathrm{d}_s \,[K(t+,s)\,]\,x(s) \quad \text{když } \; t \in [a,b), \tag{8.73}$$

$$y(t-) = \int_a^b \mathrm{d}_s \,[K(t-,s)\,]\,x(s) \quad \text{když } \; t \in (a,b\,]. \tag{8.74}$$

Podle [58, Lemma I.6.14] mají všechny funkce

$$K(t+,\cdot\,) \;\text{ a }\; K(s-,\cdot\,),\;\; t \in [a,b),\; s \in (a,b\,],$$

konečnou variaci na $[a,b]$, a tudíž jsou integrály na pravých stranách v (8.73) dobře definovány. Protože x je na $[a,b]$ stejnoměrná limita jednoduchých skokových funkcí, stačí dokázat, že rovnosti (8.73) platí pro každou funkci typu

$$\chi_{[a,\tau]},\, \chi_{[\tau,b\,]}, \quad \tau \in [a,b\,]. \tag{8.75}$$

Je-li například $x = \chi_{[a,\tau]}$, kde $\tau \in [a,b\,]$, pak pro každé $t \in [a,b\,]$ dostaneme (viz (6.28)) $y(t) = K(t,\tau+) - K(t,a)$, a tudíž

$$y(t+) = K(t+,\tau+) - K(t+,a) \quad \text{když } \; t \in [a,b)$$

a

$$y(t-) = K(t-,\tau+) - K(t-,a) \quad \text{když } \; t \in (a,b\,].$$

Na druhou stranu, máme

$$\int_a^b \mathrm{d}_s \,[K(t+,s)]\chi_{[a,\tau]} = K(t+,\tau+) - K(t+,a) \quad \text{když } \; t \in [a,b)$$

a

$$\int_a^b \mathrm{d}_s \,[K(t-,s)]\chi_{[a,\tau]} = K(t-,\tau+) - K(t-,a) \quad \text{když } \; t \in (a,b\,],$$

tj. platí (8.73) pro $x = \chi_{[a,\tau]}$. Podobně bychom ověřili platnost relací (8.73) pro funkce tvaru $x = \chi_{[\tau,b\,]}, \tau \in [a,b\,]$, a tedy i pro každou funkci $x \in \mathbb{G}([a,b\,],\mathbb{R}^n)$.

Vidíme tedy, že funkce $x(t)$ definovaná formulí (8.70) je regulovaná na $[a,b]$ pro každou funkci $f \in \mathbb{G}([a,b\,],\mathbb{R}^n)$ a každý vektor $\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n$.

Třetím krokem je důkaz, že za našich předpokladů je pro každé $t \in [a,b]$ a každou funkci $f \in \mathbb{G}([a,b\,],\mathbb{R}^n)$ pravdivá relace Fubiniova typu

$$\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\left(\int_a^t \mathrm{d}_s\,[K(\tau,s)\,]\,\big(f(s)-f(a)\big)\right) \\ = \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,K(\tau,s)\right]\,\big(f(s)-f(a)\big).$$

V důkazu tohoto kroku se opět využije stejnoměrná aproximace regulovaných funkcí jednoduchými skokovými funkcemi, vzorce z příkladů 6.22 a konvergenční vlastnosti KS–integrálu. Navíc je ovšem nutno také použít vlastnosti operátorů tvaru

$$f \in \mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n) \to \int_a^b K(\cdot,s)\,\mathrm{d}\,[f(s)\,].$$

Na závěr dosadíme (8.70), tj.

$$x(t) = U(t,a)\,\widetilde{x} + f(t) - f(a) - \int_a^t \mathrm{d}_s[K(t,s)\,]\,\big(f(s)-f(a)\big),$$

do integrálu $\displaystyle\int_a^t \mathrm{d}\,A\,x$ a, vzhledem k definici funkce $K,$ dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_a^t \mathrm{d}\,A\,x = {} & \int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\,U(\tau,a)\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}\,[A(s)\,]\,(f(s)-f(a)) \\
& \qquad - \int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\left(\int_a^\tau \mathrm{d}_s\,[U(\tau,s)]\,(f(s)-f(a))\right) \\
= {} & [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[\,A(s)]\,(f(s)-f(a)) \\
& \qquad - \int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)\,]\left(\int_a^t \mathrm{d}_s\,[K(\tau,s)]\,(f(s)-f(a))\right) \\
= {} & [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[\,A(s)]\,(f(s)-f(a)) \\
& \quad - \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_a^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,K(\tau,s)\right]\,(f(s)-f(a)) \\
= {} & [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[\,A(s)]\,(f(s)-f(a)) \\
& \quad - \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_a^s \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,\tau)\right](f(s)-f(a)) \\
& \quad - \int_a^t \mathrm{d}_s\left[\int_s^t \mathrm{d}\,[A(\tau)]\,U(\tau,s)\right](f(s)-f(a)) \\
= {} & [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} + \int_a^t \mathrm{d}[\,A(s)](f(s)-f(a)) \\
& \quad - \int_a^t \mathrm{d}\,[A(s)\,]\,(f(s)-f(a)) - \int_a^t \mathrm{d}_s\,[U(t,s)-I]\,(f(s)-f(a)) \\
= {} & [U(t,a)-I]\,\widetilde{x} - \int_a^t \mathrm{d}_s[U(t,s)\,]\,(f(s)-f(a)) \\
= {} & x(t) - \widetilde{x} - f(t) + f(a).
\end{aligned}$$

Funkce x je tedy řešení úlohy (8.39) na $[a,b]$. Tímto je důkaz věty 8.45 dokončen.

Jestliže je funkce A spojitá zleva na intervalu $(a,b]$ a $t_0=a$, pak je možno vzorec (8.70) poněkud zjednodušit, definujeme-li $X(t)=U(t,a)$ pro $t\in[a,b]$ a

$$Y(s)=\begin{cases} U(a,s+), & \text{když } a\le s<b,\\ U(a,b), & \text{když } s=b.\end{cases} \tag{8.76}$$

8.46 Důsledek. *Nechť $t_0=a$ a $A\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{R}^n))$ je zleva spojitá na $(a,b]$ a platí $\det[I+\Delta^+A(t)]\neq 0$ pro $t\in[a,b)$. Nechť U je Cauchyova matice rovnice* (8.53)*,*

$$X(t)=U(t,a)\quad \textit{pro}\ \ t\in[a,b]$$

a Y je definovaná předpisem (8.76)*.*

Potom rovnice (8.39) *má pro každé $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$ a každou funkci $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ zleva spojitou na $(a,b]$ jediné řešení x na $[a,b]$. Toto řešení je dáno formulí*

$$x(t)=X(t)\,\widetilde{x}+X(t)\left(\int_a^t Y\,\mathrm{d}f\right)\quad \textit{pro}\ \ t\in[a,b]. \tag{8.77}$$

D ů k a z. Nechť $\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n$ a nechť $f\in\mathbb{G}([a,b],\mathbb{R}^n)$ je zleva spojitá na $(a,b]$. Podle věty 8.45 má rovnice (8.39) jediné řešení x na $[a,b]$. Formuli (8.70) můžeme přepsat ve tvaru

$$x(t)=X(t)\,\widetilde{x}+\big(f(t)-f(a)\big)-X(t)\left(\int_a^t \mathrm{d}\,[X^{-1}(s)]\,\big(f(s)-f(a)\big)\right),$$

kde $X^{-1}(s)=U(a,s)$ pro $s\in[a,b]$. Vzhledem k definici (8.76) máme

$$X^{-1}(s)=Y(s)-\Delta^+X^{-1}(s)\quad \text{pro}\ \ s\in[a,b).$$

Podle lemmatu 6.44 je tedy pro každé $t\in[a,b]$

$$\begin{aligned}&\int_a^t \mathrm{d}\,[X^{-1}(s)]\,\big(f(s)-f(a)\big)\\ &\quad=\int_a^t \mathrm{d}\,[Y(s)]\,\big(f(s)-f(a)\big)-\Delta^+X^{-1}(t)\,\big(f(t)-f(a)\big).\end{aligned}$$

Protože f je zleva spojitá na $(a,b]$ a Y je zprava spojitá na $[a,b)$, integrací per-partes (věta 6.46) dostaneme pro každé $t\in[a,b]$

$$\begin{aligned}x(t)&=X(t)\,\widetilde{x}+\big(f(t)-f(a)\big)-X(t)\left(\int_a^t \mathrm{d}\,[X^{-1}(s)]\,\big(f(s)-f(a)\big)\right)\\ &=X(t)\,\widetilde{x}-\big(f(t)-f(a)\big)+X(t)\int_a^t Y\,\mathrm{d}f\\ &\qquad+X(t)\,\Delta^+X^{-1}(t)\,\big(f(t)-f(a)\big)-X(t)\,Y(t)\,\big(f(t)-f(a)\big).\end{aligned}$$

Konečně, protože pro každé $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} & X(t)\,\Delta^+ X^{-1}(t)\,\big(f(t)-f(a)\big) - X(t)\,Y(t)\,\big(f(t)-f(a)\big) \\ & \quad = X(t)\,\big(X^{-1}(t+) - X^{-1}(t)\,\big(f(t)-f(a)\big) - X(t)\,X^{-1}(t+)\,\big(f(t)-f(a)\big) \\ & \quad = -\big(f(t)-f(a)\big), \end{aligned}$$

dostáváme konečně (8.77). □

Díky větě 8.45, resp. jejímu důsledku 8.46 je již možné s úspěchem vyšetřovat například okrajové úlohy, ve kterých se hledá funkce, která splňuje na intervalu $[a,b]$ rovnici (8.59) a navíc i nějaké dodatečné podmínky, například dvoubodové podmínky

$$M\,x(a) + N\,x(b) = 0,$$

kde $M, N \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. To je ale už jiný příběh, který se do tohoto textu, stejně jako řada dalších témat, jako jsou souvislosti s funkcionálně-diferenciálními rovnicemi, dynamickými systémy na tzv. časových škálách (*time scales*), aplikace na úlohy s impulsy a další, už opravdu nevejde. Jako doplňkovou literaturu k této kapitole lze doporučit například monografie [13], [28], [48], [62] nebo články [1], [8], [41], [54], [55].

Literatura

[1] S. Afonso, E. M. Bonotto, M. Federson and Š. Schwabik. Discontinuous local semiflows for Kurzweil equations leading to LaSalle's invariance principle for non-autonomous systems with impulses. *J. Differential Equations* **250** (2011) 2969–3001.

[2] M. Brokate, P. Krejčí. Duality in the space of regulated functions and the play operator. *Mathematische Zeitschrift* **245** (2003) 667–688.

[3] M. Dimian, P. Krejčí, H. Lamba, S. Melnik, D. Rachinskii. Explicit solution of a market model with interacting agents: Drawdowns, drawups, financial bubbles, and stochastic resonance. In preparation.

[4] P. Drábek, A. Kufner. *Úvod do funkcionální analýzy*. (Učební text, ZČU Plzeň, 1993) [http://www.kma.zcu.cz/0000_DATA/eBOOKs/Drabek/UFA.pdf].

[5] Dudley R.M., Norvaiša R. *Concrete Functional Calculus*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2011.

[6] N. Dunford, J.T. Schwartz. *Linear Operators* I, II. Interscience Publishers, New York & London, 1958 a 1963.

[7] D. Fraňková. Regulated functions. *Mathematica Bohemica* **116** (1991) 20–59.

[8] Z. Halas, G. Monteiro and M. Tvrdý. Emphatic convergence and sequential solutions of generalized linear differential equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys.* 54 (2011), 27–49.

[9] I. Halperin. *Introduction to the Theory of Distributions*. University of Toronto Press, Toronto, 1952.

[10] R. Henstock. *Lectures on the Theory of Integration*. World Scientific, Singapore, 1988.

[11] T. H. Hildebrandt. On integrals related to and extensions of the Lebesgue integrals. *Bull. Amer. Math. Soc.* (2) **24** (1917) 113–144, (1918) 177–202.

[12] T. H. Hildebrandt. *Theory of Integration*. Academic Press, New York & London, 1963.

[13] Ch. S. Hönig. *Volterra Stieltjes-Integral Equations*. North Holland & American Elsevier, Mathematics Studies 16, Amsterdam & New York, 1975.

[14] CH. S. HÖNIG Volterra-Stieltjes integral equations. In: *Functional Differential Equations and Bifurcation, Proceedings of the Saõ Carlos Conference 1979* (Lecture Notes in Mathematics 799, Springer-Verlag, Berlin, 1980), pp. 173–216.

[15] V. JARNÍK. *Diferenciální počet* II. Academia, Praha, 1976. [http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/402004].

[16] V. JARNÍK. *Integrální počet* II. Academia, Praha, 1976. [http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/402027].

[17] A.N. KOLMOGOROV, S.V. FOMIN. *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*. SNTL, Praha, 1975.

[18] J. KRÁL. *Teorie potenciálu*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1965.

[19] P. KREJČÍ. The Kurzweil integral with exclusion of negligible sets. Mathematica Bohemica **128** (2003) 277-292.

[20] P. KREJČÍ. The Kurzweil integral and hysteresis. In: *Proceedings of the International Workshop on Multi-Rate Processes and Hysteresis* (Cork, 3.4.2006–8.4.2006, eds: M. Mortell, R. O'Malley, A. Pokrovskii, V.Sobolev). *Journal of Physics: Conference Series* **55**, (2006) 144–154.

[21] P. KREJČÍ, J KURZWEIL. A nonexistence result for the Kurzweil integral. *Mathematica Bohemica* **127** (2002) 571–580.

[22] P. KREJČÍ, PH. LAURENÇOT. Generalized variational inequalities. *Journal of Convex Analysis* **9** (2002), 159-–183.

[23] P. KREJČÍ, M. LIERO. Rate independent Kurzweil processes. *Applications of Mathematics* **54** (2009) 117–145.

[24] J. KURZWEIL. *Obyčejné diferenciální rovnice. (Úvod do teorie obyčejných diferenciálních rovnic v reálném oboru.)* SNTL, Praha, 1978. *Czechoslovak Mathematical Journal* **8(83)** (1958), 360–387.

[25] J. KURZWEIL. *Nichtabsolut konvergente Integrale.* Teubner-Verlag, Leipzig, 1980.

[26] J. KURZWEIL. *Henstock-Kurzweil Integration : Its Relation to Topological Vector Spaces.* World Scientific, Singapore, 2000.

[27] J. KURZWEIL. *Integration Between the Lebesgue Integral and the Henstock-Kurzweil Integral: Its Relation to Local Convex Vector Spaces.* World Scientific, Singapore, 2002.

[28] J. KURZWEIL. Generalized ordinary differential equations (Not Absolutely Continuous Solutions). Series in Real Analysis–Vol. 11, World Scientific, Singapore, 2012.

[29] J. KURZWEIL. Generalized ordinary differential equation and continuous dependence on a parameter. *Czechoslovak Mathematical Journal* **7(82)** (1957), 418–449.

[30] J. KURZWEIL. Generalized ordinary differential equations. *Czechoslovak Mathematical Journal* **8(83)** (1958) 360–387.

[31] H. LEBESGUE. Sur l'intégrale de Stieltjes et sur les opérations functionnelles linéaires. *Comptes Rendus* **150** (1910), 86–88.

[32] J. W. LEWIN. A Truly Elementary Approach to the Bounded Convergence Theorem. *Amer. Math. Monthly* **93** (1986), 395–397.

[33] J. LUKEŠ. *Teorie míry a integral*. Státní ped. nakladatelství, Praha, 1972.

[34] J. LUKEŠ. *Úvod do funkcionální analýzy*. Karolinum, Univerzita Karlova v Praze, 2011.

[35] J. LUKEŠ, J. MALÝ. *Measure and Integral*. matfyzpress, Praha, 1995 [http://www.mff.cuni.cz/to.en/fakulta/mfp/download/books/lukes-maly_-_measure_and_integral.pdf].

[36] R. M. MCLEOD. *The generalized Riemann integral*. Carus Monograph, No.2, Mathematical Association of America, Washington, 1980.

[37] J. MAŘÍK. Základy theorie integral v Euklidových prostorech I–III. *Časopis pro pěstování matematiky* **77** (1952) (1) 1–51, (2) 125–145, (3) 267–301.

[38] J. MAWHIN. L'eternal retour des sommes de Riemann-Stieltjes dans l'evolution du calcul intégral. *Bulletin de la Soc. Royale des Sciences de Liège* **70** (2001) (4-5-6) 345–364.

[39] G. A. MONTEIRO, U. M. HANUNG, M. TVRDÝ. Bounded convergence theorem for abstract Kurzweil–Stieltjes integral. *Monatshefte für Mathematik*, to appear, DOI: 10.1007/s00605-015-0774-z.

[40] G. A. MONTEIRO, M. TVRDÝ. On Kurzweil-Stieltjes integral in Banach space, *Mathematica Bohemica* **137** (2012), 365–381.

[41] G. A. MONTEIRO, M. TVRDÝ. Generalized linear differential equations in a Banach space: Continuous dependence on a parameter. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **33** (2013) 283–303.

[42] O. PERRON. *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Teubner, Leipzig, 1913.

[43] F. RIESZ. Sur les opérations functionelles linéaires. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **149** (1909), 974–977.

[44] W. RUDIN. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, New York, 1973.

[45] S. SAKS. *Théorie de l'Intégrale*. Monografie Matematyczne, Warszawa, Lwów, 1933. Anglický překlad: *Theory of the Integral*. Monografie Matematyczne, Warszawa, Lwów, 1937.

[46] E. SCHECHTER. *Handbook of Analysis and its Foundations*. Academic Press, San Diego, 1997.

[47] M. SCHECHTER. *Principles of Functional Analysis*. Academic Press, New York & London, 1973.

[48] Š. SCHWABIK. *Generalized Ordinary Differential Equations*. Series in Real Analysis–Vol. 5, World Scientific, Singapore, 1992.

[49] Š. SCHWABIK. *Integrace v* $\mathbb{R}$ *(Kurzweilova teorie)*. Karolinum, Univerzita Karlova v Praze, 1999.

[50] Š. SCHWABIK. Verallgemeinerte lineare Differentialgleichungssysteme. *Časopis pro pěstování matematiky* **96** (1971) 183–211.

[51] Š. SCHWABIK. On the relation between Young's and Kurzweil's concept of Stieltjes integral. *Časopis pro pěstování matematiky* **98** (1973) 237–251.

[52] Š. SCHWABIK. On a modified sum integral of Stieltjes type. *Časopis pro pěstování matematiky* **98** (1973) 274–277.

[53] Š. SCHWABIK. Abstract Perron-Stieltjes integral. *Mathematica Bohemica* **121** (1996), 425–447.

[54] Š. SCHWABIK. Linear Stieltjes integral equations in Banach spaces. *Mathematica Bohemica* **124** (1999), 433–457.

[55] Š. SCHWABIK. Linear Stieltjes integral equations in Banach spaces II: operator valued solutions. *Mathematica Bohemica* **125** 2000, 431–454.

[56] Š. SCHWABIK. A note on integration by parts for abstract Perron-Stieltjes integrals, *Mathematica Bohemica* **126** 2001, 613–629.

[57] Š. SCHWABIK, P. ŠARMANOVÁ. *Malý průvodce historií integral*. Prometheus, Praha, 1996 [http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400862].

[58] Š. SCHWABIK, M. TVRDÝ, O. VEJVODA. *Differential and Integral Equations: Boundary Value Problems and Adjoint.* Academia and Reidel. Praha and Dordrecht, 1979 [http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/400391].

[59] A. SLAVÍK. Dynamic equations on time scales and generalized ordinary differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* **385** (2011), 534–550.

[60] T. J. STIELTJES. *Recherches sur les fractions continues*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. **8** (1894), J1–122, **9** (1895) A1–47. Přetištěno v *Oeuvres II* (P. Noordhoff, Groningen, 1918), 402–566.
Anglický překlad: *Investigations on continued fractions*. In: T. J. Stieltjes, *Collected Papers* Vol. II (Springer-Verlag, Berlin, 1993), 609–745.

[61] A. E. TAYLOR. *Úvod do funkcionální analýzy.* Academia, Praha, 1973.

[62] M. TVRDÝ. *Differential and Integral Equations in the Space of Regulated Functions.* Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics vol.25 (2002), pp. 1–104.

[63] M. TVRDÝ. *Stieltjesův integrál. Kurzweilova teorie.* Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2012.

[64] C. J. DE LA VALLÉE POUSSIN. *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'Ensemble. Classes de Baire.* Paris, 1916.

[65] E. B. VAN VLECK. Haskin's momental theorem and its connection with Stieltjes's problem of moments. *Trans. Amer. Math. Soc* **18** (1917), 326–330.

[66] A. J. WARD. The Perron-Stieltjes integral. *Mathematische Zeitschrift* **41** (1936), 578–604.

[67] L. C. YOUNG. *The Theory of Integration*. Cambridge, 1927.

[68] L. C. YOUNG. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Mathematica* **67** (1936), 251–282.

[69] W. H. YOUNG. Integration with respect to a function of bounded variation. *Proc. London Math. Soc.* (2) **13** (1914), 109–150.