Kapitola 6

Kurzweilův-Stieltjesův integrál

Riemannův-Stieltjesův integrál má široké uplatnění všude, kde je možno omezit se na situace, kdy integrand a integrátor nemají společné body nespojitosti (nebo, v případě (σ)RS-integrálu, neexistují body, ve kterých by obě funkce měly nespojitost na stejné straně). Pro některé aplikace (např. v teorii hystereze a z ní pocházejících variačních nerovnostech, viz [2], [21] a [22]) je však žádoucí mít k dispozici integrál Stieltjesova typu, který si nevynucuje žádná omezení na spojitost integrovaných a integrujících funkcí. Ukazuje se, že integrál, který této potřebě nejlépe vyhovuje, je integrál, který budeme nazývat Kurzweilův-Stieltjesův. Jeho výhodnost nespočívá jen v jeho obecnosti, ale též i v relativní jednoduchosti jeho definice i odvození jeho vlastností. Navzdory těmto přednostem mu v monografické literatuře nebylo doposud věnováno tolik pozornosti, kolik by si zasloužil. Pokud je mi známo, stručné pojednání o tomto integrálu lze najít v kapitole 24 Schechterovy monografie [43] z roku 1997 (tam je nazýván Henstockův-Stieltjesův integrál). Podrobněji se tímto integrálem zabývá McLeodova monografie [34] z roku 1980, kde je nazýván *gauge integral* („gauge"=„kalibr"). Jaroslav Kurzweil použil tento integrál již v roce 1958 (viz [29]) jako speciální případ zobecněného nelineárního integrálu, který definoval ve své fundamentální práci [28] z roku 1957 při vyšetřování spojité závislosti řešení nelineárních diferenciálních rovnic obsahujících Diracovu distribuci. Během sedmdesátých let minulého století byl již termín Kurzweilův-Stieltjesův integrál (nebo Perronův-Stieljesův integrál podle Kurzweilovy definice) běžně používán v pracích zabývajících se zobecněnými lineárními diferenciálními rovnicemi (viz např. [47] nebo [55] a práce tam citované).

Cílem této kapitoly je předložit co nejucelenější teorii Kurzweilova-Stieltjesova integrálu.

6.1 Definice a základní vlastnosti

6.1 Definice. Každá kladná funkce $\delta : [a, b] \to (0, \infty)$ se nazývá *kalibr* na intervalu $[a, b]$. Množinu kalibrů na $[a, b]$ značíme $\mathscr{G}[a, b]$.

Je-li δ kalibr na $[a, b]$, řekneme, že značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a, b]$ je

δ*-jemné*, jestliže platí

$$[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]\subset(\xi_j-\delta(\xi_j),\xi_j+\delta(\xi_j))\quad\text{pro všechna } j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma}).$$

$\mathscr{A}(\delta;[a,b])$ značí množinu všech δ-jemných značených dělení intervalu $[a,b]$. Nehrozí-li nedorozumění, používáme kratší značení $\mathscr{A}(\delta)$.

Mějme funkce $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ a značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}\,[a,b]$. Potom definujeme jako v kapitole 5 integrální součet

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\ \big(=S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi};[a,b])\big)=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}f(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big].$$

6.2 Definice. Nechť $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ a $I\in\mathbb{R}$. Řekneme, že existuje *Kurzweilův-Stieltjesův integrál* (KS-integrál) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,]$ a má hodnotu $I\in\mathbb{R}$, jestliže

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]:\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)\Big)\implies\Big|I-S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\Big|<\varepsilon. \tag{6.1}$$

Jestliže $g(x)\equiv x$, pak místo o KS-integrálu mluvíme o KH-integrálu (Kurzweilův-Henstockův integrál) a značíme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$. Budeme využívat též zkrácené značení $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,]$.

Existuje-li integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, klademe $\displaystyle\int_b^a f\,\mathrm{d}\,g=-\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Dále $\displaystyle\int_a^a f\,\mathrm{d}\,g=0$.

Tato definice je korektní díky následujícím dvěma lemmatům.

6.3 Lemma (COUSIN)**.** *Pro každý kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ je množina $\mathscr{A}(\delta)$ všech δ-jemných značených dělení intervalu $[a,b]$ neprázdná.*

D ů k a z . Mějme kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$. Označme M množinu všech $c\in(a,b]$, pro něž je množina $\mathscr{A}(\delta;[a,c])$ neprázdná.

Nechť $c=\min\{a+\delta(a),b\}$, $\boldsymbol{\sigma}=\{a,c\}$ a $\boldsymbol{\xi}=(a)$. Protože je $\delta(a)>0$, máme $c\in(a,b]$ a $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta;[a,c])$, tj. $c\in M$. Množina M je tedy neprázdná, a proto $d=\sup M>-\infty$.

Ukážeme dále, že d leží v množině M. Protože je $\delta(d)>0$, plyne z definice suprema, že existuje $c\in(d-\delta(d),d]\cap M$. Tudíž existuje také δ-jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}\,')$ intervalu $[a,c]$. Nechť $c<d$. (V opačném případě je triviálně

$d = c \in M$.) Položme $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \{d\}$ a $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}', d)$. Potom $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a, d]$, a protože je $[c, d] \subset (d - \delta(d), d + \delta(d))$, znamená to také, že $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta; [a, d])$, tj. $d \in M$.

Je-li $d = b$, jsme s důkazem hotovi. Předpokládejme, že je $d < b$. Zvolme libovolně $(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[a, d]$ a $\gamma \in (d, d + \delta(d)) \cap (d, b)$. (Takové γ existuje, protože je $\delta(d) > 0$.) Máme tedy $[d, \gamma] \subset (d - \delta(d), d + \delta(d))$, a proto $\big(\boldsymbol{\sigma}'' \cup \{\gamma\}, (\boldsymbol{\xi}'', d)\big)$ je δ-jemné značené dělení intervalu $[a, \gamma]$, tj. $\gamma \in M$. Protože je $\gamma > d$, dostáváme tak spor s definicí $d = \sup M$. Platí tedy $d = \sup M = b$ a důkaz lemmatu je dokončen. □

6.4 Lemma. *Hodnota integrálu* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *je podmínkou* (6.1) *určena jednoznačně.*

D ů k a z . Předpokládejme, že existují $I_1, I_2 \in \mathbb{R}$, $I_1 \neq I_2$, takové, že platí (6.1), kam dosadíme $I = I_i$, $i = 1, 2$. Položme $\widetilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\,|I_1 - I_2|$. Pak existují kalibry δ_1 a δ_2 tak, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_1| < \widetilde{\varepsilon} \text{ pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_1), \tag{6.2}$$

a

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_2| < \widetilde{\varepsilon} \text{ pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_2) \tag{6.3}$$

Položme $\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ pro $x \in [a, b]$. Potom je zřejmě δ také kalibr a platí $\mathscr{A}(\delta) \subset \mathscr{A}(\delta_1) \cap \mathscr{A}(\delta_2)$. Pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)$ tedy máme

$$\begin{aligned} 2\,\widetilde{\varepsilon} &= |I_1 - I_2| = |I_1 - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) + S(\boldsymbol{\sigma}(\xi) - I_2| \\ &\leq |I_1 - S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})| + |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_2| < 2\,\widetilde{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Protože toto není možné, musí být $I_1 = I_2$. □

Nebude-li uvedeno jinak, bude mít v následujícím textu symbol integrálu vždy smysl KS-integrálu.

6.5 Poznámka. Nechť $\delta, \delta_0 \in \mathscr{G}[a, b]$ a $\delta \leq \delta_0$ na $[a, b]$. Potom je $\mathscr{A}(\delta) \subset \mathscr{A}(\delta_0)$. Je-li tedy splněna nějaká podmínka pro všechna $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$, tím spíše je splněna i pro všechna $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)$. Tudíž, máme-li dán kalibr $\delta_0 \in \mathscr{G}[a, b]$, můžeme se v definici 6.2 omezit na kalibry δ_ε, pro které je $\delta_\varepsilon \leq \delta_0$ na $[a, b]$.

Také pro existenci KS-integrálu platí podmínka Bolzanova-Cauchyova typu.

6.6 Věta (BOLZANOVA-CAUCHYOVA PODMÍNKA)**.** *Nechť* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Potom integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje právě tehdy, když platí*

$$\left.\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]:\\&\quad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)\Big)\implies\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\Big|<\varepsilon.\end{aligned}\right\}\tag{6.4}$$

D ů k a z. a) Existuje-li integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I\in\mathbb{R}$, pak, podle definice 6.2, pro každé $\varepsilon>0$ existuje kalibr $\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že je $|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|<\frac{\varepsilon}{2}$ pro všechna $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Pro každou dvojici $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, $(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ tedy máme

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')|\le|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|+|S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')-I|<\varepsilon.$$

Platí tedy (6.4).

b) Předpokládejme nyní, že je splněna podmínka (6.4). Buď dáno $\varepsilon>0$. Podle (6.4) můžeme zvolit kalibr δ_ε tak, aby

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')|<\frac{\varepsilon}{2}\tag{6.5}$$

platilo pro každou dvojici δ_ε-jemných značených dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a,b]$. Označme M množinu těch reálných čísel m, pro která existuje kalibr $\delta_m\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že nerovnost $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\ge m$ je splněna pro každé dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_m)$.

Dokážeme, že množina M je neprázdná, shora ohraničená a $\sup M=\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Zafixujme $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Podle (6.5) platí

$$S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\frac{\varepsilon}{2}<S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})<S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})+\frac{\varepsilon}{2}\ \text{ pro každé } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon).\tag{6.6}$$

To znamená, že $(-\infty,S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\frac{\varepsilon}{2})\subset M$, a tedy $M\ne\emptyset$.

Pro každé $m\in M$ a $x\in[a,b]$ definujme $\widetilde{\delta}_m(x)=\min\{\delta_m(x),\delta_\varepsilon(x)\}$. Potom pro každé $m\in M$ a každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\widetilde{\delta}_m)\subset\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platí nerovnosti

$$m\le S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})<S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})+\frac{\varepsilon}{2},\quad\text{tj. } M\subset\Big(-\infty,S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})+\frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Množina M je tedy shora ohraničená a $S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\dfrac{\varepsilon}{2}\le\sup M\le S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})+\dfrac{\varepsilon}{2}$. Odtud podle (6.6) odvodíme konečně, že platí

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\sup M|\le|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})|+|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\sup M|<\varepsilon$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$, tj. $\sup M=\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$ $\square$

6.7 Poznámka. Podobně jako v případě RS-integrálů (viz cvičení 5.15) můžeme podmínku (6.4) zeslabit následujícím způsobem

$$\begin{aligned}&\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]:\\ &\qquad\Big((\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon),\ \boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}\Big)\implies\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-S(\boldsymbol{\sigma}',\boldsymbol{\xi}')\Big|<\varepsilon.\end{aligned}$$

KS-integrál má obvyklé lineární vlastnosti.

6.8 Věta. *Nechť* $f,\ f_1,\ f_2,\ g,\ g_1,\ g_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ *a nechť existují integrály*

$$\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g,\quad \int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g,\quad \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_1\ \ \textit{a}\ \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_2.$$

Potom pro libovolná $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ *platí*

$$\int_a^b(c_1\,f_1+c_2\,f_2)\,\mathrm{d}\,g=c_1\int_a^b f_1\,\mathrm{d}\,g+c_2\int_a^b f_2\,\mathrm{d}\,g$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}[\,c_1\,g_1+c_2\,g_2]=c_1\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_1+c_2\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_2.$$

D ů k a z . Ukažme si třeba důkaz prvního tvrzení.

Buď dáno $\varepsilon>0$. Podle našeho předpokladu existují kalibry $\delta_1\in\mathscr{G}[a,b]$ a $\delta_2\in\mathscr{G}[a,b]$ takové, že platí

$$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_i)\implies\Big|S_{f_i\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\int_a^b f_i\,\mathrm{d}\,g\Big|<\varepsilon\quad\text{pro}\ \ i=1,2.$$

Pro $x\in[a,b]$ položme $\delta_\varepsilon(x)=\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}$. Označme $h=c_1\,f_1+c_2\,f_2$. Protože pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platí

$$\begin{aligned}S_{h\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})&=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}(c_1\,f_1(\xi_j)+c_2\,f_2(\xi_j))\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]\\ &=c_1\,S_{f_1\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})+c_2\,S_{f_2\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}),\end{aligned}$$

dostáváme

$$\begin{aligned}
&\Big|S_{h\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - c_1\int_a^b f_1 \,\mathrm{d}\, g - c_2\int_a^b f_2 \,\mathrm{d}\, g\Big| \\
&\quad \le |c_1|\,\Big|S_{f_1\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_1 \,\mathrm{d}\, g\Big| + |c_2|\,\Big|S_{f_2\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_2 \,\mathrm{d}\, g\Big| \\
&\quad < (|c_1| + |c_2|)\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Odtud už naše tvrzení bezprostředně plyne.

Druhé tvrzení věty by se dokazovalo obdobně a důkaz lze ponechat čtenáři jako cvičení. □

6.9 Věta. *Jestliže existuje integrál* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a jestliže* $[c,d] \subset [a,b]$, *pak existuje také integrál* $\displaystyle\int_c^d f \,\mathrm{d}\, g$.

D ů k a z je analogický důkazu věty 5.16 a lze ho přenechat čtenáři jako cvičení. □

6.10 Cvičení. Dokažte druhé tvrzení věty 6.8 a větu 6.9.

6.11 Věta. *Nechť* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a* $c \in [a,b]$. *Integrál* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *existuje právě tehdy, když existují oba integrály* $\displaystyle\int_a^c f \,\mathrm{d}\, g$ *a* $\displaystyle\int_c^b f \,\mathrm{d}\, g$. *V takovém případě pak platí rovnost*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = \int_a^c f \,\mathrm{d}\, g + \int_c^b f \,\mathrm{d}\, g.$$

D ů k a z . Je-li $c = a$ nebo $c = b$, je tvrzení věty triviální. Nechť je tedy $c \in (a,b)$.

a) Existuje-li integrál $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$, pak podle věty 6.9 existují také oba integrály $\displaystyle\int_a^c f \,\mathrm{d}\, g$ a $\displaystyle\int_c^b f \,\mathrm{d}\, g$.

b) Nechť $\displaystyle\int_a^c f \,\mathrm{d}\, g = I_1$ a $\displaystyle\int_c^b f \,\mathrm{d}\, g = I_2$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme kalibry

$\delta'_\varepsilon \in \mathscr{G}[a,c]$, $\delta''_\varepsilon \in \mathscr{G}[c,b]$ tak, aby pro všechna značená δ'_ε-jemná dělení $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')$ intervalu $[a,c]$ a všechna δ''_ε-jemná dělení $(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'')$ intervalu $[c,b]$ platilo

$$|S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - I_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad |S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') - I_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.7}$$

Definujme nyní kalibr δ_ε na $[a,b]$ předpisem

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \min\left\{\delta'_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(c-x)\right\}, & \text{když } x \in [a,c), \\ \min\left\{\delta'_\varepsilon(c), \delta''_\varepsilon(c)\right\}, & \text{když } x = c, \\ \min\left\{\delta''_\varepsilon(x), \frac{1}{4}(x-x)\right\}, & \text{když } x \in (c,b]. \end{cases}$$

Potom,

$$x + \delta_\varepsilon(x) \le x + \frac{1}{4}(c-x) < c, \quad \text{je-li } x < c,$$

a

$$x - \delta_\varepsilon(x) \ge x - \frac{1}{4}(x-c) > c, \quad \text{je-li } x > c.$$

Pro žádné $x \neq c$ tedy nemůže být $c \in [x - \delta_\varepsilon(x), x + \delta_\varepsilon(x)]$. Pro každé δ_ε-jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ tudíž existuje $k \in \{1, 2, \ldots, \nu(\boldsymbol{\sigma})\}$ tak, že $\xi_k = c$. Můžeme tedy předpokládat, že platí $\sigma_{k-1} < \sigma_k = \xi_k = c = \xi_{k+1} < \sigma_{k+1}$. Kdyby bylo $\sigma_{k-1} < c = \xi_k < \sigma_k$, upravili bychom příslušný člen v součtu $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ následujícím způsobem:

$$f(c)\,[g(\sigma_k) - g(\sigma_{k-1})] = f(c)\,[g(\sigma_k) - g(c)] + f(c)\,[g(c) - g(\sigma_{k-1})].$$

Existují tedy $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{T}[a,c]$ a $(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{T}[c,b]$ takové, že

$$(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon; [a,c]) \subset \mathscr{A}(\delta'_\varepsilon; [a,c]), \ (\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon; [c,b]) \subset \mathscr{A}(\delta''_\varepsilon; [c,b])$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}'', \ \boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\xi}''), \ S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') + S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'').$$

Vezmeme-li v úvahu také (6.7), vidíme, že platí

$$\begin{aligned} |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - (I_1 + I_2)| &= |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') + S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') - (I_1 + I_2)| \\ &\le |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - I_1| + |S(\boldsymbol{\sigma}'', \boldsymbol{\xi}'') - I_2| < \varepsilon \end{aligned}$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon; [a,b])$ neboli $\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = I_1 + I_2.$ □

6.12 Poznámka. Jestliže existuje integrál $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$, pak existuje také KS-integrál $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ a má tutéž hodnotu. Je-li totiž $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I \in \mathbb{R}$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\Delta_\varepsilon > 0$ takové, že $|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon$ platí pro všechna značená dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a, b]$ taková, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \Delta_\varepsilon$. Potom $\delta_\varepsilon(x) \equiv \Delta_\varepsilon/2$ je kalibr s vlastnostmi zaručujícími rovnost $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I$.

Na druhou stranu, existuje-li integrál $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I$ a jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít kalibr $\delta_\varepsilon \in \mathscr{G}[a, b]$ takový, že platí $\inf\{\delta_\varepsilon(x) : x \in [a, b]\} > 0$ a

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta),$$

pak také $(\delta)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I$. Položíme-li totiž $\Delta_\varepsilon = \inf\{\delta_\varepsilon(x) : x \in [a, b]\}$, bude platit

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}([a, b]) \quad \text{takové, že } |\boldsymbol{\sigma}| < \Delta_\varepsilon.$$

Následující věta popisuje vztah (σ)RS-integrálu a KS-integrálu.

6.13 Věta. *Jestliže existuje integrál* $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$, *pak existuje také* KS-*integrál* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ *a platí* $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = (\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$.

D ů k a z. Označme $I = (\sigma)\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a, b]$ je dělení intervalu $[a, b]$ z definice (σ)RS-integrálu. Označme jeho body tak, že bude $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon = \{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$, a definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \min\{|x - s_j| : j = 0, 1, \ldots, m\}, & \text{když } x \notin \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon, \\ \quad 1, & \text{když } x \in \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon. \end{cases}$$

Budiž $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ libovolné δ_ε-jemné značené dělení intervalu $[a, b]$. Analogickými úvahami jako v důkazu věty 6.11 zjistíme, že musí být

$$\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}. \tag{6.8}$$

Dále

$$\left.\begin{aligned} S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big[f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\xi_j)] + f(\xi_j)\,[g(\xi_j) - g(\sigma_{j-1})] \Big] \\ &= S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}'), \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

kde $\boldsymbol{\sigma}' = \{\sigma_0, \xi_1, \sigma_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}, \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\}$, $\boldsymbol{\xi}' = (\xi_1, \xi_1, \xi_2, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})})$. (Stane-li se, že pro nějaké k je $\sigma_{k-1} = \xi_k$ nebo $\xi_k = \sigma_k$, je třeba takové intervaly $[\sigma_{k-1}, \xi_k]$ nebo $[\xi_k, \sigma_k]$ a příslušné značky v $(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}')$ vynechat.)

Podle (6.8) je $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \subset \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\} \subset \boldsymbol{\sigma}'$. Vzhledem k rovnosti (6.9) a definici dělení $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ odtud plyne, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| = |S(\boldsymbol{\sigma}', \boldsymbol{\xi}') - I| < \varepsilon$$

a podle definice 6.2 to znamená, že $\displaystyle\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I$. □

6.14 Příklady. Všimněme si některých specifických vlastností KH-integrálu.

(i) KH-integrál je zřejmě zobecněním klasického Riemannova integrálu.

(ii) Nechť $f(x) = 0$ na $[a,b] \setminus D$, kde D je spočetná podmnožina $[a,b]$, $D = \{d_k\}$. Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Definujme

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{když } x \notin D, \\ \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}(1 + |f(d_k)|)}, & \text{když } x = d_k \in D. \end{cases}$$

Nechť $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\substack{j=1 \\ \xi_j \in D}}^{m} f(\xi_j)\,[\sigma_j - \sigma_{j-1}].$$

Pro každé j takové, že $\xi_j = d_k \in D$ pro nějaké k, musí podle definice kalibru δ_ε platit $\sigma_j - \sigma_{j-1} \le \dfrac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(d_k)|)}$. Odtud plyne, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})| \le \sum_{k=1}^{\infty} |f(d_k)|\,|\frac{\varepsilon}{2^k(1 + |f(d_k)|)} \le \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon.$$

Podle definice 6.2 to znamená, že $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(iii) Nechť existuje Newtonův integrál (N)$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, kde funkce F je spojitá na $[a,b]$ a platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro každé } x \in (a,b), \;\; F'(a+) = f(a), \;\; F'(b-) = f(b). \quad (6.10)$$

Ukážeme, že pak je KH-integrál $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ roven $F(b)-F(a)$.

Nechť je dáno $\varepsilon>0$. Vzhledem k (6.10) a podle definice derivace pro každé $\xi\in[a,b]$ existuje $\delta_\varepsilon(\xi)>0$ takové, že platí

$$|F(x)-F(\xi)-f(\xi)(x-\xi)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\,|x-\xi|$$

pro všechna $x\in[a,b]\cap(\xi-\delta_\varepsilon(\xi),\xi+\delta_\varepsilon(\xi))$. Buď $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ libovolné δ_ε-jemné dělení intervalu $[a,b]$ a $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom pro každé $j\in\{1,2,\dots,m\}$ máme

$$\begin{aligned}
&\big|F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})-f(\xi_j)\,[\sigma_j-\sigma_{j-1}]\big|\\
&\quad\le\big|F(\sigma_j)-F(\xi_j)-f(\xi_j)\,[\sigma_j-\xi_j]\big|\\
&\qquad\quad+\big|F(\xi_j)-F(\sigma_{j-1})-f(\xi_j)\,[\xi_j-\sigma_{j-1}]\big|\\
&\quad<\frac{\varepsilon}{b-a}\,\big(|\sigma_j-\xi_j|+|\xi_j-\sigma_{j-1}|\big)=\frac{\varepsilon}{b-a}\,[\sigma_j-\sigma_{j-1}],
\end{aligned}$$

a tudíž

$$\begin{aligned}
&\big|[F(b)-F(a)]-S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big|\\
&\quad=\Big|\sum_{j=1}^{m}\Big(F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})-f(\xi_j)\,[\sigma_j-\sigma_{j-1}]\Big)\Big|\\
&\quad\le\sum_{j=1}^{m}\big|F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})-f(\xi_j)\,[\sigma_j-\sigma_{j-1}]\big|<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^{m}[\sigma_j-\sigma_{j-1}]=\varepsilon,
\end{aligned}$$

tj. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

6.2 Existence integrálu

V příkladech 6.14 jsme určili hodnoty některých KH-integrálů přímo z definice. Nyní si ukážeme, jak lze v některých jednoduchých příkladech určit z definice i hodnotu KS-integrálu.

6.15 Příklady. (i) Z definice 6.2 je zřejmé, že je-li $f(t)\equiv f(a)$ na $[a,b]$, pak

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g=f(a)\,[g(b)-g(a)]\quad\text{a}\quad\int_a^b g\,\mathrm{d}f=0$$

pro každou funkci $g:[a,b]\to\mathbb{R}$.

(ii) Pro libovolnou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{(\tau,b]} = f(\tau) \qquad \text{pro } \tau\in[a,b), \tag{6.11}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} = f(\tau) \qquad \text{pro } \tau\in(a,b], \tag{6.12}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[a,\tau]} = -f(\tau) \quad \text{pro } \tau\in[a,b), \tag{6.13}$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[a,\tau)} = -f(\tau) \quad \text{pro } \tau\in(a,b] \tag{6.14}$$

a

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau]} = 0 \qquad \text{pro } \tau\in(a,b). \tag{6.15}$$

Ukažme si odvození vztahů (6.11) a (6.12). Všechny ostatní se z nich už odvodí použitím věty 6.11.

Nechť $\tau\in[a,b)$ a $g(x)=\chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom $g\equiv 0$ na $[a,\tau]$, a tedy $\displaystyle\int_a^\tau f\,\mathrm{d}\,g=0$ podle příkladu (i). Dále nechť

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{když } x=\tau,\\ \dfrac{1}{4}\,(x-\tau), & \text{když } x\in(\tau,b]. \end{cases}$$

Analogicky jako v důkazu věty 6.11 zjistíme, že pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta;[\tau,b])$ musí být $\tau=\sigma_0=\xi_1$, $g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})=0$ pro $j=2,3,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$. Proto

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(\tau)\,[g(\sigma_1)-g(\tau)] = f(\tau) \ \text{ a } \int_\tau^b f\,\mathrm{d}\,g = f(\tau).$$

Pomocí věty 6.11 nyní už dokončíme důkaz vztahu (6.11).

Vztah (6.12) se dokazuje analogicky. Tentokrát ovšem máme $\tau\in(a,b]$ a $g(x)=\chi_{[\tau,b]}(x)$ pro $x\in[a,b]$ a $\displaystyle\int_\tau^b f\,\mathrm{d}\,g=0$. Položíme

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{když } x=\tau,\\ \dfrac{1}{4}\,(\tau-x), & \text{když } x\in[a,\tau). \end{cases}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta;[a,\tau])$ pak máme $\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}=\xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}=\tau,$ a tedy

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(\tau)\,[g(\tau)-g(\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1})] = f(\tau) \quad \text{a} \quad \int_a^\tau f\,\mathrm{d}\,g = f(\tau).$$

(iii) Pro libovolnou funkci g regulovanou na $[a,b]$ platí

$$\int_a^b \chi_{(\tau,b]}\,\mathrm{d}\,g = g(b)-g(\tau+) \qquad \text{pro } \tau\in[a,b), \tag{6.16}$$

$$\int_a^b \chi_{[\tau,b]}\,\mathrm{d}\,g = g(b)-g(\tau-) \qquad \text{pro } \tau\in(a,b], \tag{6.17}$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau]}\,\mathrm{d}\,g = g(\tau+)-g(a) \qquad \text{pro } \tau\in[a,b), \tag{6.18}$$

$$\int_a^b \chi_{[a,\tau)}\,\mathrm{d}\,g = g(\tau-)-g(a) \qquad \text{pro } \tau\in(a,b] \tag{6.19}$$

a

$$\int_a^b \chi_{[\tau]}\,\mathrm{d}\,g = g(\tau+)-g(\tau-) \quad \text{pro } \tau\in(a,b). \tag{6.20}$$

Opět se omezíme na důkaz prvních dvou vztahů.

Nechť tedy nejprve $\tau\in[a,b)$ a $f(x)=\chi_{(\tau,b]}(x)$ na $[a,b]$. Potom je

$$\int_a^\tau f\,\mathrm{d}\,g = 0.$$

Buď dáno $\varepsilon>0.$ Zvolme nyní $\eta>0$ tak, aby bylo $|g(\tau+)-g(x)|<\varepsilon$ pro každé $x\in(\tau,\tau+\eta)$ a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta, & \text{když } x=\tau, \\ \dfrac{1}{4}\,(x-\tau), & \text{když } x\in(\tau,b]. \end{cases}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta;[\tau,b])$ nyní musí být $\tau=\sigma_0=\xi_1$ a tedy

$$\begin{aligned} &|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-[g(b)-g(\tau+)]| \\ &\quad = \Big|\,[g(b)-g(\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1})]+[g(\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1})-g(\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-2}] \\ &\qquad + \cdots + [g(\sigma_2)-g(\sigma_1)]-[g(b)-g(\tau+)]\,\Big| \\ &\quad = |g(\tau+)-g(\sigma_1)|. \end{aligned}$$

Protože $\tau < \sigma_1 < \tau + \delta(\tau) = \tau + \eta$, plyne odtud a z definice η, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - [g(b) - g(\tau+)]| < \varepsilon \quad \text{pro každé } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta; [\tau, b]).$$

Tudíž

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = \int_a^\tau f \, \mathrm{d}\, g + \int_\tau^b f \, \mathrm{d}\, g = g(b) - g(\tau+),$$

tj. platí (6.16).

Ve druhém případě je $\tau \in (a, b]$ a $f(x) = \chi_{[\tau, b]}(x)$ pro $x \in [a, b]$. Máme

$$\int_\tau^b f \, \mathrm{d}\, g = g(b) - g(\tau).$$

Zvolme $\eta > 0$ tak, aby platilo $|g(\tau-) - g(x)| < \varepsilon$ pro každé $x \in (\tau - \eta, \tau)$, a definujme

$$\delta(x) = \begin{cases} \eta, & \text{když } x = \tau, \\ \frac{1}{4}(\tau - x), & \text{když } x \in [a, \tau). \end{cases}$$

Tím si opět vynutíme, že pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta; [a, \tau])$ bude $\tau = \sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = \xi_{\nu(\boldsymbol{\sigma})}$, a tudíž

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = [g(\tau) - g(\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1})],$$

kde $\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1} \in (\tau - \eta, \tau)$. Jako v předešlém případě odtud plyne, že platí

$$\int_a^\tau f \, \mathrm{d}\, g = g(\tau) - g(\tau-), \ \text{ tj.} \int_a^b f \, \mathrm{d}\, g = \int_a^\tau f \, \mathrm{d}\, g + \int_\tau^b f \, \mathrm{d}\, g = g(b) - g(\tau-).$$

Pokud jde o existenci integrálu, můžeme podle cvičení 2.34 (i) výše uvedené příklady shrnout do následujícího tvrzení.

6.16 Důsledek. *Jestliže* $g \in \mathbb{G}[a, b]$ *a* $f \in \mathbb{S}[a, b]$, *pak oba integrály*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}\, g \quad \text{a} \quad \int_a^b g \, \mathrm{d} f$$

existují.

6.17 Cvičení. Dokažte následující tvrzení:

Nechť $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$, $D=\{d_1,d_2,\dots,d_n\}\subset[a,b]$ *a* $h(x)=c$ *pro* $x\in[a,b]\setminus D$. *Potom*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,h = f(b)\,h(b)-f(a)\,h(a)-\big(f(b)-f(a)\big)\,c$$

pro každou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

(Návod: funkci h zapišme ve tvaru $h(x)=c+\sum_{k=1}^{n}\big[h(d_k)-c\big]\,\chi_{[d_k]}(x)$.)

Další věta poskytuje základní odhad pro integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ za předpokladu, že g má konečnou variaci na $[a,b]$. Na funkci f přitom žádné zásadní omezení neklademe. Pochopitelně, že reálný význam bude mít tvrzení věty pouze pro případ, že f je ohraničená na $[a,b]$.

6.18 Věta. *Jestliže* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *jsou takové, že integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje, pak platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|\le\|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g. \tag{6.21}$$

Jestliže navíc existuje také integrál $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^x g]$, *pak platí*

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|\le\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,[\mathrm{var}_a^x g]\le\|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g. \tag{6.22}$$

D ů k a z plyne z toho, že nerovnosti

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})|\le\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}|f(\xi_j)|\,|g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})|\le\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}|f(\xi_j)|\,\mathrm{var}_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j}\,g\le\|f\|\,\mathrm{var}_a^b\,g$$

platí pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$. □

Také další jednoduchý odhad integrálu se opírá o definici KS-integrálu.

6.19 Věta. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *jsou takové, že integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje. Dále nechť existují kalibr* $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ *a funkce* $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ *neklesající na* $[a,b]$ *takové, že*

$$\left.\begin{aligned} &\tau\in[a,b] \quad \text{a} \quad t\in(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\cap[a,b] \\ &\quad\Longrightarrow\ |t-\tau|\,|f(\tau)|\,|g(t)-g(\tau)|\le(t-\tau)\big(u(t)-u(\tau)\big). \end{aligned}\right\} \tag{6.23}$$

Potom

$$\Big|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|\le u(b)-u(a). \tag{6.24}$$

D ů k a z . Pro každé δ-jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ máme podle (6.23)

$$\begin{aligned} \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}|f(\xi_j)|\,\big(|g(\sigma_j)-g(\xi_j)|+|g(\xi_j)-g(\sigma_{j-1})|\big) \\ &\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\big(u(\sigma_j)-u(\sigma_{j-1})\big) = u(b)-u(a). \end{aligned}$$

Vzhledem k definici KS-integrálu plyne odtud nerovnost (6.24). □

Věta 6.18 nám umožní dokázat nejjednodušší větu o konvergenci integrálů.

6.20 Věta. *Nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je ohraničená na* $[a,b]$, $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a nechť posloupnost* $\{f_n\}$ *funkcí definovaných na intervalu* $[a,b]$ *je taková, že*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0, \tag{6.25}$$

přičemž existují všechny integrály $\displaystyle\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g$, $n\in\mathbb{N}$. *Potom existuje také integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g. \tag{6.26}$$

D ů k a z . a) Protože f je ohraničená, plyne z předpokladu (6.25), že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že platí

$$\|f_n\| \le \|f\| + 1 < \infty \quad \text{pro všechna } n \ge n_0.$$

Podle věty 6.18 tedy máme

$$\Big|\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g\Big| \le (\|f\| + 1)\,\mathrm{var}_a^b\, g < \infty \quad \text{pro všechna } n \ge n_0.$$

Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty (viz větu 2.19) tedy existují rostoucí posloupnost $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ a číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že platí $n_1 \ge n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g = I. \tag{6.27}$$

b) Označme

$$\left.\begin{aligned} I_k &= \int_a^b f_{n_k} \,\mathrm{d}\, g && \text{pro } k \in \mathbb{N},\\ S_k(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= S_{f_{n_k}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) && \text{pro } k \in \mathbb{N},\ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b],\\ S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) && \text{pro } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{6.28}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Vzhledem k (6.25) a (6.27) můžeme zvolit $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že platí

$$|I_k - I| < \varepsilon \ \text{ a } \ \|f_{n_k} - f\| < \varepsilon \quad \text{pro } k \ge k_0. \tag{6.29}$$

Dále nechť $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr na $[a,b]$ takový, že pro všechna δ_0-jemná značená dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ platí

$$|S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I_{k_0}| < \varepsilon. \tag{6.30}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ máme podle (6.29)

$$\begin{aligned} \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| &= \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\xi_j) - f_{n_{k_0}}(\xi_j)\big)\big(g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})\big)\Big| \\ &< \|f_{n_{k_0}} - f\|\; V(g,\boldsymbol{\sigma}) \le \varepsilon\,\mathrm{var}_a^b\, g. \end{aligned}$$

Tudíž, vzhledem k (6.29) a (6.30), dostáváme

$$\begin{aligned} |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| &\le |S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| + |S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| \\ &< \varepsilon\,(\mathrm{var}_a^b\, g + 2) \end{aligned}$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_0)$. To znamená, že platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f_{n_k}\,\mathrm{d}\,g.$$

c) Konečně, použitím vět 6.8 a 6.18 dostaneme

$$\left|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g - \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\right| \le \|f_n - f\|\operatorname{var}_a^b g \quad \text{pro každé } n\in\mathbb{N}.$$

Platí tedy i (6.26). □

Nyní můžeme formulovat první významnější existenční výsledek.

6.21 Věta. *Nechť* $f\in\mathbb{G}[a,b]$ *a* $g\in\mathbb{BV}[a,b]$. *Potom integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje a platí* (6.22).

D ů k a z . Podle věty 4.8 (ii) existuje posloupnost $\{f_n\}$ jednoduchých skokových funkcí, která konverguje stejnoměrně na $[a,b]$ k funkci f. Podle důsledků 2.16 a 6.16 integrál $\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g$ existuje pro každé $n\in\mathbb{N}$. To znamená, že podle věty 6.20 existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a platí (6.26).

Zřejmě $|f|\in\mathbb{G}[a,b]$. Podle předešlé části důkazu tedy existuje také integrál $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\big[\operatorname{var}_a^x g\big]$, a tudíž podle věty 6.18 platí (6.22). □

6.22 Příklad. Ukážeme si jednu netriviální aplikaci vět 6.19 a 6.21.

Mějme funkci $h\colon[a,b]\to[0,\infty)$ neklesající a zleva spojitou na $(a,b]$. Dokážeme, že pro každé $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ platí

$$\int_a^b h^k\,\mathrm{d}\,h \le \frac{h^{k+1}(b)-h^{k+1}(a)}{k+1}\,. \tag{6.31}$$

Povšimněme si nejprve toho, že podle věty 6.21 integrál na levé straně nerovnosti (6.31) existuje pro každé $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Formule (6.31) triviálně platí, je-li $k=0$ nebo je-li funkce h konstantní. Předpokládejme tedy, že h není konstantní. Buď dáno libovolné $k\in\mathbb{N}$. Podle věty 6.19 potřebujeme najít kalibr δ takový, že

$$\left.\begin{aligned}&(t-\tau)\,h^k(\tau)\,(h(t)-h(\tau)) \le (t-\tau)\,\frac{h^{k+1}(t)-h^{k+1}(\tau)}{k+1}\\ &\qquad\text{pro } \tau\in[a,b] \quad\text{a}\quad t\in(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\cap[a,b]\,.\end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

Po provedení elementární úpravy

$$\frac{h^{k+1}(t)-h^{k+1}(\tau)}{k+1}=\frac{h(t)-h(\tau)}{k+1}\Big[\sum_{i=0}^{k}h^{k-i}(t)\,h^{i}(\tau)\Big] \tag{6.33}$$

si snadno rozmyslíme, že pro daná t,τ bude platit nerovnost v (6.32) bude-li

$$h^{k}(t)\le\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}h^{k-i}(t)\,h^{i}(\tau)\,. \tag{6.34}$$

Vzhledem k monotónnosti funkce h je $h^{k-i}(t)\ge h^{k-i}(\tau)$ pro $t\in(\tau,b]$. Odtud okamžitě plyne, že nerovnost (6.34) platí pro $t\in(\tau,b]$.

Na druhou stranu, díky spojitosti funkce h zleva, pro každé $\varepsilon>0$ a každé $\tau\in(a,b]$ existuje $\delta(\tau)>0$ takové, že platí

$$h^{k-i}(t)>h^{k-i}(\tau)-\frac{\varepsilon}{\Delta}$$

pro každé $t\in(\tau-\delta(\tau),\tau]$ a každé $i\in\{0,1,\dots,k\}$, kde

$$\Delta=\max\{\|h^{i}\|\colon i=1,2,\dots,k\}\,.$$

Zřejmě je $0<\Delta<\infty$. To dále znamená, že je

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}h^{k-i}(t)\,h^{i}(\tau)>\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\big(h^{k}(\tau)-\|h^{i}\|\,\frac{\varepsilon}{\Delta}\big)\ge h^{k}(\tau)-\varepsilon$$

pro každé $\varepsilon>0$, $\tau\in(a,b]$ a $t\in(\tau-\delta(\tau),\tau]$.

Položme ještě $\delta(a)=1$. Potom můžeme naše úvahy shrnout tak, že nerovnost (6.34) platí pro každé $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\tau\in[a,b]$ a $t\in(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))\cap[a,b]$. Platí tedy také (6.32) a pomocí věty 6.19, kde položíme

$$f(t)=h^{k}(t),\;\; g(t)=h(t)\quad\text{a}\quad u(t)=\frac{h^{k+1}(t)}{k+1}\quad\text{pro}\;\; t\in[a,b]\,, \tag{6.35}$$

dostaneme tedy konečně (6.31).

6.23 Cvičení. Dokažte tvrzení:

Nechť funkce $h\colon[a,b]\to[0,\infty)$ *je nerostoucí a zprava spojitá na* $[a,b)$. *Potom pro každé* $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ *platí*

$$\int_a^b h^{k}\,\mathrm{d}\,h\ge\frac{h^{k+1}(b)-h^{k+1}(a)}{k+1}.$$

Následující konvergenční výsledek je tak trochu symetrický k větě 6.20.

6.24 Věta. *Nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je ohraničená na* $[a,b]$, $g\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a nechť posloupnost* $\{g_n\}$ *funkcí definovaných na intervalu* $[a,b]$ *je taková, že platí*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (g_n-g)=0,$$

přičemž existují všechny integrály $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n$, $n\in\mathbb{N}$. *Potom existuje také integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *a platí*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g. \tag{6.36}$$

D ů k a z . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat

$$g_n(a)=g(a)=0 \quad \text{pro všechna } n\in\mathbb{N}.$$

Dále je důkaz podobný důkazu věty 6.20. Existuje $n_0\in\mathbb{N}$ takové, že platí

$$\operatorname{var}_a^b g_n\le \operatorname{var}_a^b g+1 \quad \text{pro všechna } n\ge n_0.$$

Podle věty 6.18 tedy máme

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n\right|\le \|f\|\,(\operatorname{var}_a^b g+1) \quad \text{pro všechna } n\ge n_0$$

a podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty (viz větu 2.19) tedy existují číslo $I\in\mathbb{R}$ a rostoucí posloupnost $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$ takové, že platí $n_1\ge n_0$ a

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_{n_k}=I.$$

Podobně jako v (6.28) označme

$$\left.\begin{aligned} I_k &=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_{n_k} && \text{pro } k\in\mathbb{N},\\ S_k(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= S_{f\Delta g_{n_k}}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) && \text{pro } k\in\mathbb{N},\ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b],\\ S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) && \text{pro } (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b].\end{aligned}\right\} \tag{6.37}$$

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $k_0 \in \mathbb{N}$ a kalibr $\delta_0 \in \mathscr{G}[a,b]$ tak, aby platilo

$$|I_{k_0} - I| < \varepsilon, \quad \operatorname{var}_a^b (g_{n_{k_0}} - g) < \varepsilon$$

a

$$|S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})] - I_{k_0}| < \varepsilon \text{ pro } (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0).$$

Potom pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ máme

$$\begin{aligned}\big|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\big| &= \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1}) - g_{n_{k_0}}(\sigma_j) + g_{n_{k_0}}(\sigma_{j-1})\big]\Big| \\ &\le \|f\|\; V(g_{n_{k_0}} - g, \boldsymbol{\sigma}) \le \|f\| \operatorname{var}_a^b\, (g_{n_{k_0}} - g) \le \varepsilon\, \|f\|.\end{aligned}$$

Pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_0)$ tedy platí

$$\begin{aligned}&|S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I| \\ &\quad \le |S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})| + |S_{k_0}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) - I_{k_0}| + |I_{k_0} - I| \\ &\quad < \varepsilon\, (\|f\| + 2).\end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g = I = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_{n_k}.$$

Konečně, opětovným použitím vět 6.8 a 6.18 dostaneme

$$\Big|\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g_n - \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g\Big| \le \|f\| \operatorname{var}_a^b\, (g_n - g) \quad \text{pro každé } n \in \mathbb{N}.$$

Platí tedy (6.36). □

Předpokládejme, že funkce f je regulovaná na $[a,b]$ a g má konečnou variaci na $[a,b]$. Podle věty 6.21 potom existuje integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$. Pro aplikace potřebujeme ale dokázat, že tento integrál existuje i v symetrické situaci, tj. když $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a $g \in \mathbb{G}[a,b]$. To bude nyní naším cílem.

Podle věty 2.39 můžeme funkci f rozložit na součet spojité funkce $f^{\,\mathrm{C}}$ s konečnou variací a skokové funkce $f^{\,\mathrm{B}}$. Podle cvičení 5.56 a věty 6.13 existuje integrál $\int_a^b f^{\,\mathrm{C}} \,\mathrm{d}\, g$. Vzpomeneme-li si na lemma 2.42, podle kterého existuje posloupnost jednoduchých skokových funkcí $\{f_n^{\mathrm{B}}\} \subset \mathbb{S}[a,b]$ stejnoměrně konvergující k $f^{\,\mathrm{B}}$ na $[a,b]$, nahlédneme, že nám stačí dokázat konvergenční větu, ze které by plynulo, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g = \int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g. \tag{6.38}$$

(Integrály $\displaystyle\int_a^b f_n^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g$ existují podle důsledku 6.16 pro $n\in\mathbb{N}$, nicméně věta 6.20 a ani věta 6.24 platnost rovnosti (6.38) nezaručují.)

Následující věta poskytuje odhad symetrický k odhadu (6.21) z věty 6.18.

6.25 Věta. *Nechť funkce g ohraničená na $[a,b]$ a $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ jsou takové, že existuje integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$. Potom platí*

$$\left|\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\right| \le \big(|f(a)|+|f(b)|+\operatorname{var}_a^b f\big)\,\|g\|. \tag{6.39}$$

D ů k a z. Pro libovolné $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$ máme

$$\begin{aligned}
S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) &= f(\xi_1)\,[g(\sigma_1)-g(a)] + f(\xi_2)\,[g(\sigma_2)-g(\sigma_1)] \\
&\qquad + \cdots + f(\xi_m)\,[g(b)-g(\sigma_{m-1})] \\
&= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) \\
&\qquad - [f(\xi_1)-f(a)]\,g(a) - [f(\xi_2)-f(\xi_1)]\,g(\sigma_1) \\
&\qquad - \cdots - [f(b)-f(\xi_m)]\,g(b) \\
&= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \sum_{j=0}^{m}[f(\xi_{j+1})-f(\xi_j)]\,g(\sigma_j),
\end{aligned}$$

kde $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$, $\xi_0=a$ a $\xi_{m+1}=b$. Odtud plyne, že

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| \le \Big(|f(a)|+|f(b)|+\sum_{j=0}^{m}|f(\xi_{j+1})-f(\xi_j)|\Big)\,\|g\|.$$

Nerovnost

$$|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| \le (|f(a)|+|f(b)|+\operatorname{var}_a^b f)\,\|g\| \tag{6.40}$$

tedy platí pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$. Odtud už tvrzení (6.39) okamžitě plyne. $\square$

Nyní dokážeme konvergenční tvrzení, které zaručí, že bude platit potřebný vztah (6.38).

6.26 Věta. *Nechť funkce g je ohraničená na $[a,b]$, $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a nechť posloupnost $\{f_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$ je taková, že*

$$\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g \text{ existuje pro každé } n\in\mathbb{N} \quad\text{a}\quad \lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{\mathbb{BV}}=0.$$

Potom existuje také integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ a platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g.$$

Důkaz. Podle vět 6.8 a 6.25 je

$$\left|\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g-\int_a^b f_m\,\mathrm{d}\,g\right|\le 2\,\|g\|\,\|f_n-f_m\|_{\mathbb{BV}} \quad\text{pro libovolná } m,n\in\mathbb{N}.$$

Posloupnost $\left\{\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g\right\}$ je tedy cauchyovská a existuje $I\in\mathbb{R}$ takové, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g=I.$$

Ukážeme, že $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=I$. Buď dáno libovolné $\varepsilon>0$. Zvolme $n_0\in\mathbb{N}$ tak, aby platilo

$$\left|\int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}\,g-I\right|<\varepsilon \quad\text{a}\quad \|f_{n_0}-f\|_{\mathbb{BV}}<\varepsilon.$$

Dále zvolme $\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]$ tak, aby pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ platilo

$$\left|S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}\,g\right|<\varepsilon,$$

kde $S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = S_{f_{n_0}\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$. Podle (6.40) pro libovolné $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}(\delta_\varepsilon)$ máme

$$\begin{aligned} &\big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| \\ &\quad \le \Big(|f(a) - f_{n_0}(a)| + |f(b) - f_{n_0}(b)| + \operatorname{var}_a^b (f - f_{n_0})\Big)\,\|g\| \\ &\quad \le 2\,\|f - f_{n_0}\|_{\mathbb{BV}}\,\|g\|. \end{aligned}$$

Souhrnem, pro libovolné $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$ dostáváme

$$\begin{aligned} &|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I| \\ &\quad \le \big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\big| + \Big|S_{n_0}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - \int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}\,g\Big| \\ &\qquad\qquad + \Big|\int_a^b f_{n_0}\,\mathrm{d}\,g - I\Big| \\ &\quad < 2\,\|f - f_{n_0}\|_{\mathbb{BV}}\,\|g\| + 2\,\varepsilon < \varepsilon\,2\,(\|g\| + 1). \end{aligned}$$

Odtud plyne rovnost

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g.$$

□

6.27 Poznámka. Ve zbývajících tvrzeních tohoto odstavce a jejich důkazech používáme důsledně konvence (x) z Úmluv a označení a klademe $f(a-) = f(a)$ a $f(b+) = f(b)$, tj.

$$\Delta^- f(a) = \Delta^+ f(b) = 0,\ \ \Delta f(a) = \Delta^+ f(a),\ \ \Delta f(b) = \Delta^- f(b) \qquad (6.41)$$

pro každou funkci f regulovanou na $[a,b]$. V tomto smyslu je třeba i rozumět symbolům pro funkce $f(x-)$, resp. $f(x+)$ definované na $[a,b]$. Připomeňme, že je-li f regulovaná na $[a,b]$, pak podle důsledku 4.10 jsou také funkce $f(x-)$ a $f(x+)$ regulované na $[a,b]$ a platí (4.4) a (4.5).

Nyní už budeme umět dokázat kýžený existenční výsledek.

6.28 Věta. *Jestliže* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, $g \in \mathbb{G}[a,b]$, *pak integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje a platí* (6.39).

D ů k a z. Nechť $g\in\mathbb{G}[a,b]$, $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ a D je množina bodů nespojitosti funkce f v $[a,b]$. Podle věty 2.21 je D nejvýše spočetná. Předpokládejme, že je nekonečná, tj. $D=\{d_k\}$.

Nechť $f=f^{\,\mathrm{C}}+f^{\,\mathrm{B}}$ je Jordanův rozklad funkce f na spojitou část $f^{\,\mathrm{C}}$ a skokovou část $f^{\,\mathrm{B}}$ definovanou jako f_2 v (2.26). Položme

$$f_n^{\mathrm{B}}(x)=\sum_{k=1}^{n}\Delta^{-}f(d_k)\,\chi_{[d_k,b]}(x)+\sum_{k=1}^{n}\Delta^{+}f(d_k)\,\chi_{(d_k,b]}(x)$$

pro $n\in\mathbb{N}$ a $x\in[a,b]$. Zřejmě $f_n^{\mathrm{B}}\in\mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a podle lemmatu 2.42 platí

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n^{\mathrm{B}}-f^{\,\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}}=\lim_{n\to\infty}\operatorname{var}_a^b(f^{\,\mathrm{B}}-f_n^{\mathrm{B}})=0.$$

Dále, podle důsledku 6.16, integrál $\displaystyle\int_a^b f_n^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g$ existuje pro každé $n\in\mathbb{N}$. Integrál $\displaystyle\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g$ tedy existuje podle věty 6.26.

Podle cvičení 5.56 a věty 6.13 existuje také integrál $\displaystyle\int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}\,g$ a integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ tedy existuje podle věty 6.8. Konečně, podle věty 6.25 platí také (6.39).

Modifikace důkazu pro případ, že množina je D konečná, je zřejmá. □

Přímým důsledkem vět 4.4, 6.8 a 6.28 je následující konvergenční tvrzení.

6.29 Důsledek. *Jestliže* $g_n\in\mathbb{G}[a,b]$ *pro* $n\in\mathbb{N}$ *a* $\lim\limits_{n\to\infty}\|g_n-g\|=0$, *pak pro každou funkci* $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g_n=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g. \tag{6.42}$$

Následující tvrzení navazuje na důkaz věty 6.28 a dává návod k výpočtu integrálu $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$, je-li známa hodnota integrálu $\displaystyle\int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}\,g$, kde $f^{\,\mathrm{C}}$ značí spojitou část funkce f.

6.30 Důsledek. *Jestliže* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, $g \in \mathbb{G}[a,b]$, D *je množina bodů nespojitosti funkce* f *v* $[a,b]$ *a* $f^{\,\mathrm{C}}$ *je spojitá část funkce* f, $f^{\,\mathrm{C}}(a) = f(a)$, *pak*

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = \int_a^b f^{\,\mathrm{C}}\,\mathrm{d}\,g \\ &\qquad + \sum_{d \in D} \big[\Delta^- f(d)\,(g(b) - g(d-)) + \Delta^+ f(d)\,(g(b) - g(d+))\big]. \end{aligned}\right\} \tag{6.43}$$

D ů k a z . Podle věty 2.21 je množina D nejvýše spočetná. Předpokládejme, že je nekonečná, tj. $D = \{d_k\}$. Označme $f^{\,\mathrm{B}} = f - f^{\,\mathrm{C}}$ a

$$f_n^{\,\mathrm{B}}(x) = \sum_{k=1}^n \big[\Delta^- f(d_k)\,\chi_{[d_k,b]}(x) + \Delta^+ f(d_k)\,\chi_{(d_k,b]}(x)\big] \text{ pro } n \in \mathbb{N} \text{ a } x \in [a,b]\,.$$

Podle lemmatu 2.42 je

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n^{\,\mathrm{B}} - f^{\,\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}} = \lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (f^{\,\mathrm{B}} - f_n^{\,\mathrm{B}}) = 0$$

a podle věty 6.26 tedy platí

$$\int_a^b f^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g\,. \tag{6.44}$$

Dále podle (6.16), (6.17) a věty 6.8, máme

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f_n^{\,\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g \\ &\quad = \sum_{k=1}^n \Big(\Delta^- f(d_k)\,[g(b) - g(d_k-)] + \Delta^+ f(d_k)\,[g(b) - g(d_k+)]\Big) \end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Na druhou stranu, podle důsledku 2.27 je

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^\infty \big|\Delta^- f(d_k)\,(g(b) - g(d_k-)) + \Delta^+ f(d_k)\,(g(b) - g(d_k+))\big| \\ &\qquad \le 2\,\|g\| \sum_{k=1}^\infty \Big(|\Delta^- f(d_k)| + |\Delta^+ f(d_k)|\Big) \le 2\,\|g\|\,(\operatorname{var}_a^b f) < \infty\,. \end{aligned}$$

Díky (6.44) a (6.45) tudíž dostáváme

$$\left.\begin{aligned}&\int_a^b f^{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\,g\\&\quad=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\Delta^- f(d_k)\,(g(b)-g(d_k-))+\Delta^+ f(d_k)\,(g(b)-g(d_k+))\Big).\end{aligned}\right\}\quad(6.46)$$

Platí tedy (6.43).

Modifikace důkazu pro případ, že množina je D konečná, je zřejmá. □

V situaci symetrické k důsledku 6.30 máme

6.31 Lemma. *Jestliže* $f\in\mathbb{G}[a,b]$, $g\in\mathbb{BV}[a,b]$, D *je množina bodů nespojitosti funkce* g *v* $[a,b]$ *a* g^{C} *je spojitá část funkce* g, $g^{\mathrm{C}}(a)=g(a)$, *pak*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g^{\mathrm{C}}+\sum_{d\in D} f(d)\,\Delta g(d),\tag{6.47}$$

kde $\Delta\,g(a)=\Delta^+\,g(a)$ *a* $\Delta\,g(b)=\Delta^-\,g(b)$.

D ů k a z je analogický důkazu důsledku 6.30 a je ponechán čtenáři jako cvičení. □

6.32 Cvičení. Dokažte lemma 6.31. (Návod: využijte lemma 2.42 a větu 6.20 a postupujte jako při důkazu důsledku 6.30.)

6.3 Integrace per-partes

Pro důkazy důsledku 6.30 a lemmatu 6.31 byly užitečné příklady 6.15. Následující technická lemmata jsou potřebná pro důkaz věty o integraci per-partes, která je naším dalším významnějším cílem. Také v jejich důkazech budou příklady 6.15 využity.

I v tomto odstavci důsledně užíváme konvenci (x) z Úmluv a označení. Připomeňme tedy poznámku 6.27 a vztahy (6.41).

6.33 Lemma. *Nechť* $h\in\mathbb{BV}[a,b]$, $c\in\mathbb{R}$ *a* $D\subset[a,b]$ *je nejvýše spočetná množina taková, že platí*

$$h(x)=c\quad\textit{pro}\ \ x\in[a,b]\setminus D.\tag{6.48}$$

Potom pro každou funkci $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *platí*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, h = f(b)\, h(b) - f(a)\, h(a) - c\,\big(f(b) - f(a)\big) \tag{6.49}$$

a

$$\int_a^b h \,\mathrm{d}\, f = c\,[f(b) - f(a)\,] + \sum_{d \in D} [h(d) - c\,]\,\Delta f(d), \tag{6.50}$$

kde, jako obvykle, $\Delta f(a) = \Delta^+ f(a)$, $\Delta f(b) = \Delta^- f(b)$ *a součet na pravé straně vztahu* (6.50) *je třeba chápat ve smyslu uvedeném v poznámce 2.26.*

D ů k a z . Nechť $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a nechť $h \in \mathbb{BV}[a,b]$ splňuje (6.48). Potom musí platit (rozmyslete si důvody)

$$h(x-) = h(x+) = h(a+) = h(b-) = c \quad \text{pro každé } x \in (a,b),$$

neboli

$$\Delta^- h(x) = h(x) - c = -\Delta^+ h(x) \;\text{ pro }\; x \in (a,b),$$

$$\Delta^+ h(a) = h(a) - c \quad \text{a} \quad \Delta^- h(b) = h(b) - c.$$

Předpokládejme, že množina D je nekonečná a označme její prvky tak, že bude $D = \{d_k\}$. Vzhledem k tomu, že h má konečnou variaci, musí platit (viz důsledek 2.27).

$$\sum_{k=1}^{\infty} |h(d_k) - c| = \sum_{k=1}^{\infty} |\Delta^- h(d_k)| + |\Delta^+ h(d_k)| \le \operatorname{var}_a^b h < \infty.$$

Odtud plyne, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} (h(d_k) - c)\, \chi_{[d_k]}(x)$ absolutně konverguje pro $x \in [a,b]$. Skoková funkce

$$h^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (h(d_k) - c)\, \chi_{[d_k]}(x) \quad \text{pro }\; x \in [a,b]$$

je tedy korektně definována a má konečnou variaci na $[a,b]$ (viz odstavce 2.6 a 2.6). Funkci h můžeme vyjádřit ve tvaru $h = h^{\mathrm{C}} + h^{\mathrm{B}}$, kde $h^{\mathrm{C}}(x) = c$ je její spojitá část a h^{B} je její skoková část.

Definujme

$$h_n^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{k=1}^{n} (h(d_k) - c)\, \chi_{[d_k]}(x) \quad \text{pro} \;\; x \in [a,b] \;\; \text{a} \;\; n \in \mathbb{N}\,.$$

Potom podle lemmatu 2.42 platí $\lim_{n\to\infty} \|h_n^{\mathrm{B}} - h^{\mathrm{B}}\|_{\mathbb{BV}} = 0$ a podle vět 6.24 a 6.26 dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f\, \mathrm{d}\, h_n = \int_a^b f\, \mathrm{d}\, h \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n\, \mathrm{d}\, f = \int_a^b h\, \mathrm{d}\, f. \tag{6.51}$$

Na druhou stranu, podle příkladů 6.15 (ii), (iii) máme

$$\int_a^b f\, \mathrm{d}\, h_n = f(b)\, h_n(b) - f(a)\, h_n(a) - c\, \big(f(b) - f(a)\big)$$

a

$$\int_a^b h_n\, \mathrm{d}\, f = c\, [\, f(b) - f(a)\,] + \sum_{k=1}^{n} [h(d_k) - c\,]\, \Delta f(d_k)$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Odtud už vzhledem k (6.51) vztahy (6.49) a (6.50) okamžitě plynou.

Modifikace důkazu pro případ, že množina je D konečná, je zřejmá. □

6.34 Cvičení. Pomocí lemmatu 6.33 dokažte, že je-li $\tau \in (a,b)$, $\varkappa \in \mathbb{R}$ a

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{když} \;\; t < \tau, \\ \varkappa & \text{když} \;\; t = \tau, \\ 1 & \text{když} \;\; t > \tau, \end{cases}$$

pak $\int_a^b \varphi\, g\, \mathrm{d}\, g = \varphi(\tau)\, \varkappa$ pro libovolnou funkci $\varphi \in \mathbb{BV}[a,b]$.

(Návod: položte $h(t) = \varphi(t)\, g(t)$ pro $t \in [a,b]$ a spočtěte pomocí lemmatu integrály $\int_a^\tau h\, \mathrm{d}\, g$ a $\int_\tau^b h\, \mathrm{d}\, g$.)

6.35 Lemma. *Nechť $h \in \mathbb{G}[a,b]$, $c \in \mathbb{R}$ a nechť $D \subset [a,b]$ je nejvýše spočetná množina taková, že platí* (6.48). *Potom pro každou funkci $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ je*

$$\int_a^b g\, \mathrm{d}\, h = g(b)\, h(b) - g(a)\, h(a) - c\, \big(g(b) - g(a)\big) \tag{6.52}$$

a

$$\int_a^b h\,\mathrm{d}\,g = c\,[g(b)-g(a)\,] + \sum_{d\in D}\,[h(d)-c\,]\,\Delta g(d), \tag{6.53}$$

kde opět $\Delta g(a)=\Delta^+\,g(a),\ \Delta g(b)=\Delta^-\,g(b)$ *a součet na pravé straně* (6.53) *je třeba chápat ve smyslu uvedeném v poznámce* 2.26*.*

D ů k a z . Předpokládejme, že množina D je nekonečná, tj. $D=\{d_k\}$.

Funkce h splňuje (6.48) právě tehdy, když

$$h(x) = c + \begin{cases} h(x)-c, & \text{když } x\in D\,,\\ 0, & \text{když } x\notin D\,. \end{cases}$$

Povšimněme si, že odtud, podobně jako v důkazu lemmatu 6.33, plyne, že

$$h(x-)=h(x+)=h(a+)=h(b-)=c \quad \text{pro každé } x\in(a,b)$$

a

$$\Delta^- h(x) = h(x)-c = -\Delta^+ h(x) \quad \text{pro každé } x\in(a,b)\,.$$

Pro $n\in\mathbb{N}$ označme $D_n = \{d_k\}_{k=1}^n$ a

$$h_n(x) = c + \begin{cases} h(x)-c & \text{když } x\in D_n\,,\\ 0, & \text{když } x\notin D_n\,. \end{cases}$$

Potom

$$h_n(x) = c + \sum_{k=1}^n (h(d_k)-c)\,\chi_{[d_k]}(x) \quad \text{pro } x\in[a,b] \text{ a } n\in\mathbb{N} \tag{6.54}$$

a

$$|h(x)-h_n(x)| = \begin{cases} |h(x)-c|, & \text{když } x\in D\setminus D_n\,,\\ 0, & \text{když } x\notin D\setminus D_n\,. \end{cases}$$

Buď dáno $\varepsilon>0$. Protože množina těch $k\in\mathbb{N}$, pro něž je

$$|\Delta^- h(x) = |\Delta^+ h(x)| = |h(d_k)-c| \ge \varepsilon\,,$$

může mít podle důsledku 4.11 jenom nejvýše konečný počet prvků, existuje $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ takové, že je $\|h_n-h\|<\varepsilon$ pro každé $n\ge n_\varepsilon$. Jinými slovy,

$$\lim_{n\to\infty}\|h_n-h\| = 0\,. \tag{6.55}$$

Dále, podle (6.54), věty 6.8 a formule (6.15) (viz též cvičení 6.17) určíme pro každé $n \in \mathbb{N}$ integrály

$$\begin{aligned}\int_a^b g \,\mathrm{d}\, h_n &= \sum_{k=1}^{n} (h(d_k) - c) \int_a^b g \,\mathrm{d}\, \chi_{[d_k]} = g(b)\,[h_n(b) - c\,] - g(a)\,[h_n(a) - c\,] \\ &= g(b)\, h_n(b) - g(a)\, h_n(a) - c\,[g(b) - g(a)\,].\end{aligned}$$

Podle (6.55) a podle důsledku 6.29 tedy máme

$$\int_a^b g \,\mathrm{d}\, h = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g \,\mathrm{d}\, h_n = g(b)\, h(b) - g(a)\, h(a) - c\,[g(b) - g(a)\,],$$

tj. platí (6.52).

Podobně, podle (6.54), věty 6.8 a formulí (6.17), (6.18) a (6.19) máme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\int_a^b h_n \,\mathrm{d}\, g &= c\,(g(b) - g(a)) + \sum_{k=1}^{n} (h(d_k) - c) \int_a^b \chi_{[d_k]} \,\mathrm{d}\, g \\ &= c\,(g(b) - g(a)) + \sum_{k=1}^{n} (h(d_k) - c)\, \Delta\, g(d_k)\,,\end{aligned}$$

kde $\Delta g(d) = \Delta^-\, g(b)$ jestliže $d = b$ a $\Delta g(d) = \Delta^+\, g(a)$ jestliže $d = a$. Současně ovšem platí podle (6.55) a věty 6.20

$$\begin{aligned}\int_a^b h_n \,\mathrm{d}\, g &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b h_n \,\mathrm{d}\, g \\ &= c\,(g(b) - g(a)) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (h(d_k) - c)\, \Delta\, g(d_k) \\ &= c\,(g(b) - g(a)) + \sum_{k=1}^{\infty} (h(d_k) - c)\, \Delta\, g(d_k)\,,\end{aligned}$$

tj. platí (6.53).

Modifikace důkazu pro případ, že množina je D konečná, je zřejmá. □

Nyní už můžeme dokázat větu o integraci per-partes pro KS-integrály.

6.36 Věta (VĚTA O INTEGRACI PER-PARTES).
Jestliže $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, *pak existují oba integrály*

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g \quad a \quad \int_a^b g \,\mathrm{d}\, f$$

a platí

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g + \int_a^b g \,\mathrm{d}\, f &= f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) \\ &\quad + \sum_{x \in [a,b]} \Big(\Delta^- f(x)\, \Delta^- g(x) - \Delta^+ f(x)\, \Delta^+ g(x)\Big), \end{aligned}\right\} \tag{6.56}$$

kde $\Delta^- f(a) = \Delta^- g(a) = \Delta^+ f(b) = \Delta^+ g(b) = 0$ *a součet na pravé straně je třeba chápat ve smyslu uvedeném v poznámce 2.26.*

D ů k a z. Integrál $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ existuje podle věty 6.21 a integrál $\int_a^b g \,\mathrm{d}\, f$ existuje podle věty 6.28. Dále, podle důsledku 4.10 jsou funkce $f(x-)$ a $\Delta^- f(x)$ regulované na $[a,b]$. Navíc, podle věty 2.25 máme

$$\sum_{x \in [a,b]} |\Delta^+ g(x)| < \infty.$$

Funkce $\Delta^+ g(x)$ je tedy podle definice 2.33 skoková funkce $(\Delta^+ g \in \mathbb{B}[a,b])$ a podle věty 2.35 má konečnou variaci na $[a,b]$. Zřejmě má tudíž konečnou variaci na $[a,b]$ i funkce $g(x+) = g(x) + \Delta^+ g(x)$. Podle vět 6.21 a 6.28 tedy existují integrály $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, [\Delta^+ g]$, $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, [g(x+)]$, $\int_a^b g \,\mathrm{d}\, [\Delta^- f)]$ a $\int_a^b g(x) \,\mathrm{d}\, [f(x-)]$. Můžeme tedy provést úpravu

$$\begin{aligned} &\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g + \int_a^b g \,\mathrm{d}\, f \\ &\qquad = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, [g(x+)] + \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}\, [f(x-)] \\ &\qquad\qquad - \int_a^b f \,\mathrm{d}\, [\Delta^+ g] + \int_a^b g \,\mathrm{d}\, [\Delta^- f]. \end{aligned}$$

Pomocí důsledku 4.10 snadno ověříme, že funkce $\Delta^+ g(x)$ splňuje (6.48) (kde $c = 0$ a $h(b) = 0$). Podle lemmatu 6.33 tedy dostáváme

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}\, [\Delta^+ g(x)] = -f(a)\, \Delta^+ g(a).$$

Analogicky, podle lemmatu 6.35 je $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\,[\Delta^- f(x)] = g(b)\,\Delta^- f(b)$ čili

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,] + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[\,f(x)\,] \\ &\quad = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x+)\,] + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[\,f(x-)\,] \\ &\qquad\qquad + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \Delta^- f(b)\,g(b). \end{aligned}\right\} \tag{6.57}$$

První integrál na pravé straně můžeme upravit na

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x+)\,] = \int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[\,g(x+)\,] + \int_a^b \Delta^- f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x+)\,]. \tag{6.58}$$

Funkce $h(x) = g(x+) = g(x) + \Delta^+ g(x)$ má zřejmě konečnou variaci na $[a,b]$, $h(x-) = g(x-)$ pro $x \in [a,b]$ a $h(x+) = h(x) = g(x+)$ podle důsledku 4.10, tj. $\Delta h(x) = \Delta g(x)$ pro $x \in [a,b]$. Protože funkce $\Delta^- f(x)$ je podle důsledku 4.10 regulovaná na $[a,b]$, dostaneme podle lemmatu 6.35

$$\int_a^b \Delta^- f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x+)\,] = \sum_{x \in [a,b]} \Delta^- f(x)\,\Delta g(x), \tag{6.59}$$

když položíme $h(x) = \Delta^- f(x)$ a na místě f bude regulovaná funkce

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x+), & \text{když } x \in [a,b), \\ g(b), & \text{když } x = b. \end{cases}$$

Analogicky, podle lemmatu 6.35 je

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}[\,f(x-)\,] = \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[\,f(x-)\,] - \int_a^b \Delta^+ g(x)\,\mathrm{d}[\,f(x-)\,] \\ &\quad = \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[\,f(x-)\,] - \sum_{x \in [a,b]} \Delta^+ g(x)\,\Delta f(x). \end{aligned}\right\} \tag{6.60}$$

Podle důsledku 4.10 je funkce $f(x-)$ spojitá zleva na $(a,b]$ a $g(x+)$ je spojitá zprava na $[a,b)$. Podle věty 5.55 (ii) tudíž existují oba σRS-integrály

$$(\sigma)\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[\,g(x+)\,] \quad \text{a} \quad (\sigma)\int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[\,f(x-)\,]$$

a podle věty 6.13 tedy existují také oba KS-integrály

$$\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[\,g(x+)\,] \quad \text{a} \quad \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[\,f(x-)\,].$$

Podle věty o integraci per-partes pro RS-integrály (věta 5.50) máme

$$\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}[\,g(x+)\,] + \int_a^b g(x+)\,\mathrm{d}[\,f(x-)\,] = f(b-)\,g(b) - f(a)\,g(a+). \tag{6.61}$$

Dosazením (6.58)–(6.61) do (6.57) dostaneme dále

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g + \int_a^b g\,\mathrm{d}\,f \\
&\quad = f(b-)\,g(b) - f(a)\,g(a+) + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \Delta^- f(b)\,g(b) \\
&\qquad + \sum_{x\,\in\,[a,b]} \Big(\Delta^- f(x)\,[\Delta^- g(x) + \Delta^+ g(x)] - [\Delta^- f(x) + \Delta^+ f(x)]\,\Delta^+ g(x)\Big) \\
&\quad = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) + \sum_{x\,\in\,[a,b]} \Big(\Delta^- f(x)\,\Delta^- g(x) - \Delta^+ f(x)\,\Delta^+ g(x)\Big).
\end{aligned}$$

Dokázali jsme tedy, že (6.56) platí. □

6.37 Poznámka. Pro KS-integrál tedy neplatí věta o integraci per-partes v podobě, v jaké ji známe pro RS-integrály (viz větu 5.50). Je to způsobeno tím, že obor funkcí pro které existuje KS-integrál je podstatně širší než obor funkcí, pro které existují RS-integrály.

6.38 Cvičení. Dokažte, že za předpokladů věty 6.36 platí

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_a^b f(x+)\,\mathrm{d}g(x-) + f(b)\,\Delta^- g(b) - \sum_{x\,\in\,(a,b)} \Delta^+ f(x)\,\Delta g(x)$$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = (\sigma)\int_a^b f(x-)\,\mathrm{d}g(x+) + f(a)\,\Delta^+ g(a) + \sum_{x\,\in\,(a,b)} \Delta^- f(x)\,\Delta g(x).$$

(Návod: využijte formule odvozené v průběhu důkazu věty 6.36.)

6.4 Saksovo-Henstockovo lemma a některé jeho důsledky

6.39 Lemma (SAKS-HENSTOCK). *Nechť* $f,\, g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *jsou takové, že integrál* $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje. Nechť* $\varepsilon>0$ *je dáno a nechť* $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ *je kalibr na* $[a,b]$ *takový, že platí*

$$\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\varepsilon\quad \textit{pro všechna}\ (\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta).$$

Potom pro libovolný systém $\Big\{([s_j,t_j],\theta_j): j=1,2,\dots,n\Big\}$ *takový, že*

$$\left.\begin{aligned} &a\le s_1\le\theta_1\le t_1\le s_2\le\cdots\le s_n\le\theta_n\le t_n\le b,\\ &[s_j,t_j]\subset[\theta_j-\delta(\theta_j),\theta_j+\delta(\theta_j)]\quad \textit{pro } j=1,2,\dots,n,\end{aligned}\right\}\tag{6.62}$$

platí nerovnost

$$\Big|\sum_{j=1}^n\Big[f(\theta_j)\,[g(t_j)-g(s_j)]-\int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big]\Big|\le\varepsilon.\tag{6.63}$$

D ů k a z . Nechť $\Big\{([s_j,t_j],\theta_j): j=1,2,\dots,n\Big\}$ je systém splňující (6.62). Buď dáno $\eta>0$. Označme $t_0=a,\ s_{n+1}=b$. Je-li $j\in\{0,1,\dots,n\}$ a $t_j<s_{j+1}$, pak, vzhledem k poznámce 6.5, existují na intervalu $[t_j,s_{j+1}]$ kalibr δ_j a δ_j-jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)$ takové, že $\delta_j(x)\le\delta(x)$ pro každé $x\in[t_j,s_{j+1}]$ a

$$\Big|S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)-\int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\frac{\eta}{n+1}.\tag{6.64}$$

Nyní sestavme δ-jemné značené dělení $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^n f(\theta_j)\,[g(t_j)-g(s_j)]+\sum_{j=0}^n S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)=S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta}).$$

(Je-li $t_j=s_{j+1}$, klademe $S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)=0.$) Vzhledem k předpokladům lemmatu tedy máme

$$\Big|\sum_{j=1}^{n}\Big(f(\theta_j)\,[g(t_j)-g(s_j)]-\int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big)+\sum_{j=0}^{n}\Big(S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)-\int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|$$
$$=\Big|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\varepsilon.$$

Odtud a z (6.64) dostáváme

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} f(\theta_j)\,[g(t_j)-g(s_j)]-\int_{s_j}^{t_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big|$$
$$\le\Big|S(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})-\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|+\Big|\sum_{j=0}^{n}\Big(S(\boldsymbol{\sigma}^j,\boldsymbol{\xi}^j)-\int_{t_j}^{s_{j+1}} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|<\varepsilon+\eta.$$

Protože $\eta>0$ bylo libovolné, platí (6.63). □

6.40 Věta. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje a* $c\in[a,b]$. *Potom platí*

$$\lim_{\substack{x\to c\\ x\in[a,b]}}\Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g+f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big)=\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g. \tag{6.65}$$

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon>0$ a nechť $\delta_\varepsilon\in\mathscr{G}[a,b]$ je takový kalibr, že

$$\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g\Big|<\varepsilon\quad\text{platí pro všechna }(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta_\varepsilon).$$

Pro každé $x\in(c,c+\delta_\varepsilon(c))\cap[a,b]$ vyhovuje systém $\{([s_1,t_1],\theta_1)\}$, kde $t_1=x$ a $s_1=\theta_1=c$, podmínkám (6.62). Podle Saksova-Henstockova lemmatu (viz Lemma 6.39) tedy máme

$$\Big|f(c)\,[g(x)-g(c)]-\int_c^x f\,\mathrm{d}\,g\Big|\le\varepsilon. \tag{6.66}$$

Podobně, je-li $x\in(c-\delta_\varepsilon(c),c)\cap[a,b]$, pak použitím lemmatu 6.39 na systém $\{[x,c],c\}$ dostaneme nerovnost

$$\Big|f(c)\,[g(c)-g(x)]-\int_x^c f\,\mathrm{d}\,g\Big|\le\varepsilon.$$

Pro každé $x \in (c-\delta_\varepsilon(c), c+\delta_\varepsilon(c)) \cap [a,b]$ tedy platí nerovnost (6.66), a tudíž

$$\Big|\int_a^c f\,\mathrm{d}\,g - \int_a^x f\,\mathrm{d}\,g - f(c)\,[g(c)-g(x)]\Big|$$
$$= \Big|\int_c^x f\,\mathrm{d}\,g - f(c)\,[g(x)-g(c)]\Big| \le \varepsilon,$$

tj. platí (6.65). □

6.41 Důsledek. *Nechť* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje,* $g \in \mathbb{G}[a,b]$ *a nechť funkce* $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *je definována předpisem* $h(x) = \int_a^x f\,\mathrm{d}\,g$ *pro* $x \in [a,b]$. *Potom* $h \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$h(t+) = h(t) + f(t)\,\Delta^+ g(t) \quad a \quad h(s-) = h(s) - f(s)\,\Delta^- g(s)$$

pro $t \in [a,b)$ *a* $s \in (a,b]$. □

6.5 Neurčitý integrál

6.42 Věta (HAKE). (i) *Nechť* $\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každé* $x \in [a,b)$ *a nechť*

$$\lim_{x\to b-}\Big(\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g + f(b)\,[g(b)-g(x)]\Big) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$.

(ii) *Nechť* $\int_x^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje pro každé* $x \in (a,b]$ *a nechť*

$$\lim_{x\to a+}\Big(\int_x^b f\,\mathrm{d}\,g + f(a)\,[g(x)-g(a)]\Big) = I \in \mathbb{R}.$$

Potom $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I$.

D ů k a z . (i) a) Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\Delta > 0$ tak, aby platilo

$$\Big| \int_a^x f \,\mathrm{d}\, g + f(b)\,[g(b) - g(x)] - I\Big| < \varepsilon \quad \text{pro každé } x \in [b-\Delta, b). \tag{6.67}$$

Položme $x_k = b - \dfrac{b-a}{k+1}$ pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Potom posloupnost $\{x_k\}$ je rostoucí, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = b$ a

$$\left.\begin{aligned} &\forall\, k \in \mathbb{N} \ \ \exists\, \delta_k \in \mathscr{G}[a, x_k]: \\ &\qquad (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) \in \mathscr{A}(\delta_k; [a, x_k]) \implies \Big|S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - \int_a^{x_k} f \,\mathrm{d}\, g\Big| < \frac{\varepsilon}{2^k}. \end{aligned}\right\} \tag{6.68}$$

b) Definujme kalibr δ_0 na $[a, b)$ tak, aby platilo

$$\delta_0(s) \le \delta_k(s) \quad \text{a} \quad [s - \delta_0(s), s + \delta_0(s)] \subset [a, x_k]$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$ a každé $s \in [x_{k-1}, x_k)$.

Dále pro každé $s \in [a, b)$ označme symbolem $\kappa(s)$ jednoznačně určené přirozené číslo k takové, že $s \in [x_{k-1}, x_k)$.

c) Dokážeme, že platí

$$\left.\begin{aligned} &\Big|S(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}) - \int_a^x f \,\mathrm{d}\, g\Big| < \varepsilon \\ &\qquad\qquad \text{pro všechna } x \in [a, b) \ \text{ a } \ (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathscr{A}(\delta_0; [a, x]). \end{aligned}\right\} \tag{6.69}$$

Nechť je tedy dáno $x \in [a, b)$ a nechť $p \in \mathbb{N}$ je takové, že $x \in [x_{p-1}, x_p)$ (tj. $p = \kappa(x)$). Dále nechť $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\theta})$ je libovolné δ_0-jemné značené dělení intervalu $[a, x]$. Označme $\nu(\boldsymbol{\tau}) = r$. Pro každé $k \in \mathbb{N} \cap [1, p]$ a každé $j \in \mathbb{N} \cap [1, r]$ takové, že $\kappa(\theta_j) = k$, máme

$$\theta_j - \delta_k(\theta_j) \le \theta_j - \delta_0(\theta_j) \le \tau_{j-1} < \tau_j \le \theta_j + \delta_0(\theta_j) \le \theta_j + \delta_k(\theta_j).$$

Vzhledem k (6.68) vidíme, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ systém

$$\{([\tau_{j-1}, \tau_j], \theta_j) : j = 1, 2, \ldots, r, \ \kappa(\theta_j) = k\}$$

splňuje předpoklady lemmatu 6.39 na místě $\{([s_j, t_j], \theta_j) : j = 1, 2, \ldots, n\}$. Platí tedy

$$\Big| \sum_{\kappa(\theta_j) = k} f(\theta_j)\,[g(\tau_j) - g(\tau_{j-1})] - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f \,\mathrm{d}\, g\Big| \le \frac{\varepsilon}{2^k} \ \text{ pro každé } k \in \{1, 2, \ldots, p\}.$$

Konečně,

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{j=1}^{r} f(\theta_j)\,[g(\tau_j)-g(\tau_{j-1})] - \int_a^x f\,\mathrm{d}\,g\Big| \\
&\quad = \Big|\sum_{k=1}^{p}\sum_{\kappa(\theta_j)=k}\Big(f(\theta_j)\,[g(\tau_j)-g(\tau_{j-1})] - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big| \\
&\quad \le \sum_{k=1}^{p}\Big|\sum_{\kappa(\theta_j)=k}\Big(f(\theta_j)\,[g(\tau_j)-g(\tau_{j-1})] - \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big| < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

tj. platí (6.69).

d) Položme $\delta^*(x) = \min\{b-x,\,\delta_0(x)\}$ pro $x \in [a,b)$, $\delta^*(x) = \Delta$ pro $x = b$. Nechť $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ je libovolné δ^*-jemné značené dělení intervalu $[a,b]$ a $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom musí platit $\xi_m = \sigma_m = b$, $\sigma_{m-1} \in (b-\Delta, b)$ a

$$
\begin{aligned}
\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I\Big| &= \Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})] + f(b)\,[g(b)-g(\sigma_{m-1})] - I\Big| \\
&\le \Big|\sum_{j=1}^{m-1} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})] - \int_a^{\sigma_{m-1}} f\,\mathrm{d}\,g\Big| \\
&\qquad + \Big|\int_a^{\sigma_{m-1}} f\,\mathrm{d}\,g + f(b)\,[g(b)-g(\sigma_{m-1})] - I\Big|.
\end{aligned}
$$

Vzhledem k (6.69) a (6.67) (kde položíme $x = \sigma_{m-1}$) tedy dostáváme konečně

$$
\Big|S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) - I\Big| < 2\,\varepsilon, \quad \text{tj.} \quad \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = I.
$$

Důkaz tvrzení (ii) se provede analogicky a ponecháváme ho čtenáři jako cvičení. □

6.43 Cvičení. Dokažte tvrzení (ii) věty 6.42 a jeho následující variantu:

Předpokládejme, že integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ *existuje. Nechť je dáno* $x \in [a,b)$ *a nechť* $\displaystyle\lim_{t\to x+}\Big(\int_a^t f\,\mathrm{d}\,g - f(x)\,[g(t)-g(x)]\Big) = I \in \mathbb{R}$. *Potom* $\displaystyle\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g = I$.

6.44 Příklady. Pomocí Hakeovy věty můžeme snadno a univerzálním způsobem odvodit vzorce, které jsme v příkladech 6.15 odvodili přímo z definice pomocí vhodné volby kalibru. Např. formuli $\int_a^b f \,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} = f(\tau)$, kde $\tau \in (a,b]$ a f je libovolná, odvodíme takto

$$\begin{aligned}\int_a^b f \,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} &= \int_a^\tau f \,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]}\\ &= \lim_{t\to\tau-}\Big(\int_a^t f \,\mathrm{d}\,\chi_{[\tau,b]} + f(\tau)\,[\chi_{[\tau,b]}(\tau) - \chi_{[\tau,b]}(t)]\Big) = f(\tau).\end{aligned}$$

Podobně, pro $\tau \in [a,b)$ a $g \in \mathbb{G}[a,b]$ dostaneme pomocí Hakeovy věty

$$\begin{aligned}\int_a^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}\,g &= \int_a^\tau 1 \,\mathrm{d}\,g + \int_\tau^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}\,g\\ &= g(\tau) - g(a) + \lim_{t\to\tau+}\Big(\int_t^b \chi_{[a,\tau]} \,\mathrm{d}\,g + 1\,[g(t) - g(\tau)]\Big)\\ &= g(\tau+) - g(a),\end{aligned}$$

tj. platí (6.18).

6.45 Cvičení. Pomocí Hakeovy věty dokažte i zbývající formule z příkladů 6.15.

6.6 Substituce

Dalším důsledkem Saksova-Henstockova lemmatu je následující lemma, které nám pomůže dokázat větu o substituci.

6.46 Lemma. *Nechť* $\int_a^b f \,\mathrm{d}\,g$ *existuje. Potom pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje kalibr* $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ *takový, že nerovnost*

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f \,\mathrm{d}\,g \Big| < \varepsilon \tag{6.70}$$

platí pro každé $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta)$.

D ů k a z . Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta \in \mathscr{G}[a,b]$ je kalibr takový, že

$$\Big| S(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - \int_a^b f \,\mathrm{d}\,g \Big| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro všechna δ-jemná značená dělení $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$ intervalu $[a,b]$.

Buď dáno libovolné $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta)$. Označme $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$ a

$$J^+ = \Big\{j\in\{1,2,\dots,m\} : f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g \ge 0\Big\}$$

a

$$J^- = \Big\{1,2,\dots,m\Big\}\setminus J^+.$$

Systém $\{([\sigma_{j-1},\sigma_j],\xi_j) : j\in J^+\}$ splňuje předpoklady (6.62) z lemmatu 6.39 na místě $\{([s_j,t_j],\tau_j)\}$. Podle lemmatu 6.39 tedy platí

$$\sum_{j\in J^+}\Big|f(\xi_j)[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big|$$
$$=\Big|\sum_{j\in J^+}\Big(f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Podobně

$$\sum_{j\in J^-}\Big|f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big|$$
$$=\Big|\sum_{j\in J^-}\Big(f(\xi_j)\,[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})]-\int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g\Big)\Big|\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud už nerovnost (6.70) okamžitě vyplývá. □

6.47 Věta (VĚTA O SUBSTITUCI)**.** *Je-li funkce $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ ohraničená a integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ existuje, potom jakmile existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g\Big],\quad \int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,],$$

existuje i druhý a v takovém případě pak platí

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x f\,\mathrm{d}\,g\Big]=\int_a^b h(x)\,f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,].$$

D ů k a z. Podle věty 6.9 je funkce $w(x) = \int_a^x f\,\mathrm{d}\,g$ definovaná pro každé $x \in [a,b]$.

a) Předpokládejme, že existuje integrál $\int_a^b h\,f\,\mathrm{d}\,g$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť δ_ε je kalibr na $[a,b]$ takový, že

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} h\,f\,\mathrm{d}\,g \Big| < \varepsilon$$

a

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big| f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g \Big| < \varepsilon$$

platí pro každé δ_ε-jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$. (Takový kalibr existuje podle lemmatu 6.46.)

Buď dáno $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{A}(\delta_\varepsilon)$. Označme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom

$$\begin{aligned}
&\Big| \sum_{j=1}^{m} h(\xi_j)\,[w(\sigma_j) - w(\sigma_{j-1})] - \int_a^b h\,f\,\mathrm{d}\,g \Big| \\
&\quad \le \sum_{j=1}^{m} \Big| h(\xi_j) \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g - h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \Big| \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{m} \Big| h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} h\,f\,\mathrm{d}\,g \Big| \\
&\quad \le \|h\| \sum_{j=1}^{m} \Big| \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} f\,\mathrm{d}\,g - f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] \Big| \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{m} \Big| h(\xi_j)\,f(\xi_j)\,[g(\sigma_j) - g(\sigma_{j-1})] - \int_{\sigma_{j-1}}^{\sigma_j} h\,f\,\mathrm{d}\,g \Big| \\
&\quad \le (\|h\| + 1)\,\varepsilon,
\end{aligned}$$

tj. existuje integrál $\int_a^b h\,\mathrm{d}\,w$ a platí $\int_a^b h\,\mathrm{d}\,w = \int_a^b h\,f\,\mathrm{d}\,g$.

b) Obrácená implikace by se dokazovala podobně, opět za vydatné pomoci lemmatu 6.46. □

Pro KS-integrál ovšem platí také tvrzení analogická větám 5.47 a 5.48, které jsme dokázali pro RS-integrály. Uvedeme alespoň jedno z nich.

6.48 Věta. *Předpokládejme, že funkce* $\phi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ *je rostoucí a zobrazuje interval* $[\alpha,\beta]$ *na interval* $[a,b]$ *a nechť* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Pak existuje-li jeden z integrálů*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,],\qquad \int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}[\,g(\phi(x))\,],$$

existuje i ten druhý a platí rovnost a

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(x))\,\mathrm{d}[\,g(\phi(x))\,]=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}[\,g(x)\,]. \tag{6.71}$$

D ů k a z . Povšimněme si, že protože ϕ je rostoucí a zobrazuje interval $[\alpha,\beta]$ na interval $[a,b]$, musí být ϕ i její inverze ϕ^{-1} spojité.

Pro dané značené dělení $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{T}[\alpha,\beta]$ položme

$$\sigma_j=\phi(\rho_j)\ \text{ pro } j=0,1,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})\quad\text{a}\quad \xi_j=\phi(\eta_j)\ \text{ pro } j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\rho})$$

a $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_{\nu(\boldsymbol{\rho})}\}$, $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{\nu(\boldsymbol{\rho})})$. Potom $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$. Značíme $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=\phi(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})$ a $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})=\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$. Zřejmě $\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$ pro $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$.

Pro daný kalibr $\widetilde{\delta}\in\mathscr{G}[\alpha,\beta]$ definujme kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ tak, aby platilo

$$\left.\begin{aligned}&\phi^{-1}(\tau+\delta(\tau))<\phi^{-1}(\tau)+\widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\tau)) &&\text{jestliže } \tau\in[a,b)\\ \text{a}\\ &\phi^{-1}(\tau-\delta(\tau))>\phi^{-1}(\tau)-\widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\tau)) &&\text{jestliže } \tau\in(a,b].\end{aligned}\right\} \tag{6.72}$$

Nyní, jestliže rozšířené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$ je δ-jemné, pak podle (6.72) máme pro každé $j=1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$

$$\rho_j=\phi^{-1}(\sigma_j)\le\phi^{-1}(\xi_j+\delta(\xi_j))<\phi^{-1}(\xi_j)+\widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\xi_j))=\eta_j+\widetilde{\delta}(\eta_j)$$

a

$$\rho_{j-1}=\phi^{-1}(\sigma_{j-1})\ge\phi^{-1}(\xi_j-\delta(\xi_j))>\phi^{-1}(\xi_j)-\widetilde{\delta}(\phi^{-1}(\xi_j))=\eta_j-\widetilde{\delta}(\eta_j).$$

Čili $\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\widetilde{\delta})$ pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{A}(\delta)$. Podobně bychom ke každému kalibru $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ našli kalibr $\widetilde{\delta}\in\mathscr{G}[\alpha,\beta]$ takový, že $\phi(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{A}(\delta)$, jakmile $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})\in\mathscr{A}(\widetilde{\delta})$.

Protože

$$\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\phi(\eta_j))\,\big[g(\phi(\rho_j))-g(\phi(\rho_{j-1}))\big]$$

pro každé $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$ a $(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\eta})=\phi^{-1}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$, plyne odtud už snadno důkaz věty. □

6.49 Cvičení. (i) Podrobně si promyslete závěr důkazu předešlé věty.

(ii) Formulujte a dokažte analogii věty 6.48 pro případ, že ϕ je klesající.

(iii) Formulujte a dokažte analogii věty 5.48.

6.50 Poznámka. Větu 6.48 je možno zobecnit v různých směrech. Na příklad následující verze věty o substituci se uplatnila při aplikaci teorie hystereze v ekonomii (viz [4]):

Předpokládejme, že funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je ohraničená na* $[a,b]$ *a taková, že* $f\in\mathbb{G}[\alpha,b]$ *pro každé* $\alpha\in(a,b)$. *Dále nechť funkce* $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $\phi(a)=c$, $\phi(b)=d$. *Konečně, nechť funkce* $g\in\mathbb{BV}[c,d]$ *je zprava spojitá na* $[c,d)$. *Pro* $s\in[c,d]$ *položme* $\psi(s)=\inf\{t\in[a,b]: s\le\phi(t)\}$. *Potom pro každé* $\alpha\in[a,b]$ *platí*

$$\int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}[\,g(\phi(t))] = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(b)} f(\psi(s))\,\mathrm{d}[\,g(s)].$$

6.7 Bodová konvergence

6.51 Věta (OSGOODOVA VĚTA)**.** *Předpokládejme, že pro funkci* $f\in\mathbb{G}[a,b]$ *a posloupnost* $\{f_n\}\subset\mathbb{G}[a,b]$ *platí*

$$\|f_n\|\le M<\infty \text{ pro } n\in\mathbb{N} \tag{6.73}$$

a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ pro } x\in[a,b]. \tag{6.74}$$

Potom

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,\mathrm{d}\,g = \int_a^b f\,\mathrm{d}\,g \quad \text{pro každou funkci } g\in\mathbb{BV}[a,b]. \tag{6.75}$$

D ů k a z . Integrály $\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g,\ n \in \mathbb{N},$ a $\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g$ existují podle věty 6.21. Nechť $g = g^{\mathrm{C}} + g^{\mathrm{B}}$ je Jordanův rozklad funkce g takový, že $g^{\mathrm{C}}(a) = g(a)$ (viz větu 2.39). Potom podle věty 5.50 a cvičení 5.56 (i) existují integrály

$$(\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}} \quad \text{a} \quad (\sigma)\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

a podle Osgoodovy věty pro RS-integrály (věta 5.61) platí

$$\lim_{n\to\infty} (\sigma)\int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}} = (\sigma)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}}$$

neboli (podle věty 6.13)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}} = \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{C}}. \tag{6.76}$$

Dále podle lemmatu 6.31 máme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}} = \sum_{d\in D} f(d)\,\Delta\, g(d) \quad \text{a} \quad \int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}} = \sum_{d\in D} f_n(d)\,\Delta\, g(d),$$

kde D je množina bodů nespojitosti funkce g v intervalu $[a,b]$. Jestliže je D konečná, pak zřejmě platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{d\in D} f_n(d)\,\Delta\, g(d) = \sum_{d\in D} f(d)\,\Delta\, g(d),$$

a tudíž

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}} = \int_a^b f \,\mathrm{d}\, g^{\mathrm{B}}. \tag{6.77}$$

Nechť $D = \{d_k : k \in \mathbb{N}\}$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Podle důsledku 2.27 je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta\, g(d_k)| \le \operatorname{var}_a^b g < \infty.$$

Existuje tedy $p_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{k=p_\varepsilon+1}^{\infty} |\Delta\, g(d_k)| < \frac{\varepsilon}{4\,M}$. Vzhledem k (6.73) a (6.74) je také $|f(x)| \le M$ pro $x \in [a,b]$, a tudíž

$$\Big| \sum_{k=p_\varepsilon+1}^{\infty} \big(f_n(d_k) - f(d_k)\big)\ \Delta\, g(d_k)\Big| \le 2\,M \sum_{k=p_\varepsilon+1}^{\infty} |\Delta\, g(d_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.78}$$

Dále protože

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{p\,\varepsilon} f_n(d_k)\,\Delta\,g(d_k) = \sum_{k=1}^{p_\varepsilon} f(d_k)\,\Delta\,g(d_k),$$

existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\Big|\sum_{k=1}^{p\,\varepsilon}\big(f_n(d_k)-f(d_k)\big)\;\Delta\,g(d_k)\Big| < \frac{\varepsilon}{2}\quad \text{pro}\;\; n\geq n_\varepsilon,$$

což dohromady s (6.78) dává

$$\Big|\int_a^b (f_n-f)\,\mathrm{d}\,g^{\mathrm{B}}\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{\infty}\big(f_n(d_k)-f(d_k)\big)\;\Delta\,g(d_k)\Big| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

pro $n\geq n_\varepsilon$. Rovnost (6.77) tedy platí i tehdy, když množina D není konečná. Toto, společně s (6.76) a větou 6.8, zaručuje platnost rovnosti (6.75) a dokazuje tvrzení věty. □

6.8 Integrály maticových a vektorových funkcí

Jsou-li maticové funkce $F\colon[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$, $G\colon[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$ takové, že všechny integrály

$$\int_a^b f_{i,k}\,\mathrm{d}\,g_{k,j}\quad (i=1,2,\dots,m,\;k=1,2,\dots,p,\;j=1,2,\dots,n)$$

existují, pak symbol $\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}\,G(t)$ (resp. krátce $\int_a^b F\,\mathrm{d}\,G$) značí $m\times n$-matici $M\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ s prvky

$$m_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}\int_a^b f_{i,k}\,\mathrm{d}\,g_{k,j},\quad i=1,2,\dots,m,\;j=1,2,\dots,n.$$

Analogicky definujeme také integrály $\int_a^b \mathrm{d}\,[F]\,G$, resp. $\int_a^b F\,\mathrm{d}\,[G]\,H$, kde F, G a H jsou maticové funkce vhodných rozměrů.

Připomeňme, že podle označení (xiv) normu matice $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ značíme $|A|$ a definujeme ji předpisem $|A| = \max\limits_{j=1,\dots,m} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$. V této souvislosti považujeme prvky prostoru $\mathbb{R}^n$ za matice typu $n \times 1$ (neboli sloupcové vektory). Jinými slovy, ztotožňujeme prostory $\mathbb{R}^n$ a $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. To znamená, že klademe $|x| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$. Potom platí $|A\,x| \le |A|\,|x|$ pro $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Je také známo, že platí $|A| = \sup\big\{|A\,x| : x \in \mathbb{R}^n \ \text{ a } \ |x| \le 1\big\}$.

Variace maticové funkce $F : [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ je definovaná formálně stejným předpisem jako variace skalárních funkcí, tj.

$$\operatorname{var}_a^b F = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]} \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |F(\sigma_j) - F(\sigma_{j-1})|.$$

Snadno se ověří, že platí

$$\max_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \big(\operatorname{var}_a^b f_{i,j}\big) \le \operatorname{var}_a^b F \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}_a^b f_{i,j}.$$

To znamená, že maticová funkce $F : [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ má konečnou variaci právě tehdy, když má konečnou variaci každá její složka. Podobně, F je spojitá, resp. regulovaná právě tehdy, když stejnou vlastnost má každá její složka.

Rozšíření výsledků uvedených v této a předešlé kapitole na případ funkcí maticových, resp. vektorových je tedy snadné. Je ovšem nutno si uvědomit, že operace násobení matic není obecně komutativní, a tak musíme mít stále na paměti, že nesmíme libovolně měnit pořadí maticových funkcí, v jakém se v součinech obsažených v aproximujících součtech $S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})$ objevují. Na příklad větu o integraci per-partes (věta 6.36) je třeba formulovat takto:

Jestliže $F\colon [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ je regulovaná na $[a,b]$ a $G\colon [a,b] \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ má konečnou variaci na $[a,b]$, pak existují oba integrály $\displaystyle\int_a^b F\,\mathrm{d}G$ a $\int_a^b \mathrm{d}[F]\,G$ a platí

$$\int_a^b F\,\mathrm{d}G + \int_a^b \mathrm{d}[F]\,G = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) + \sum_{x \in [a,b]} \Big(\Delta^- F(x)\,\Delta^- G(x) - \Delta^+ F(x)\,\Delta^+ G(x)\Big).$$

Podobně třeba věta o substituci (věta 6.47) bude vypadat takto:

Jestliže funkce $H\colon[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$ *je ohraničená,* $F:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$, $G:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^q,\mathbb{R}^n)$ *a integrál* $\displaystyle\int_a^b F\,\mathrm{d}\,G$ *existuje, potom jakmile existuje jeden z integrálů*

$$\int_a^b H(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x F\,\mathrm{d}\,G\Big], \quad \int_a^b (H\,F)\,\mathrm{d}\,G,$$

existuje i druhý a v takovém případě pak platí

$$\int_a^b H(x)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^x F\,\mathrm{d}\,G\Big] = \int_a^b (H\,F)\,\mathrm{d}\,G.$$

6.52 Cvičení. S přihlédnutím k rozšíření na integraci vektorových funkcí naznačenému v tomto odstavci definujte exaktně křivkový integrál druhého druhu zmíněný v odstavci 1.2 a formulujte jeho základní vlastnosti, které plynou z vět obsažených v kapitolách 5 a 6.

6.9 Souvislost s dalšími typy integrálů

Vyjasnili jsme již vzájemné vztahy mezi KS-integrálem a RS-integrály (viz poznámku 6.12 a větu 6.13). Podobně jako jsme v příkladu 6.14 (iii) dokázali, že z existence Newtonova integrálu (N)$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ plyne existence KH-integrálu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x,$ lze dokázat také, že z existence Perronova integrálu (P)$\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ plyne existence KH-integrálu $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$ Definici Perronova integrálu najdeme například v monografiích [46] nebo [15], viz [46, definice XII.1.5], resp. [15, definice XII.25]. (Níže uvádíme definici Perronova-Stieltjesova integrálu, která ji také zahrnuje.) Platí dokonce, že KH-integrál je ekvivalentní s Perronovým integrálem (viz [46, věta XII.2.1]). Vzhledem ke známým vlastnostem Perronova integrálu to znamená, že KH-integrál (vzdor jeho jednoduché téměř riemannovské definici) zahrnuje tedy současně integrály Riemannův, Newtonův, ale i Lebesgueův. Tím se rozumí, že je-li na nějakém intervalu daná funkce integrovatelná ve smyslu Lebesgueově, pak má na tomto intervalu i KH-integrál a oba integrály mají stejnou hodnotu. Dále existuje-li KH-integrál funkce f, pak f je lebesgueovsky integrovatelná právě tehdy, když také její absolutní hodnota $|f|$ je KH-integrovatelná, viz například kapitoly XII a XIV v monografii [46].

PERRONŮV-STIELTJESŮV INTEGRÁL (PS-integrál)
Definice náleží A. J. Wardovi, viz [62]. Popsána byla též v Saksově monografii [42, VI.8]. Uvedeme zde ekvivalentní (viz [48, Theorem 2.1]) definici.

Řekneme, že funkce $M:[a,b]\to\mathbb{R}$ je *majoranta* pro f vzhledem ke g, jestliže existuje kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že

$$(t-\tau)\,\big[M(t)-M(\tau)\big]\ge(t-\tau)\,f(\tau)\,\big(g(t)-g(\tau)\big)$$

pro $\tau\in[a,b]$ a $t\in[a,b]\cap(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))$. Podobně, funkce $m:[a,b]\to\mathbb{R}$ je *minoranta* pro f vzhledem ke g, jestliže existuje kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že

$$(t-\tau)\,\big[m(t)-m(\tau)\big]\le(t-\tau)\,f(\tau)\,\big(g(t)-g(\tau)\big)$$

pro $\tau\in[a,b]$ a $t\in[a,b]\cap(\tau-\delta(\tau),\tau+\delta(\tau))$. Symbol $\mathfrak{M}(f\Delta\,g)$ značí množinu majorant pro f vzhledem ke g, $\mathfrak{m}(f\Delta\,g)$ je množina minorant pro f vzhledem ke g. Předpokládejme, že $\mathfrak{M}(f\Delta\,g)$ i $\mathfrak{m}(f\Delta\,g)$ jsou neprázdné a položme

$$(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=\inf\big\{M(b)-M(a):M\in\mathfrak{M}[a,b]\big\}$$

a

$$(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=\sup\big\{m(b)-m(a):m\in\mathfrak{m}[a,b]\big\}.$$

($(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g$ je *horní Perronův-Stieltjesův* integrál f a $(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g$ je *dolní Perronův-Stieltjesův* integrál.) Pomocí Cousinova lemmatu (lemma 6.3) lze dokázat (viz [28, Lemma 1.1.2]), že platí $(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g\le(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g$. Jestliže

$$(\mathrm{PS})\underline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=(\mathrm{PS})\overline{\int_a^b} f\,\mathrm{d}g=I\in\mathbb{R},\ \text{pak}\ (\mathrm{PS})\int_a^b f\,\mathrm{d}g=I$$

je *Perronův-Stieltjesův integrál* funkce f vzhledem k funkci g přes interval $[a,b]$.

Poznamenejme, že podle [28, Lemma 1.2.1] integrál $(\mathrm{PS})\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje tehdy a jen tehdy, když existuje KS-integrál $\int_a^b f\,\mathrm{d}g.$ Jestliže tyto integrály existují, pak mají stejnou hodnotu. (PS-integrál je ekvivalentní s KS-integrálem.)

LEBESGUEŮV-STIELTJESŮV INTEGRÁL (LS-integrál)
byl popsán v řadě monografií a učebnic, viz např. T. H. Hildebrandt [11, kapitola VI], V. Jarník [15, kapitoly II a X], A. N. Kolmogorov a S. V. Fomin [16, VI.6.3], J. Lukeš [31, kapitola 12], S. Saks [42, kapitola III]. Existuje několik cest k jeho definici. Vesměs se ale jedná o poměrně komplikovaný proces. Nejčastěji je integrál $(\mathrm{LS})\int_M f\,\mathrm{d}g$ přes množinu $M\subset[a,b]$ definován zprvu pro f nezáporné, ohraničené a borelovsky měřitelné a g neklesající a zprava spojité jako Lebesgueův integrál vzhledem k Lebesgueově-Stieltjesově míře $\mu_g,$ tj. σ-aditivní míře vzniklé rozšířením míry intervalu $G((c,d])=g(d)-g(c)$ pro $[c,d]\subset[a,b]$ podobným způsobem, jako se buduje Lebesgueova míra rozšířením obvyklé míry intervalu $\ell([c,d])=d-c.$ Definice se pak pomocí rozkladu funkcí s konečnou variací na rozdíl dvou neklesajících funkcí a rozkladu $f=f^+-f^-$ rozšíří na případ, kdy f je ohraničená a borelovsky měřitelná a $g\in\mathbb{BV}[a,b].$ Alternativní možností je definovat LS-integrál jako rozšíření RS-integrálu Daniellovou metodou.

Na rozdíl od KS-integrálu, LS-integrál má poněkud užší třídu integrovatelných funkcí. Nezahrnuje například integraci vzhledem k regulovaným funkcím. Na druhou stranu, neomezuje se na integraci přes interval. Má smysl uvažovat o LS-integraci přes libovolnou LS-měřitelnou množinu.

Vztah mezi LS-integrálem a PS-integrálem (a tedy i KS-integrálem) je dobře charakterizován následujícím tvrzením obsaženým v Saksově monografii (viz [42, Theorem VI (8.1)]).

Nechť $g\in\mathbb{BV}[a,b],\ f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *a nechť existuje integrál* $(\mathrm{LS})\int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}g.$ *Potom existuje také* PS-*integrál* $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *a platí*

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g=(\mathrm{LS})\int_{(a,b)} f\,\mathrm{d}g+f(a)\,\Delta^+g(a)+f(b)\,\Delta^-g(b).$$

Odtud podle věty o substituci (věta 6.47) plyne i následující zajímavé tvrzení.

Je-li f *ohraničená na* $[a,b],\ h\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ *lebesgueovsky integrovatelná na* $[a,b]$ *a* $g(t)=g(a)+\int_a^t h(x)\,\mathrm{d}x$ *pro* $t\in[a,b]$, *pak* $\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=\int_a^b f(t)\,h(t)\,\mathrm{d}\,t,$ *kde integrál na pravé straně je Lebesgueův.*

YOUNGŮV INTEGRÁL A KREJČÍHO KN-INTEGRÁL

Nechť $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ a $g\in\mathbb{G}[a,b]$. Označme $\mathscr{T}_Y[a,b]$ množinu všech značených dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$ takových, že platí $\sigma_{j-1}<\xi_j<\sigma_j$ pro každé $j\in\{1,2,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\}$, a definujme

$$\begin{aligned}S_Y(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi}) = f(a)\,\Delta^+g(a) + \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})-1} f(\sigma_j)\,\Delta\,g(\sigma_j)\\ + \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,[g(\sigma_j-)-g(\sigma_{j-1}+)] + f(b)\Delta^-g(b).\end{aligned}$$

pro $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}[a,b]$. Dosadíme-li nyní $S_Y(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ místo $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ a $\mathscr{T}_Y[a,b]$ místo $\mathscr{T}[a,b]$ do definice 5.3, dostaneme *Youngovy* ((δ) nebo (σ)) integrály.

O Youngově integrálu a zejména o jeho (σ)-verzi $(\sigma\mathrm{Y})\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ je podrobně pojednáno v odstavci II.19 monografie T. H. Hildebrandta [11]. Youngovy integrály jsou zřejmě obecnější než odpovídající RS-integrály. Jestliže funkce f je regulovaná na $[a,b]$ a g má na $[a,b]$ konečnou variaci, pak integrál $(\sigma\mathrm{Y})\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ existuje a má stejnou hodnotu jako KS-integrál $\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$. Na druhou stranu, jestliže g je regulovaná na $[a,b]$ a $g(a)=g(t-)=g(s+)=g(b)$ pro $t\in(a,b]$ a $s\in[a,b)$, pak je $S_Y(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=0$ pro každou funkci $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ a každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})\in\mathscr{T}_Y[a,b]$, tj. $(\sigma\mathrm{Y})\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g=0$. Takové tvrzení ovšem neplatí obecně pro KS-integrál, jak je ukázáno v [48, Example 1.1]. P. Krejčí proto nedávno (viz [18]) upravil definici KS - integrálu tak, že jeho modifikovaný KS-integrál, který nazývá KN-integrál, už v sobě plně zahrnuje i integrál (σ)-Youngův. Jeho definice spočívá v šikovném zúžení množiny přípustných značených dělení a můžeme ji zformulovat takto:

Nechť $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ a $I\in\mathbb{R}$. Řekneme, že $(\mathrm{KN})\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g=I$, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existují kalibr δ a spočetná podmnožina A intervalu $[a,b]$ taková, že $|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})-I|<\varepsilon$ platí pro každé δ-jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ takové, že žádná z jeho značek ξ_j neleží v množině A.

DUSHNIKŮV (VNITŘNÍ) INTEGRÁL

Dosadíme-li do definice 5.3 místo množiny $\mathscr{T}[a,b]$ značených dělení množinu $\mathscr{T}_Y[a,b]$ uvedenou v předchozím odstavci, dostaneme *Dushnikovy* neboli také *vnitřní* ((δ) nebo (σ)) integrály. Je zřejmé, že jestliže existuje integrál $(\sigma)\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$, pak existuje i Dushnikův (σ)-integrál $(\sigma\mathrm{D})\displaystyle\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ a mají stejnou hodnotu. Z hlediska praktického uplatnění je Dushnikův integrál podobně obecný jako KS-integrál. Obecně se však jeho hodnoty liší od odpovídajících hodnot KS-integrálu. To lze nahlédnout z následujícího vztahu (viz [13, Theorem 4.7])

$$(\sigma\mathrm{Y})\int_a^b f\,\mathrm{d}g + (\sigma\mathrm{D})\int_a^b g\,\mathrm{d}f = f(b)\,g(a) - f(a)\,g(a),$$

který platí, jestliže jsou obě funkce f a g regulované na $[a,b]$ a alespoň jedna z nich má na $[a,b]$ konečnou variaci. Dushnikův integrál je podrobně popsán v monografii [12] Ch.S. Höniga, který rozšířil jeho definici i na funkce s hodnotami v Banachových prostorech a vyšetřil jeho vlastnosti natolik, že mohl na jejich základě vybudovat teorii Volterrových-Stieltjesových integrálních rovnic v Banachových prostorech.

INTEGRACE V ABSTRAKTNÍCH PROSTORECH

Rozšíření integrace na vektorové a maticové funkce jsme ukázali v odstavci 6.8. Analogicky lze postupovat i v případě abstraktních funkcí, tj. funkcí s hodnotami v Banachových prostorech. Je-li $\mathbb{X}$ Banachův prostor a $\mathscr{L}(\mathbb{X})$ odpovídající Banachův prostor spojitých lineárních operátorů na $\mathbb{X}$ a

$$F:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{X}),\ G:[a,b]\to\mathscr{L}(\mathbb{X}),\ g:[a,b]\to\mathbb{X},$$

pak můžeme definovat KS-integrály

$$\int_a^b \mathrm{d}F\,g,\quad \int_a^b F\,\mathrm{d}g,\quad \int_a^b \mathrm{d}F\,G,\quad \int_a^b F\,\mathrm{d}G.$$

Na příklad $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}F\,g = I\in\mathbb{X}$, jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje kalibr $\delta\in\mathscr{G}[a,b]$ takový, že platí

$$\Big\|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} F(\xi_j)\,\big[g(\sigma_j)-g(\sigma_{j-1})\big] - I\Big\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon$$

pro každé δ-jemné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ intervalu $[a,b]$. Pojem variace lze snadno přenést i na abstraktní funkce. Pro funkci $f:[a,b]\to\mathbb{X}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu

$[a,b]$ definujeme

$$V(f,\boldsymbol{\sigma})=\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}\|f(\sigma_j)-f(\sigma_{j-1})\|_{\mathbb{X}}\quad\text{a}\quad \operatorname{var}_a^b f=\sup\{V(f,\boldsymbol{\sigma}):\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\}.$$

Je také zřejmé, jak definovat prostor $\mathbb{G}([a,b],\mathbb{X})$ regulovaných funkcí s hodnotami v $\mathbb{X}.$ Potom např. oba integrály

$$\int_a^b \mathrm{d}F\,G \quad \text{a} \quad \int_a^b F\,\mathrm{d}G$$

existují, jestliže $F\in\mathbb{BV}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{X}))$ a $G\in\mathbb{G}([a,b],\mathscr{L}(\mathbb{X}))$ a platí i většina tvrzení známých pro integraci skalárních funkcí (viz [50], [53] a [37]). Jsou však i výjimky: Lemma 6.46 platí pouze, pokud má prostor $\mathbb{X}$ konečnou dimenzi. To znamená mj., že jsou jisté potíže s přenesením např. věty o substituci na abstraktní integrály. V této stručné informaci stojí ještě za zmínku, že pokud nemá prostor $\mathbb{X}$ konečnou dimenzi, má smysl místo variace uvažovat obecně slabší pojem *semivariace*, který se definuje takto:

Pro danou funkci $F:[a,b]\to L(\mathbb{X})$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ položme nejprve

$$V_a^b(F,\boldsymbol{\sigma})=\sup\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})}[F(\sigma_j)-F(\sigma_{j-1})]\,x_j\Big\|_{\mathbb{X}}\Big\},$$

kde supremum se bere přes všechny možné volby prvků $x_j\in\mathbb{X},\ j=1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma})$ takových, že $\|x_j\|_X\le 1.$ Potom číslo

$$(\mathcal{B})\operatorname{var}_a^b F=\sup\{V_a^b(F,\boldsymbol{\sigma}):\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\}$$

se nazývá *semivariace* funkce F na $[a,b]$ (viz např. [12]). Zpravidla (ne vždy) je možno předpoklady o konečné variaci zeslabit na konečnou semivariaci. Je známo, že má-li $\mathbb{X}$ konečnou dimenzi, pak pojmy variace a semivariace splývají.

Poznamenejme ještě, že integrace funkcí s hodnotami v Hilbertových, resp. reflexivních Banachových prostorech má uplatnění např. v teorii hystereze (viz např. [21] nebo [22]).

Důkazy podstatné části tvrzení uvedených v této kapitole byly převzaty z monografie [59]. Některé jsou pak modifikacemi důkazů analogických tvrzení pro speciální případ $g(x)\equiv x$ ze Schwabikovy monografie [46].