Primární metoda vnitřních bodů pro zobecněné minimaxové funkce

Definice 1 *Řekneme, že* $F : R^n \to R$ *je zobecněnou minimaxovou funkcí, jestliže*

$$F(x) = h(F_1(x), \ldots, F_m(x)), \quad F_i(x) = \max_{1 \le j \le n_i} f_{ij}(x), \quad 1 \le i \le m,$$

kde $h : R^m \to R$ *and* $f_{ij} : R^n \to R$*,* $1 \le i \le m$*,* $1 \le j \le n_i$*, jsou hladké funkce splńující tyto předpoklady.*

Předpoklad 1. Funkce $F_i(x)$, $1 \le i \le m$, jsou zdola ohraničené na R^n: existují čísla $\underline{F}_i \in R$ taková, že $F_i(x) \ge \underline{F}_i$, $1 \le i \le m$, pro všechna $x \in R^n$.

Předpoklad 2. Funkce $h(z)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná, konvexní a platí

$$\partial h(z)/\partial z_i \geq \underline{h}_i > 0, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{1}$$

pro všechna $z \in Z = \{z \in R^m : z_i \geq \underline{F}_i,\ 1 \leq i \leq m\}$ (vektor $z \in R^m$ nazveme minimaxovým vektorem).

Předpoklad 3. Funkce $f_{ij}(x)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$, jsou dvakrát spojitě diferencovatelné na konvexním obalu množiny

$$\mathcal{L}(\overline{F}) = \{x \in R^n : F_i(x) \leq \overline{F},\ 1 \leq i \leq m\}$$

pro dostatečně velkou horní mez $\overline{F}$ a mají omezené první a druhé derivace na conv $\mathcal{L}(\overline{F})$: existují čísla $\overline{g}$ a $\overline{G}$ taková, že $\|\nabla f_{ij}(x)\| \leq \overline{g}$, $\|\nabla^2 f_{ij}(x)\| \leq \overline{G}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$, pro všechna $x \in$ conv$\mathcal{L}(\overline{F})$.

Minimalizace funkce $F(x)$ je ekvivalentní úloze nelineárního programování: minimalizovat funkci

$$h(z_1, \dots, z_m)$$

s omezeními

$$f_{ij}(x) \leq z_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n_i$$

(podmínky $\partial h(z)/\partial z_i \geq \underline{h}_i > 0$, $1 \leq i \leq m$, pro $z \in Z$ postačují k tomu, aby platilo $z_i = F_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, v bodě minima). Nutné a postačující (KKT) podmínky pro řešení této úlohy mají tvar

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij} \nabla f_{ij}(x) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij} = \frac{\partial h(z)}{\partial z_i},$$

$$u_{ij} \geq 0, \quad z_i - f_{ij}(x) \geq 0, \quad u_{ij}(z_i - f_{ij}(x)) = 0, \quad 1 \leq j \leq n_i,$$

kde u_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$, jsou Lagrangeovy multiplikátory.

Úlohu nelineárního programování můžeme řešit primární metodou vnitřních bodů. V tomto případě aplikujene minimalizační Newtonovu metodu na posloupnost barierových funkcí

$$B_\mu(x,z) = h(z) + \mu \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi(z_i - f_{ij}(x)),$$

přičemž $0 < \mu \le \overline{\mu}$ a $\mu \to 0$, kde $\varphi : (0,\infty) \to R$ je bariéra splňující tyto podmínky.

Podmínka 1. $\varphi(t)$, $t \in (0,\infty)$, je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce taková, že $\varphi(t)$ je klesající, ryze konvexní, $\lim_{t\to 0} \varphi(t) = \infty$ a $\varphi'(t)$ je rostoucí, ryze konkávní, $\lim_{t\to\infty} \varphi'(t) = 0$. Součin $t\varphi'(t)$ je omezený.

Podmínka 2. $\varphi(t)$, $t \in (0,\infty)$, je zdola ohraničená: existuje číslo $\underline{\varphi} \le 0$ takové, že $\varphi(t) \ge \underline{\varphi}$ pro všechna $t \in (0,\infty)$.

Nejčastěji se používaná logaritmická bariéra $\varphi(t) = \log t^{-1} = -\log t$ splňuje Podmínku 1, ale nesplňuje Podmínku 2, neboť $\log t \to \infty$ pro $t \to \infty$. Z tohoto důvodu byly navrženy další bariéry, například

$$\varphi(t) = \log(t^{-1} + 1), \qquad t \in (0, \infty),$$

která je kladná ($\underline{\varphi} = 0$), nebo

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= -\log t, && 0 < t \leq 1, \\ \varphi(t) &= -(t^{-1} - 4\,t^{-1/2} + 3), && t > 1, \end{aligned}$$

která je zdola omezená ($\underline{\varphi} = -3$). Obě tyto bariéry splňují Podmínku 1 i Podmínku 2.

Iterační určování minimaxového vektoru

Nutné KKT podmínky pro extrém bariérové funkce mají tvar

$$\nabla_x B_\mu(x,z) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}(x)\varphi'(z_i - f_{ij}(x)) = 0$$

a

$$\frac{\partial B_\mu(x,z)}{\partial z_i} = h_i(z) + \sum_{j=1}^{n_i} \varphi'(z_i - f_{ij}(x)) = 0, \quad 1 \le i \le m,$$

kde $h_i(z) = \partial h(z)/\partial z_i$, $1 \le i \le m$. K řešení této soustavy $n+m$ rovnic použijeme Newtonovu metodu, jejíž iterační krok lze zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} W(x,z) & -A_1(x)v_1(x,z) & \dots & -A_m(x)v_m(x,z) \\ -v_1^T(x,z)A_1^T(x) & h_{11}(z)+e_1^Tv_1(x,z) & \dots & h_{1m}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -v_m^T(x,z)A_m^T(x) & h_{m1}(z) & \dots & h_{mm}(z)+e_m^Tv_m(x,z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z_1 \\ \dots \\ \Delta z_m \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m A_i(x)u_i(x,z) \\ h_1(z) - e_1^T u_1(x,z) \\ \dots \\ h_m(z) - e_m^T u_m(x,z) \end{bmatrix},$$

kde

$$W(x,z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} G_{ij}(x)u_{ij}(x,z) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij}(x)v_{ij}(x,z)A_{ij}^T(x),$$

$$u_{ij}(x,z) = -\mu\varphi'(z_i - f_{ij}(x)), \quad v_{ij}(x,z) = \mu\varphi''(z_i - f_{ij}(x)),$$

$$h_{ij}(z) = \frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_i \partial z_j}, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n_i$$

a kde $A_i(x) = [A_{i1}(x), \dots, A_{in_i}(x)]$,

$$u_i(x,z) = \begin{bmatrix} u_{i1}(x,z) \\ \dots \\ u_{in_i}(x,z) \end{bmatrix}, \quad v_i(x,z) = \begin{bmatrix} v_{i1}(x,z) \\ \dots \\ v_{in_i}(x,z) \end{bmatrix}, \quad e_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Můžeme se o tom přesvědčit derivováním KKT podmínek podle vektorů x a z.

Položíme-li ještě

$$C(x,z) = [A_1(x)v_1(x,z), \dots, A_m(x)v_m(x,z)],$$

$$g(x,z) = \sum_{i=1}^{m} A_i(x)u_i(x,z),$$

$$\Delta z = \begin{bmatrix} \Delta z_1 \\ \dots \\ \Delta z_m \end{bmatrix}, \quad c(x,z) = \begin{bmatrix} h_1(z) - e_1^T u_1(x,z) \\ \dots \\ h_m(z) - e_m^T u_m(x,z) \end{bmatrix},$$

$$H(z) = \nabla^2 h(z), \quad V(x,z) = \mathrm{diag}(e_1^T v_1(x,z), \dots, e_m^T v_m(x,z)),$$

můžeme Newtonovu soustavu zapsat ve tvaru

$$\begin{bmatrix} W(x,z) & -C(x,z) \\ -C^T(x,z) & H(z) + V(x,z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} g(x,z) \\ c(x,z) \end{bmatrix}.$$

Budeme předpokládat, že úloha je rozsáhlá (počet proměnných n je velký) a rozložitelná (funkce $f_{ij}(x)$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n_i$, závisejí na malém počtu proměnných). Budeme vyšetřovat dva případy. Je-li m malé (u minimaxových úloh je $m = 1$), využijeme toho, že

$$\begin{bmatrix} W & -C \\ -C^T & H+V \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} W^{-1} - W^{-1}C(C^TW^{-1}C - H - V)^{-1}C^TW^{-1} & -W^{-1}C(C^TW^{-1}C - H - V)^{-1} \\ -(C^TW^{-1}C - H - V)^{-1}C^TW^{-1} & -(C^TW^{-1}C - H - V)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Řešení pak určíme podle vzorců

$$\Delta z = (C^TW^{-1}C - H - V)^{-1}(C^TW^{-1}g + c),$$

$$\Delta x = W^{-1}(C\Delta z - g).$$

Je přitom třeba rozložit velkou řídkou matici W řádu n a malou hustou matici $C^TW^{-1}C - H - V$ řádu m.

Ve druhém případě předpokládáme, že čísla n_i, $1 \le i \le m$, jsou malá a matice $H(z)$ je diagonální (jako u součtu absolutních hodnot). Označíme-li $D = H(z) + V(x, z)$, je matice

$$C(x,z)D^{-1}(x,z)C^T(x,z) = C(x,z)(H(z) + V(x,z))^{-1}C^T(x,z)$$

řídká a lze využít toho, že

$$\begin{bmatrix} W & -C \\ -C^T & D \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} (W - CD^{-1}C^T)^{-1} & (W - CD^{-1}C^T)^{-1}CD^{-1} \\ D^{-1}C^T(W - CD^{-1}C^T)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C^T(W - CD^{-1}C^T)^{-1}CD^{-1} \end{bmatrix}.$$

Řešení určíme podle vzorců

$$\Delta x = -(W - CD^{-1}C^T)^{-1}(g + CD^{-1}c),$$

$$\Delta z = D^{-1}(C^T \Delta x - c).$$

Je přitom třeba rozložit velkou řídkou matici $W - CD^{-1}C^T$ řádu n. Inverze diagonální matice D řádu m nečiní potíže.

V každém kroku primární metody vnitřních bodů s iteračním určová-ním minimaxového vektoru známe hodnotu parametru μ a vektory $x \in R^n$, $z \in R^m$, přičemž $z_i > F_i(x)$, $1 \le i \le m$. Řešením Newtonovy soustavy určíme směrové vektory Δx, Δz a vybereme délku kroku α tak, aby platilo

$$B_\mu(x + \alpha \Delta x, z + \alpha \Delta z) < B_\mu(x, z)$$

a $z_i^+ > F_i(x^+)$, $1 \le i \le m$. Nakonec položíme $x^+ = x + \alpha \Delta x$, $z^+ = z + \alpha \Delta z$ a určíme novou hodnotu $\mu^+ < \mu$.

K tomu, aby pro dostatečně malé hodnoty α platila uvedená nerovnost, stačí, aby matice Newtonovy soustavy byla pozitivně definitní.

Věta 1 *Nechť matice* $G = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} G_{ij} u_{ij}$ *je pozitivně definitní. Pak matice Newtonovy soustavy je pozitivně definitní.*

Přímé určování minimaxového vektoru

Minimalizaci bariérové funkce můžeme chápat jako dvojúrovňovou optimalizaci

$$z(x) = \arg\min_{z \in Z} B_\mu(x, z),$$

$$x = \arg\min_{x \in R^n} B(x; \mu), \quad B(x; \mu) \triangleq B_\mu(x, z(x)),$$

kde Z je množina použitá v Předpokladu 2. První rovnice slouží k určení optimálního vektoru $z(x) \in R^m$, příslušného danému vektoru $x \in R^n$. Funkce $B_\mu(x, z)$ je pro daný vektor x ryze konvexní funkcí vektoru z, neboť je součtem konvexní funkce $h(z)$ a ryze konvexních funkcí $\mu\varphi(z_i - f_{ij}(x))$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n_i$. Její minimum je jakožto stacionární bod jednoznačně určeno KKT podmínkami. Pro logaritmickou bariérovou funkci platí tato věta.

Věta 2 *Soustava nelineárních rovnic*

$$h_i(z) - \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\mu}{z_i - f_{ij}(x)} = 0, \quad h_i(z) = \frac{\partial h(z)}{\partial z_i}, \quad 1 \le i \le m,$$

má pro pevné $x \in R^n$ jednoznačné řešení $z(x;\mu) \in Z \subset R^m$ takové, že

$$F_i(x) < \underline{z}_i \le z_i(x;\mu) \le \overline{z}_i, \quad 1 \le i \le m,$$

kde

$$\underline{z}_i = F_i(x) + \mu/\overline{h}_i, \quad \overline{z}_i = F_i(x) + n_i\mu/\underline{h}_i,$$

a kde $\underline{h}_i > 0$ jsou meze použité v Předpokladu 2 a $\overline{h_i} = h_i(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m)$.

Podobný výsledek lze získat i pro jiné bariéry. Pro bariéru

$$\varphi(t) = \log(t^{-1} + 1)$$

dostaneme rovnice

$$h_i(z) - \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\mu}{(z_i - f_{ij}(x))(z_i - f_{ij}(x) + 1)} = 0, \quad 1 \le i \le m,$$

a v nerovnostech pro $z_i(x;\mu)$ vystupují meze

$$\underline{z}_i = F_i(x) + \frac{2\mu/\overline{h}_i}{1 + \sqrt{1 + 4\mu/\overline{h}_i}}, \quad \overline{z}_i = F_i(x) + \frac{2n_i\mu/\underline{h}_i}{1 + \sqrt{1 + 4n_i\mu/\underline{h}_i}},$$

Soustavu nelineárních rovnic lze řešit Newtonovou metodou odstartovanou například z bodu z takového, že $z_i = \overline{z}_i$, $1 \leq i \leq m$. Je-li Hessova matice funkce $h(z)$ diagonální, rozpadne se tato soustava na m skalárních rovnic, které lze řešit účinnými a robustními metodami.

Umíme-li najít řešení soustavy nelineárních rovnic pro libovolný vektor $x \in R^n$, můžeme se omezit na nepodmíněnou minimalizaci funkce $B(x;\mu) = B_\mu(x, z(x))$, která má n proměnných. Je přitom účelné znát gradient a Hessovu matici funkce $B(x;\mu)$.

Věta 3 *Platí*

$$\nabla B(x;\mu) = \sum_{i=1}^{m} A_i(x) u_i(x),$$

$$\nabla^2 B(x;\mu) = W(x,z(x)) - C(x,z(x)) D(x,z(x))^{-1} C^T(x,z(x)),$$

kde $W(x,z(x))$, $C(x,z(x))$, $H(z(x))$, $V(x,z(x))$ *jsou matice zavedené v předchozím oddílu a* $D(x,z(x)) = H(z(x)) + V(x,z(x))$*. Je-li matice* $H(z(x))$ *diagonální, můžeme Hessovu matici vyjádřit ve tvaru*

$$\begin{aligned} \nabla^2 B(x;\mu) &= G(x,z(x)) + \sum_{i=1}^{m} A_i(x) V_i(x,z(x)) A_i^T(x) \\ &- \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i(x) V_i(x,z(x)) e_i e_i^T V_i(x,z(x)) A_i^T(x)}{\partial^2 h(z(x))/\partial z_i^2 + e_i^T V_i(x,z(x)) e_i}, \end{aligned}$$

kde $A_i(x)$, $V_i(x,z(x))$, $1 \le i \le m$, *a* $G(x,z(x))$ *jsou matice zavedené v předchozím oddílu.*

K určení inverze Hessovy matice můžeme také použít výraz získaný rozkladem Newtonovy soustavy z předchozího oddílu, což po dosazení $c(x, z(x)) = 0$ dává

$$\begin{aligned}(\nabla^2 B_\mu(x))^{-1} \;=\; & W(x,z(x))^{-1} - W(x,z(x))^{-1} C(x,z(x)) \\ & \left(C^T(x,z(x))\, W^{-1}(x,z(x))\, C(x,z(x)) - H(z(x)) - V(x,z(x))\right)^{-1} \\ & C^T(x,z(x))\, W(x,z(x))^{-1}.\end{aligned}$$

Pokud přesnost řešení nelineární soustavy rovnic není dostatečná, používáme místo Hessovy matice nebo její inverze raději Newtonovu soustavu z předchozího oddílu, kam dosadíme skutečnou hodnotu $c(x, z(x)) \neq 0$.

V každém kroku primární metody vnitřních bodů s přímým určováním minimaxového vektoru známe hodnotu parametru μ a vektor $x \in R^n$. Řešením soustavy nelineárních rovnic určíme vektor $z(x)$. Použitím Hessovy matice nebo její inverze určíme směrový vektor Δx a vybereme délku kroku α tak, aby platilo

$$B_\mu(x + \alpha\Delta x, z(x + \alpha\Delta x)) < B_\mu(x, z(x))$$

(vektor $z(x+\alpha\Delta x)$ určujeme řešením nelineární soustavy, ve které x nahrazujeme $x + \alpha\Delta x$). Nakonec položíme $x^+ = x + \alpha\Delta x$ a určíme novou hodnotu $\mu^+ < \mu$. Podmínky pro spádovost směrového vektoru Δx jsou stejné jako ve větě 1. Stačí, když matice $G(x, z(x))$ je pozitivně definitní.

Popíšeme algoritmus, kde se směrový vektor určuje tak, aby platilo

$$-g^T d \geq \varepsilon_0 \|g\| \|d\|, \quad \underline{c}\|g\| \leq \|d\| \leq \overline{c}\|g\|$$

(stejnoměrná spádovost), kde $g = A(x)u(x;\mu)$.

Algoritmus 1.

Data: Přesnost KKT podmínek $\underline{\varepsilon} > 0$, přesnost řešení nelineárních rovnic $\underline{\delta} > 0$, meze pro bariérový parametr $0 < \underline{\mu} < \overline{\mu}$, rychlost zmenšování bariérového parametru $0 < \lambda < 1$, parametry pro restart $0 < \underline{c} < \overline{c}$ a $\varepsilon_0 > 0$, parametr pro výběr délky kroku $\varepsilon_1 > 0$, rychlost zmenšování délky kroku $0 < \beta < 1$, maximální délka kroku $\overline{\Delta} > 0$, způsob určení směrového vektoru $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D} = 1$ nebo $\mathcal{D} = 2$).

Vstup: Struktura řídkosti matice $A(x)$. Počáteční odhad vektoru x.

Krok 1: Inicializace. Položíme $\mu = \overline{\mu}$. Pokud $\mathcal{D} = 1$, určíme strukturu řídkosti matice $W = W(x;\mu)$ ze struktury řídkosti matice $A(x)$ a provedeme symbolický rozklad matice W. Pokud $\mathcal{D} = 2$, určíme strukturu řídkosti matic $W = W(x;\mu)$ a $C = C(x;\mu)$ ze struktury řídkosti matice $A(x)$ a provedeme symbolický rozklad matice $W - CD^{-1}C^T$. Vypočteme hodnoty $f_{ij}(x)$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n_i$, $F_i(x) = \max_{1 \le j \le n_i} f_{ij}(x)$, $1 \le i \le m$, a $F(x) = h(F_1(x), \dots, F_m(x))$. Položíme $k := 0$ (index iterace) a $r := 0$ (indikátor restartu).

Krok 2: Ukončení výpočtu. Řešením soustavy nelineárních rovnic s přesností $\underline{\delta}$ určíme vektory $z(x;\mu)$ a $u(x;\mu)$. Vypočteme matici $A := A(x)$ a vektor $g := g(x;\mu) = A(x)u(x;\mu)$. Pokud $\mu \le \underline{\mu}$ a $\|g\| \le \underline{\varepsilon}$, ukopnčíme výpočet. V opačném případě položíme $k := k + 1$.

Krok 3: Aproximace Hessovy matice. Položíme $G = G(x;\mu)$ nebo vypočteme aproximaci G Hessovy matice $G(x;\mu)$ pomocí diferencí gradientů nebo pomocí kvazinewtonovských aktualizací.

Krok 4: Určení směrového vektoru. Pokud $\mathcal{D} = 1$, určíme vektor $d = \Delta x$ pomocí inverzní Hessovy matice použitím Gillova-Murrayova rozkladu matice W. Pokud $\mathcal{D} = 2$, určíme vektor $d = \Delta x$ pomocí Hessovy matice použitím Gillova-Murrayova rozkladu matice $W - CD^{-1}C^T$.

Krok 5: Restart. Pokud $r = 0$ a není-li směrový vektor stejnoměrně spádový, určíme pozitivně definitní diagonální matici $\tilde{D}$, položíme $G = \tilde{D}$, $r := 1$ a přejdeme na Krok 4. Pokud $r = 1$ a není-li směrový vektor stejnoměrně spádový, položíme $d := -g$ (směr největšího spádu). Položíme $r := 0$.

Krok 6: Výběr délky kroku. Určíme počáteční délku kroku $\overline{\alpha} = \min(1, \overline{\Delta}/\|d\|)$. Najdeme nejmenší přirozené číslo $l \geq 0$ takové, že $B(x + \beta^l \overline{\alpha} d; \mu) \leq B(x; \mu) + \varepsilon_1 \beta^l \overline{\alpha} g^T d$ (soustava nelineárních rovnic musí být řešena pro každý bod $x + \beta^j \overline{\alpha} d$, $0 \leq j \leq l$). Položíme $x := x + \beta^l \overline{\alpha} d$. Vypočteme hodnoty $f_{ij}(x)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$, $F_i(x) = \max_{1 \leq j \leq n_i} f_{ij}(x)$, $1 \leq i \leq m$, a $F(x) = h(F_1(x), \ldots, F_m(x))$.

Krok 7: Aktualizace bariérového parametru. Určíme novou hodnotu bariérového parametru $\mu \geq \underline{\mu}$ pomocí Procedury A nebo Procedury B. Přejdeme na Krok 2.

Procedura A.

Fáze 1: Pokud $\|g(x_k;\mu_k)\| \geq \underline{g}$, položíme $\mu_{k+1} = \mu_k$ (bariérový parametr se nemění).

Fáze 2: Pokud $\|g(x_k;\mu_k)\| < \underline{g}$, položíme

$$\mu_{k+1} = \max\left(\tilde{\mu}_{k+1},\, \underline{\mu},\, 10\,\varepsilon_M |F(x_{k+1})|\right),$$

kde $F(x_{k+1}) = h\left(F_1(x_{k+1}), \ldots, F_m(x_{k+1})\right)$, ε_M je strojová přesnost, a

$$\tilde{\mu}_{k+1} = \min\left[\max\left(\lambda\mu_k,\, \frac{\mu_k}{\sigma\mu_k + 1}\right), \max(\|g(x_k;\mu_k)\|^2,\, 10^{-2k})\right].$$

Používají se hodnoty $\underline{\mu} = 10^{-10}$, $\lambda = 0.85$, a $\sigma = 100$.

Procedura B.

Fáze 1: Pokud $\|g(x_k;\mu_k)\|^2 \geq \rho\mu_k$, položíme $\mu_{k+1} = \mu_k$ (bariérový parametr se nemění).

Fáze 2: Pokud $\|g(x_k;\mu_k)\|^2 < \rho\mu_k$, položíme

$$\mu_{k+1} = \max(\underline{\mu}, \|g_k(x_k;\mu_k)\|^2).$$

Používají se hodnoty $\underline{\mu} = 10^{-10}$ a $\rho = 0.1$.

Globální konvergence pro omezené bariéry

Nejprve budeme předpokládat, že funkce $\varphi(t)$ je zdola omezená, $\underline{\delta} = \underline{\varepsilon} = \underline{\mu} = 0$ a všechna vyčíslení jsou přesná. Budeme vyšetřovat nekonečné posloupnosti $\{x_k\}_1^\infty$ generované Algoritmem 1.

Lemma 1 *Nechť jsou splněny Předpoklady 1–2 a Podmínky 1–2. Nechť $\{x_k\}_1^\infty$ a $\{\mu_k\}_1^\infty$ jsou posloupnosti generované Algoritmem 1. Pak posloupnosti $\{B(x_k;\mu_k)\}_1^\infty$, $\{z(x_k;\mu_k)\}_1^\infty$, a $\{F(x_k)\}_1^\infty$ jsou omezené. Navíc existuje číslo $L \ge 0$ takové, že*

$$B(x_{k+1};\mu_{k+1}) \le B(x_{k+1};\mu_k) + L(\mu_k - \mu_{k+1}) \quad \forall k \in N.$$

Lemma 2 *Nechť jsou splněny předpoklady Lematu 1 a Předpoklad 3. Pak hodnoty $\{\mu_k\}_1^\infty$, generované Algoritmem 1 tvoří nerostoucí posloupnost takovou, že $\mu_k \to 0$.*

Věta 4. *Nechť jsou splněny předpoklady Lematu 1 a Předpoklad 3. Uvažujme posloupnost* $\{x_k\}_1^\infty$ *generovanou Algoritmem 1 (kde* $\underline{\delta} = \underline{\varepsilon} = \underline{\mu} = 0$*). Pak*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(x_k;\mu_k)\nabla f_{ij}(x_k) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(x_k;\mu_k) = h_i(z(x_k;\mu_k)),$$

$$u_{ij}(x_k;\mu_k) \geq 0, \qquad z_i(x_k;\mu_k) - f_{ij}(x_k) \geq 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} u_{ij}(x_k;\mu_k)(z_i(x_k;\mu_k) - f_{ij}(x_k)) = 0$$

pro $1 \leq i \leq m$ *a* $1 \leq j \leq n_i$.

Důsledek 1. *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 4. Pak každý hromadný bod* $x \in R^n$ *posloupnosti* $\{x_k\}_1^\infty$ *spňuje KKT podmínky původní úlohy, kde* z *a* u *(s prvky* z_i *a* u_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$*) jsou hromadné body posloupností* $\{z(x_k;\mu_k)\}_1^\infty$ *a* $\{u(x_k;\mu_k)\}_1^\infty$.

Věta 5. *Nechť jsou splněny předpoklady Lematu 1 a Předpoklad 3. Uvažujme posloupnost* $\{x_k\}_1^\infty$ *generovanou Algoritmem 1. Potom, zvolíme-li* $\underline{\delta} > 0$, $\underline{\varepsilon} > 0$, $\underline{\mu} > 0$ *libovolně, existuje index* $k \geq 1$ *takový, že*

$$\|g(x_k;\mu_k)\| \leq \underline{\varepsilon}, \quad |h_i(z(x_k;\mu_k)) - \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(x_k;\mu_k)| \leq \underline{\delta},$$

$$u_{ij}(x_k;\mu_k) \geq 0, \quad z_i(x_k;\mu_k) - f_{ij}(x_k) \geq 0,$$

$$u_{ij}(x_k;\mu_k)(z_i(x_k;\mu_k) - f_{ij}(x_k)) \leq \overline{c}\,\overline{\mu}$$

pro $1 \leq i \leq m$ *a* $1 \leq j \leq n_i$ *(poznamenejme, že* $\overline{c} = 1$ *pro všechny bariérové funkce zmíněné v tomto příspěvku).*

Globální konvergence pro logaritmickou bariéru

Nejprve budeme předpokládat, že $\varphi(t) = -\log(t)$, $\underline{\delta} = \underline{\varepsilon} = \underline{\mu} = 0$ a všechna vyčíslení jsou přesná. Budeme vyšetřovat nekonečné posloupnosti $\{x_k\}_1^\infty$ generované Algoritmem 1.

Lemma 3 *Nechť jsou splněny Předpoklady 2 a 4, $\varphi(t) = -\log t$ a Hessova matice $\nabla^2 h(z)$ je diagonální. Nechť $\{x_k\}_1^\infty$ a $\{\mu_k\}_1^\infty$ jsou posloupnosti generované Algoritmem 1. Pak posloupnosti $\{B(x_k;\mu_k)\}_1^\infty$, $\{z(x_k;\mu_k)\}_1^\infty$, a $\{F(x_k)\}_1^\infty$ jsou omezené. Navíc existuje číslo $L \geq 0$ takové, že*

$$B(x_{k+1};\mu_{k+1}) \leq B(x_{k+1};\mu_k) + L(\mu_k - \mu_{k+1}) \quad \forall k \in N.$$

Lemma 4 *Nechť jsou splněny předpoklady Lematu 3 a Předpoklad 3. Pak hodnoty $\{\mu_k\}_1^\infty$, generované Algoritmem 1 tvoří nerostoucí posloupnost takovou, že $\mu_k \to 0$.*

Věta 6. *Nechť jsou splněny předpoklady Lematu 3 a Předpoklad 3. Uvažujme posloupnost $\{x_k\}_1^\infty$ generovanou Algoritmem 1 (kde $\underline{\delta} = \underline{\varepsilon} = \underline{\mu} = 0$). Pak*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(x_k; \mu_k) \nabla f_{ij}(x_k) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(x_k; \mu_k) = h_i(z(x_k; \mu_k)),$$

$$u_{ij}(x_k; \mu_k) \geq 0, \qquad z_i(x_k; \mu_k) - f_{ij}(x_k) \geq 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} u_{ij}(x_k; \mu_k)(z_i(x_k; \mu_k) - f_{ij}(x_k)) = 0$$

pro $1 \leq i \leq m$ *a* $1 \leq j \leq n_i$.

Důsledek 2. *Nechť jsou splněny předpoklady Věty 6. Pak každý hromadný bod $x \in R^n$ posloupnosti $\{x_k\}_1^\infty$ spňuje KKT podmínky původní úlohy, kde z a u (s prvky z_i a u_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n_i$) jsou hromadné body posloupností $\{z(x_k; \mu_k)\}_1^\infty$ a $\{u(x_k; \mu_k)\}_1^\infty$.*

Věta 7. *Nechť jsou splněny předpoklady Lematu 3 a Předpoklad 3. Uvažujme posloupnost* $\{x_k\}_1^\infty$ *generovanou Algoritmem 1. Potom, zvolíme-li* $\underline{\delta} > 0$, $\underline{\varepsilon} > 0$, $\underline{\mu} > 0$ *libovolně, existuje index* $k \geq 1$ *takový, že*

$$\|g(x_k; \mu_k)\| \leq \underline{\varepsilon}, \quad |h_i(z(x_k; \mu_k)) - \sum_{j=1}^{n_i} u_{ij}(x_k; \mu_k)| \leq \underline{\delta},$$

$$u_{ij}(x_k; \mu_k) \geq 0, \quad z_i(x_k; \mu_k) - f_{ij}(x_k) \geq 0,$$

$$u_{ij}(x_k; \mu_k)(z_i(x_k; \mu_k) - f_{ij}(x_k)) \leq \overline{\mu}$$

pro $1 \leq i \leq m$ *a* $1 \leq j \leq n_i$.

Speciální případy a numerické výsledky

Nejjednodušší zobecněnou minimaxovou funkcí je součet

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} F_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \max_{1 \le j \le n_i} f_{ij}(x).$$

V tomto případě $\partial h(z)/\partial z_i = 1$, $1 \le i \le m$, pro libovolný vektor z a matice $H(z)$ je diagonální. Nelineární soustava rovnic se rozpadne na m skalárních rovnic

$$1 - \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\mu}{z_i - f_{ij}(x)} = 0, \qquad 1 \le i \le m,$$

jejichž řešení leží v intervalech

$$F_i(x) + \mu \le z_i(x) \le F_i(x) + n_i\mu, \quad 1 \le i \le m.$$

Pro $m = 1$ dostaneme klasickou minimaxovou úlohu.

K testování byla použita sbírka 22 testovacích problémů (Test 14). Zdrojové texty jsou umístěny na `www.cs.cas.cz/~luksan/test.html`. Porovnávané metody: P1–logaritmická bariéra, P2–kladná bariéra, P3–omezená bariéra, SM–zhlazovací metoda, DI–primárně duální metoda.

Metoda	NIT	NFV	NFG	NR	NL	NF	NT	Čas
P1-NM	1675	3735	11109	327	-	-	4	1.92
P2-NM	2018	6221	12674	605	-	-	7	2.09
P3-NM	1777	3989	11596	379	1	-	7	2.11
SM-NM	4123	12405	32451	823	-	-	7	9.64
DI-NM	1771	3732	17952	90	1	-	10	6.34
P1-VM	1615	2429	1637	-	-	-	1	1.05
P2-VM	2116	3549	2138	2	-	-	3	1.47
P3-VM	1985	3208	2007	1	-	-	3	1.27
SM-VM	7244	21008	7266	-	1	-	8	9.09
DI-VM	1790	3925	1790	5	1	-	9	4.59

Tabulka 1. Test 14: minimax s 200 proměnnými

Jestliže $n_i = 2$, $1 \le i \le m$, jsou nelineární rovnice kvadratické a jejich řešení má tvar

$$z_i(x) = \mu + \frac{f_{i1}(x) + f_{i2}(x)}{2} + \sqrt{\mu^2 + \left(\frac{f_{i1}(x) - f_{i2}(x)}{2}\right)^2}, \quad 1 \le i \le m.$$

Tento vzorec lze použít v případě, že funkce $h : R^m \to R$ obsahuje absolutní hodnoty $F_i(x) = |f_i(x)| = \max(f_i(x), -f_i(x))$. Pak platí $f_{i1}(x) = f_i(x)$ a $f_{i2}(x) = -f_i(x)$, takže

$$z_i(x) = \mu + \sqrt{\mu^2 + f_i^2(x)}, \quad 1 \le i \le m.$$

K testování byla použita sbírka 22 testovacích problémů (Test 14). Zdrojové texty jsou umístěny na `www.cs.cas.cz/~luksan/test.html`. Porovnávané metody: PT–logaritmická bariéra a "trust-region" realizace, PL–logaritmická bariéra a "line-search" realizace, DI–primárně duální metoda, BM–svazková metoda s proměnnou metrikou.

Metoda	NIT	NFV	NFG	NR	NL	NF	NT	Čas
PT-NM	3014	3518	27404	1	-	-	4	4.66
PL-NM	2651	12819	22932	3	1	-	6	5.24
DI-NM	5002	7229	42462	328	1	-	13	33.52
PT-VM	3030	3234	3051	-	-	1	1	1.44
PL-VM	2699	3850	2721	-	-	1	2	1.42
DI-VM	7138	14719	14719	9	2	-	9	86.18
BM-VM	34079	34111	34111	22	1	1	11	25.72

Tabulka 2. Test 14: součet absolutních hodnot s 200 proměnnými