Kapitola 3

Absolutně spojité funkce

Speciálním případem funkcí s konečnou variací jsou funkce absolutně spojité, které úzce souvisí s Lebesgueovou teorií integrálu a jsou dobře známy z Carathéodoryovy teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Integrály, které se v této kapitole vyskytují, jsou integrály Lebesgueovy.

3.1 Definice a základní vlastnosti

3.1 Definice. Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je *absolutně spojitá* na intervalu $[a,b]$, jestliže ke každému $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že pro každý konečný systém intervalů $\{[a_j,b_j]:j=1,2,,\dots,m\}$ splňující

$$a\le a_1<b_1\le a_2<b_2<\dots<b_{m-1}\le a_m<b_m\le b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{m}(b_j-a_j)<\delta \tag{3.1}$$

platí

$$\sum_{j=1}^{m}|f(b_j)-f(a_j)|<\varepsilon. \tag{3.2}$$

Množinu funkcí absolutně spojitých na $[a,b]$ značíme $\mathbb{AC}[a,b]$.

3.2 Cvičení. Dokažte tvrzení:

Každá lipschitzovská funkce na intervalu $[a,b]$ (viz cvičení 2.6 (iv)) *je na tomto intervalu absolutně spojitá. Speciálně je-li derivace* f' *funkce* f *spojitá na* $[a,b]$[1]*, pak* f *je absolutně spojitá na* $[a,b]$.

3.3 Věta. *Je-li* f *absolutně spojitá na* $[a,b]$ *a* $[c,d]\subset[a,b]$, *pak je* f *absolutně spojitá i na* $[c,d]$.

Je-li $a<c<b$ *a* f *je absolutně spojitá na* $[a,c]$ *i* $[c,b]$, *pak je* f *absolutně spojitá na* $[a,b]$.

---

[1] tj. f' je spojitá na (a,b), existují konečné limity $f'(a+)=\lim_{t\to a+}f'(t)$, $f'(b-)=\lim_{t\to b-}f'(t)$ a $f'(a)=f'(a+)$ a $f'(b)=f'(b-)$

D ů k a z . První tvrzení je evidentní.

Předpokládejme, že $f \in \mathbb{AC}[a,c]$ a $f \in \mathbb{AC}[c,b]$ a buď dáno $\varepsilon > 0$. Můžeme zvolit $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro každý systém intervalů $\{[\alpha_j, \beta_j] : j = 1, 2, , \ldots, m\}$ takový, že

$$a \le \alpha_1 < \beta_1 \le \alpha_2 < \beta_2 \ldots < \beta_{m-1} \le \alpha_m < \beta_m \le c \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \alpha_j) < \delta \tag{3.3}$$

a současně

$$\sum_{j=1}^{p} |f(\delta_j) - f(\gamma_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro každý systém intervalů $\{[\gamma_j, \delta_j] : j = 1, 2, , \ldots, p\}$ takový, že

$$c \le \gamma_1 < \delta_1 \le \gamma_2 < \delta_2 \ldots < \delta_{p-1} \le \gamma_p < \delta_p \le b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{p} (\delta_j - \gamma_j) < \delta. \tag{3.4}$$

Nyní, mějme systém intervalů $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, , \ldots, n\}$ takový, že

$$a \le a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \ldots < b_{n-1} \le a_n < b_n \le b \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta. \tag{3.5}$$

Smíme předpokládat, že c neleží v žádném z intervalů (a_j, b_j), $j = 1, 2, \ldots, n$. (Kdyby totiž bylo $c \in (a_k, b_k)$ pro nějaké $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, rozdělili bychom interval $[a_k, b_k]$ na sjednocení $[a_k, c] \cup [c, b_k]$ a nový systém by opět splňoval (3.5).) Můžeme tedy rozdělit daný systém $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, , \ldots, n\}$ na systémy

$$\{[\alpha_j, \beta_j] : j = 1, 2, , \ldots, m\} \quad \text{a} \quad \{[\gamma_j, \delta_j] : j = 1, 2, , \ldots, p\}$$

splňující (3.3) a (3.4). Součet $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|$ se tedy rozpadá na dva součty, z nichž každý je menší než $\dfrac{\varepsilon}{2}$. Tudíž $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$. □

3.4 Příklad. Podle cvičení 3.2 je každá funkce, která má spojitou derivaci na $[a,b]$, absolutně spojitá na $[a,b]$. Jednoduchým příkladem absolutně spojité funkce na $[a,b]$, která nemá spojitou derivaci na (a,b), je např. funkce

$$f(x)=\begin{cases} x-a & \text{pro } x\in[a,\dfrac{a+b}{2}],\\[2ex] b-x & \text{pro } x\in[\dfrac{a+b}{2},b],\end{cases}$$

která je zřejmě absolutně spojitá na intervalech $[a,\frac{a+b}{2}]$ a $[\frac{a+b}{2},b]$, a tedy podle věty 3.3 také na $[a,b]$.

3.5 Poznámka. Jestliže $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $\mathbb{K}\subset\mathbb{N}$ a jestliže pro každé $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ takové, že

$$\sum_{j\in\mathbb{K}}|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|<\varepsilon \tag{3.6}$$

platí pro každý (nikoliv nutně konečný) systém intervalů $\{[\alpha_j,\beta_j]\subset[a,b]:j\in\mathbb{K}\}$, splňující

$$(\alpha_j,\beta_j)\cap(\alpha_k,\beta_k)=\emptyset \quad \text{pro } j\neq k \text{ a } \sum_{j\in\mathbb{K}}(\beta_j-\alpha_j)<\delta, \tag{3.7}$$

pak je funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ samozřejmě absolutně spojitá na $[a,b]$.

V následujícím lemmatu ukážeme, že platí i obrácená implikace. Poznamenejme ještě, že podle lemmatu 2.22 je každý systém intervalů splňující (3.7) nejvýše spočetný.

3.6 Lemma. *Je-li* $f\in\mathbb{AC}[a,b]$, *pak pro každé* $\varepsilon>0$ *existuje* $\delta>0$ *takové, že nerovnost* (3.6) *platí pro libovolný (případně nekonečný) systém podintervalů intervalu* $[a,b]$

$$\{[\alpha_j,\beta_j]\subset[a,b]:j\in\mathbb{K}\}$$

splňující (3.7).

D ů k a z . Předpokládejme, že $f\in\mathbb{AC}[a,b]$. Zřejmě stačí dokázat tvrzení lemmatu pro případ, že $\mathbb{K}=\mathbb{N}$. Nechť je dáno $\varepsilon>0$ a nechť $\delta>0$ je určeno definicí 3.1 pro $\varepsilon/2$ na místě ε. Nechť $\{[\alpha_j,\beta_j]:j\in\mathbb{N}\}$ je systém podintervalů v $[a,b]$ splňující (3.7). Potom pro každé $m\in\mathbb{N}$ máme

$$\sum_{j=1}^{m}(\beta_j-\alpha_j)<\delta, \quad \text{a tedy} \quad \sum_{j=1}^{m}|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tím je důkaz dokončen. □

3.7 Věta. *Každá funkce absolutně spojitá na intervalu $[a,b]$ má na tomto intervalu konečnou variaci.*

Důkaz. Nechť $f \in \mathbb{AC}[a,b]$. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$\sum_{j=1}^{m} |f(b_j) - f(a_j)| < 1$$

pro každý konečný systém intervalů $\{[a_j, b_j] : j = 1, 2, , \dots, m\}$ splňující (3.1). Dále zvolme dělení $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ intervalu $[a,b]$ tak, aby platilo

$$0 < x_i - x_{i-1} < \delta \quad \text{pro každé } i = 1, 2, \dots, k.$$

Potom pro každé $i = 1, 2, \dots, k$ a každé dělení $\boldsymbol{\sigma}^i = \{\alpha_0^i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_{m_i}^i\}$ intervalu $[x_{i-1}, x_i]$ máme

$$\sum_{j=1}^{m_i} (\alpha_j^i - \alpha_{j-1}^i) = x_i - x_{i-1} < \delta,$$

a tudíž (podle věty 2.11)

$$\operatorname{var}_a^b f = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{var}_{x_{i-1}}^{x_i} f = \sum_{i=1}^{k} \sup_{\boldsymbol{\sigma}^i \in \mathscr{D}[x_{i-1}, x_i]} V(f, \boldsymbol{\sigma}^i) \le k < \infty.$$

□

3.8 Věta. *Jestliže* $f,\ g \in \mathbb{AC}[a,b]$, *pak také*

$$|f|,\ f+g,\ f\,g,\ \max\{f,g\},\ \min\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b].$$

Je-li navíc $|f(x)| > 0$ *na* $[a,b]$, *pak také* $\dfrac{1}{f} \in \mathbb{AC}[a,b]$.

Důkaz. Nechť $f,\ g \in \mathbb{AC}[a,b]$.

a) Pro libovolná $x,\ y \in [a,b]$ platí $|f(x)| \le |f(x) - f(y)| + |f(y)|$. Tudíž

$$|f(x) - f(y)| \ge \big||f(x)| - |f(y)|\big|$$

a

$$\sum_{j=1}^{m} \big||f(\beta_j)| - |f(\alpha_j)|\big| \leq \sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)|.$$

Odtud okamžitě plyne, že také $|f| \in \mathbb{AC}[a,b]$.

b) Druhé a třetí tvrzení, tj. $f + g \in \mathbb{AC}[a,b]$ a $f\,g \in \mathbb{AC}[a,b]$, plynou z nerovností

$$|(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$$

a

$$|f(x)\,g(x) - f(y)\,g(y)| \leq \|f\|\,|g(x) - g(y)| + \|g\|\,|f(x) - f(y)|.$$

c) Protože pro libovolné $x \in [a,b]$ máme

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|\big)$$

a

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}\big(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|\big),$$

platí v důsledku a) a b) také

$$\max\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b] \ \text{ a } \ \min\{f,g\} \in \mathbb{AC}[a,b].$$

d) Konečně, je-li navíc $|f(x)| > 0$ pro $x \in [a,b]$, pak existuje $\mu > 0$ takové, že $|f(x)| \geq \mu$ platí pro $x \in [a,b]$, a tudíž také

$$\Big|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\Big| \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{\mu^2}.$$

Nyní už je snadné ukázat, že $\dfrac{1}{f} \in \mathbb{AC}[a,b]$. □

3.9 Věta. *Funkce* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je absolutně spojitá na intervalu* $[a,b]$ *právě tehdy, když existují funkce* f_1 *a* f_2 *neklesající a absolutně spojité na* $[a,b]$ *a takové, že* $f = f_1 - f_2$ *na intervalu* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Nechť $f = f_1 - f_2$ na $[a,b]$, kde f_1, f_2 jsou absolutně spojité a neklesající na $[a,b]$. Pak podle věty 3.8 je také f absolutně spojitá na $[a,b]$.

b) Nechť $f \in \mathbb{AC}[a,b]$. Podle vět 3.7 a 2.14 existují funkce f_1, f_2 neklesající na $[a,b]$ takové, že $f = f_1 - f_2$. Podle důkazu věty 2.14 můžeme položit

$$f_1(x) = \operatorname{var}_a^x f \ \text{ a } \ f_2(x) = f_1(x) - f(x) \ \text{ pro } x \in [a,b].$$

Vzhledem k větě 3.8 stačí dokázat, že f_1 je absolutně spojitá na $[a,b]$. Předpokládejme, že je dáno $\varepsilon > 0$, a nechť $\delta > 0$ je takové, že

$$\sum_{j=1}^{m} |f(b_j) - f(a_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

platí pro každý systém intervalů $\{[a_j,b_j] : j = 1,2,,\dots,m\}$ splňující (3.1).

Nechť $[\alpha_j,\beta_j]$, $j=1,2,\dots,n$, je libovolný systém intervalů splňující (3.3), v němž $m=n$. Pro každé $j=1,2,\dots,n$ zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma}^j = \{\sigma_0^j, \sigma_1^j, \dots, \sigma_{n_j}^j\}$ intervalu $[\alpha_j,\beta_j]$. Potom

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \left(\sigma_i^j - \sigma_{i-1}^j\right) = \sum_{j=1}^{n} [\beta_j - \alpha_j] < \delta,$$

a tudíž

$$\sum_{j=1}^{n} V(f,\boldsymbol{\sigma}^j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_j} \left|f(\sigma_i^j) - f(\sigma_{i-1}^j)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud už plyne, že

$$\sum_{j=1}^{n} \big(f_1(\beta_j) - f_1(\alpha_j)\big) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}_{\alpha_j}^{\beta_j} f = \sum_{j=1}^{n} \Bigg(\sup_{\boldsymbol{\sigma}^j \in \mathscr{D}[\alpha_j,\beta_j]} V(f,\boldsymbol{\sigma}^j)\Bigg) \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Tím je důkaz věty dokončen. □

3.2 Absolutně spojité funkce a Lebesgueův integrál

Připomeňme, že podle věty 2.30 každá funkce s konečnou variací na intervalu $[a,b]$ má pro s.v. $x \in [a,b]$ konečnou derivaci $f'(x)$. Podle věty 3.7 má tedy stejnou vlastnost i každá funkce, která je absolutně spojitá na $[a,b]$. Ve zbývající části této kapitoly připomeneme některé další základní vlastnosti derivací funkcí absolutně spojitých a souvislost mezi absolutní spojitostí a neurčitým Lebesgueovým integrálem. V případech, kdy se důkazy nebo jejich části opírají o teorii míry v rozsahu přesahujícím rámec tohoto textu, důkazy, resp. jejich příslušné části neuvádíme a pouze odkazujeme na dostupnou literaturu. Integrálem se v tomto odstavci rozumí integrál Lebesgueův.

Podle následující věty jsou derivace funkcí s konečnou variací (a tedy tím spíše i funkcí absolutně spojitých) lebesgueovsky integrovatelné. Její důkaz podstatně využívá řady poznatků teorie míry a Lebesgueovy integrace, které se nevejdou do tohoto textu. Pro úplný důkaz tedy odkazujeme na příslušnou literaturu (viz např. [15, věta 91], [16, věta VI.4.1], resp. [33, Theorem 22.7]).

3.10 Věta. *Má-li funkce* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *konečnou variaci na* $[a,b]$, *pak je její derivace* f' *lebesgueovsky integrovatelná na* $[a,b]$.

Je-li navíc f *neklesající na* $[a,b]$, *pak platí nerovnost*

$$0\le\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}\,x\le f(b)-f(a). \tag{3.8}$$

Nyní ukážeme, že neurčitý integrál integrovatelné funkce je absolutně spojitý.

3.11 Věta. *Jestliže* $g\in\mathbb{L}^1[a,b]$ *a* $f(x)=\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}\,t$ *pro* $x\in[a,b]$, *pak je funkce* f *absolutně spojitá na intervalu* $[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $g\in\mathbb{L}^1[a,b]$. Buď dáno $\varepsilon>0$. Potom existuje $\delta>0$ takové, že

$$\sum_{j=1}^m\int_{a_j}^{b_j}\bigl|g(x)\bigr|\,\mathrm{d}\,x<\varepsilon$$

platí pro každý systém intervalů $\{[a_j,b_j]\subset[a,b]:j=1,2,\dots,m\}$ splňující (3.1) (viz např. [16, věta V.5.5] nebo [15, věta 51] – tato vlastnost se obvykle nazývá absolutní spojitost Lebesgueova integrálu).

Máme tedy

$$\sum_{j=1}^m\bigl|f(b_j)-f(a_j)\bigr|=\sum_{j=1}^m\Bigl|\int_{a_j}^{b_j}g(t)\,\mathrm{d}\,t\Bigr|\le\sum_{j=1}^m\int_{a_j}^{b_j}|g(t)|\,\mathrm{d}\,t<\varepsilon.$$

To znamená, že $f\in\mathbb{AC}[a,b]$. □

3.12 Cvičení. Dokažte, že funkce $f(x)=\sqrt{|x|}$ je absolutně spojitá na intervalu $[-1,1]$, přičemž f není lipschitzovská na $[-1,1]$. (Návod: f je na $[-1,1]$ neurčitým Lebesgueovým integrálem lebesgueovsky integrovatelné funkce a současně $f'(0-)=-\infty$ a $f'(0+)=\infty$.)

Další tvrzení se týká derivování neurčitých integrálů integrovatelných funkcí.

3.13 Věta. *Jestliže* $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$ *a*

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \textit{pro} \ \ x \in [a,b],$$

potom $f'(x) = g(x)$ *pro s.v.* $x \in [a,b]$.

D ů k a z se opírá o řadu výsledků teorie míry, které nejsou do tohoto textu zařazeny. Odkazujeme tedy čtenáře na důkazy např. v [16, věta VI.3.1] nebo [33, Theorem 23.4]. □

Nechť je dána funkce $g \in \mathbb{L}^1[a,b]$. Podle vět 3.11 a 3.13 je její neurčitý Lebesgueův integrál f absolutně spojitý na $[a,b]$ a platí $f' = g$ s.v. na $[a,b]$. Chceme ukázat, že f je absolutně spojitá na $[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když f je neurčitým integrálem nějaké lebesgueovsky integrovatelné funkce. Pro důkaz takového tvrzení je klíčové následující tvrzení známé jako Rieszovo lemma.

3.14 Lemma (RIESZ)**.** *Nechť* $f \in \mathbb{C}[a,b]$ *a*

$$E = \{x \in (a,b) : \exists\, \xi \in (x,b] \textit{ takové, že } f(\xi) > f(x)\}.$$

Potom je množina E *otevřená a je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů* (a_k, b_k), *přičemž pro každý z nich platí* $f(a_k) \le f(b_k)$.

D ů k a z je založen mj. na známém faktu, že každá neprázdná otevřená množina je sjednocením nejvýše spočetného systému po dvou disjunktních otevřených intervalů (viz např. [14, věta 69]). Podrobný důkaz Rieszova lemmatu lze nalézt např. v monografii [16] v odstavci VI.1.2 věnovaném důkazu Lebesgueovy věty o derivaci funkce s konečnou variací (naše věta 2.30). □

3.15 Poznámka. Zobecnění Rieszova lemmatu na případ, kdy funkce f může být jen regulovaná, bylo dokázáno v [46, lemma XIII.3.5].

3.16 Lemma. *Jestliže* $f \in \mathbb{AC}[a,b]$ *je neklesající na* $[a,b]$ *a* $f'(x) = 0$ *pro s.v.* $x \in [a,b]$, *pak* f *je konstantní na* $[a,b]$.

D ů k a z . Vzhledem ke své monotónnosti funkce f zobrazuje interval $[a,b]$ na interval $[f(a), f(b)]$. Dokážeme, že $f(a) = f(b)$.

Nechť je dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta > 0$ přísluší k tomuto ε podle lemmatu 3.6.

Označme Z množinu všech $x \in [a,b]$, pro které platí $f'(x)=0$. Podle předpokladu má její doplněk $[a,b]\setminus Z$ nulovou míru ($\mu([a,b]\setminus Z)=0$). To znamená, že existuje konečný nebo spočetný systém $\{(\sigma_j,\beta_j): j\in\mathbb{K}\}$ splňující (3.7) a

$$[a,b]\setminus Z \subset \bigcup_{j\in\mathbb{K}} (\sigma_j,\beta_j).$$

Obraz $f([a,b]\setminus Z)$ množiny $[a,b]\setminus Z$ je tedy obsažen ve sjednocení otevřených intervalů $\{(f(\sigma_j),f(\beta_j)): j\in\mathbb{K}\}$. Protože podle lemmatu 3.6 platí (3.6), plyne odtud, že množina $f([a,b]\setminus Z)$ má nulovou míru, tj.

$$\mu(f([a,b]\setminus Z)) = 0. \tag{3.9}$$

Nyní, nechť $x\in Z$. Potom je $f'(x)=0$. Pro dané ε tedy existuje $\Delta>0$ takové, že

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x} < \varepsilon \quad \text{pro každé } t \text{ takové, že } 0<|t-x|<\Delta.$$

Odtud plyne, že

$$\varepsilon\, x - f(x) < \varepsilon\, t - f(t) \quad \text{platí pro každé } t\in(x,x+\Delta).$$

Podle Rieszova lemmatu 3.14, které použijeme na funkci $\varepsilon\, x - f(x)$ na místě $f(x)$, je tedy množina Z obsažena ve sjednocení konečného nebo spočetného systému disjunktních intervalů $\{(a_k,b_k)\subset[a,b]: k\in\mathbb{K}\}$, přičemž platí

$$\varepsilon\, a_k - f(a_k) \le \varepsilon\, b_k - f(b_k) \quad \text{pro každé } k\in\mathbb{K}$$

neboli

$$f(b_k)-f(a_k) \le \varepsilon\,(b_k-a_k) \quad \text{pro každé } k\in\mathbb{K},$$

a tudíž

$$\sum_{k\in\mathbb{K}} \big[f(b_k)-f(a_k)\big] \le \varepsilon \sum_{k\in\mathbb{K}} \big[b_k-a_k\big] \le \varepsilon\,(b-a).$$

Odtud už vidíme, že množina $f(Z)$ má také nulovou míru, tj.

$$\mu(f(Z)) = 0. \tag{3.10}$$

Podle (3.9) a (3.10) má interval $[f(a),f(b)] = f(Z)\cup(f([a,b]\setminus Z))$ nulovou délku, tj. (vzhledem k monotónnosti funkce f) máme $f(a)=f(x)=f(b)$ pro každé $x\in(a,b)$. $\square$

3.17 Věta. *Funkce* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *je absolutně spojitá na* $[a,b]$ *právě tehdy, když*

$$f(x)-f(a)=\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{pro } x\in[a,b] \tag{3.11}$$

pro nějakou funkci $g\in\mathbb{L}^1[a,b]$. *Potom je* $f'=g$ *s.v. na* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Nechť $g\in\mathbb{L}^1[a,b]$ a

$$f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x\in[a,b].$$

Potom podle věty 3.11 je f absolutně spojitá na $[a,b]$ a podle věty 3.13 je $f'=g$ s.v. na $[a,b]$.

b) Předpokládejme zprvu, že funkce $f\in\mathbb{AC}[a,b]$ je neklesající na $[a,b]$. Podle vět 3.7 a 3.10 je $f'\in\mathbb{L}^1[a,b]$. Položme

$$h(x)=\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{a} \quad g(x)=f(x)-h(x) \quad \text{pro } x\in[a,b].$$

Ukážeme, že také funkce g je neklesající na $[a,b]$. Vskutku, podle věty 3.10 pro libovolné body $x,y\in[a,b]$ takové, že $x\le y$, máme
-4mm]

$$\begin{aligned} g(y)-g(x) &= \big(f(y)-h(y)\big)-\big(f(x)-h(x)\big)\\ &= \big(f(y)-f(x)\big)-\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}\,t \ge 0. \end{aligned}$$

Dále podle věty 3.11 je funkce h absolutně spojitá na $[a,b]$ a podle věty 3.13 je $h'=f'$ s.v. na $[a,b]$. To znamená, že $g'=(f-h)'=0$ s.v. na $[a,b]$. Podle lemmatu 3.16 je proto funkce g konstantní na $[a,b]$. Máme tedy

$$g(x)=f(x)-h(x)=f(a)-h(a)=f(a) \quad \text{pro } x\in[a,b]$$

neboli

$$f(x)=f(a)+h(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{pro } x\in[a,b],$$

a tudíž (3.11) platí pro každou funkci $f\in\mathbb{AC}[a,b]$, která je neklesající na $[a,b]$.

V obecném případě $f \in \mathbb{AC}[a,b]$ existují podle věty 3.9 funkce f_1, f_2 absolutně spojité na $[a,b]$, neklesající na $[a,b]$ a takové, že $f = f_1 - f_2$ na $[a,b]$. Máme tedy

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = \Big(f_1(a) + \int_a^x f_1'(t)\,\mathrm{d}\,t\Big) - \Big(f_2(a) + \int_a^x f_2'(t)\,\mathrm{d}\,t\Big)$$
$$= f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{pro} \ x \in [a,b].$$

Důkaz je dokončen. □

3.18 Cvičení. (i) Dokažte následující tvrzení:

Jestliže $f \in \mathbb{AC}[a,b]$, pak je $f' = 0$ s.v. na $[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když f je konstantní na $[a,b]$. (Srovnejte s poznámkou 2.31.)

(ii) Je známo, že je-li f absolutně spojitá na $[a,b]$ a $v(x) = \operatorname{var}_a^x f$, pak platí $v' = |f'|$ s.v. na $[a,b]$ (viz [15, Věta 118]). Na základě tohoto faktu dokažte, že $\operatorname{var}_a^b f = \displaystyle\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ pro každou funkci f absolutně spojitou na $[a,b]$.

3.3 Lebesgueův rozklad funkcí s konečnou variací

Víme již (viz větu 2.39 a poznámku 2.40), že každou funkci s konečnou variací na $[a,b]$ můžeme rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové resp. na rozdíl dvou funkcí neklesajících na $[a,b]$ (viz větu 2.14). Další možnost rozkladu funkcí s konečnou variací nabízí následující věta.

3.19 Věta (LEBESGUEŮV ROZKLAD FUNKCE S KONEČNOU VARIACÍ)**.** *Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ existují absolutně spojitá funkce f^{AC}, singulární spojitá funkce f^{SC} a skoková funkce f^{B} takové, že*

$$f = f^{\mathrm{AC}} + f^{\mathrm{SC}} + f^{\mathrm{B}} \ \textit{na} \ [a,b].$$

Jestliže $f = f_1 + f_2 + f_3$, kde funkce f_1 je absolutně spojitá na $[a,b]$, funkce f_2 je singulární a spojitá na $[a,b]$ a funkce f_3 je skoková funkce na $[a,b]$, pak jsou funkce $f^{\mathrm{AC}} - f_1$, $f^{\mathrm{SC}} - f_2$ a $f^{\mathrm{B}} - f_3$ konstantní na $[a,b]$.

D ů k a z. a) Podle věty 2.39 existuje skoková funkce f^{B} taková, že funkce $f^{\mathrm{C}} = f - f^{\mathrm{B}}$ je spojitá na $[a,b]$, a vzhledem k větě 3.10 je $f' \in \mathbb{L}^1[a,b]$. Položme

$$f^{\mathrm{AC}}(x) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{a} \quad f^{\mathrm{SC}}(x) = f^{\mathrm{C}}(x) - f^{\mathrm{AC}}(x) \ \text{ pro } x \in [a,b].$$

Podle věty 2.37 je $(f^{\mathrm{B}})' = 0$ s.v. na $[a,b]$ a podle věty 3.13 máme $(f^{\mathrm{AC}})' = f'$ s.v. na $[a,b]$. To znamená, že

$$(f^{\mathrm{SC}})' = f' - (f^{\mathrm{AC}})' - (f^{\mathrm{B}})' = 0 \text{ s.v. na } [a,b].$$

b) Nechť $f = f_1 + f_2 + f_3$, kde $f_1 \in \mathbb{AC}[a,b]$, f_2 je singulární a spojitá na $[a,b]$ a $f_3 \in \mathbb{B}[a,b]$. Podle věty 2.39 jsou rozdíly $\big(f^{\mathrm{AC}} + f^{\mathrm{SC}}\big) - \big(f_1 + f_2\big)$ a $f^{\mathrm{B}} - f_3$ konstantní na $[a,b]$. Protože $f^{\mathrm{AC}} + f^{\mathrm{SC}} + f^{\mathrm{B}} = f_1 + f_2 + f_3$, znamená to, že existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $\big(f^{\mathrm{AC}} + f^{\mathrm{SC}}\big) - \big(f_1 + f_2\big) = f_3 - f^{\mathrm{B}} = c$. Tudíž

$$\big(f^{\mathrm{AC}} - f_1\big) = c - \big(f^{\mathrm{SC}} - f_2\big) \quad \text{a} \quad \big(f^{\mathrm{AC}} - f_1\big)' = 0 \quad \text{s.v. na } [a,b].$$

Protože obě funkce f^{AC} i f_1 jsou absolutně spojité na intervalu $[a,b]$, plyne odtud podle věty 3.17 (viz též cvičení 3.18), že také rozdíl $f^{\mathrm{AC}} - f_1$ je konstantní na $[a,b]$. Tím jsme dokončili důkaz. □

3.20 Definice. Jestliže $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, pak funkce f^{AC}, resp. f^{SC}, resp. f^{B} z věty 3.19 nazýváme *absolutně spojitá část*, resp. *spojitá singulární část*, resp. *skoková část* funkce f.

3.21 Cvičení. Dokažte následující tvrzení: *Pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a každé $x \in [a,b]$ platí*

$$f^{\mathrm{AC}}(x) - f^{\mathrm{AC}}(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Kapitolu uzavřeme ještě jedním doplňkem k větě 3.19.

3.22 Věta. *Je-li $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ neklesající na $[a,b]$, pak jsou neklesající na $[a,b]$ i funkce f^{AC}, f^{SC}, a f^{B} z věty 3.19.*

D ů k a z. Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ je neklesající na $[a,b]$ a funkce f^{AC}, f^{SC}, f^{B} jsou přiřazeny funkci f podle věty 3.19. Dále nechť $\{w_k\}$ je množina bodů nespojitosti funkce f a x, y je libovolná dvojice bodů z $[a,b]$ taková, že $x \leq y$.

Protože f je neklesající na $[a,b]$, máme

$$\Delta^+ f(t) \ge 0 \text{ a } \Delta^- f(s) \ge 0 \text{ pro } t \in [a,b),\ s \in (a,b],$$

a proto

$$f^{\,\mathrm{B}}(y) - f^{\,\mathrm{B}}(x) = \sum_{x<w_k\le y} \Delta^- f(w_k) + \sum_{x\le w_k<y} \Delta^+ f(w_k) \ge 0.$$

Skoková část $f^{\,\mathrm{B}}$ funkce f je tedy neklesající na $[a,b]$.

Označme dále symbolem g spojitou část funkce f, tj. $g = f - f^{\,\mathrm{B}}$. Podle důsledku 2.27 máme

$$f^{\,\mathrm{B}}(y) - f^{\,\mathrm{B}}(x) \le \mathrm{var}_x^y f = f(y) - f(x),$$

a tudíž

$$g(y) - g(x) = \big(f(y) - f(x)\big) - \big(f^{\,\mathrm{B}}(y) - f^{\,\mathrm{B}}(x)\big) \ge 0.$$

Spojitá část funkce f je tedy neklesající na $[a,b]$.

Pro s.v. $t \in [a,b]$ je

$$f'(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(s) - f(t)}{s-t} \in \mathbb{R}.$$

Protože je f neklesající na $[a,b]$, platí $f'(t) \ge 0$ pro s.v. $t \in [a,b]$. Podle důkazu věty 3.19 tedy dostaneme

$$f^{\,\mathrm{AC}}(y) - f^{\,\mathrm{AC}}(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t \ge 0, \text{ jakmile } x,\, y \in [a,b] \text{ a } x \le y.$$

To znamená, že $f^{\,\mathrm{AC}}$ je neklesající na $[a,b]$.

Podle věty 2.37 je $(f^{\,\mathrm{B}})' = 0$ s.v. na $[a,b]$, a tudíž

$$g' = f' - (f^{\,\mathrm{B}})' = f' \quad \text{s.v. na } [a,b].$$

Odtud použitím (3.8) a důkazu věty 3.19 odvodíme, že platí

$$g(y) - g(x) \ge \int_x^y g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t = f^{\,\mathrm{AC}}(y) - f^{\,\mathrm{AC}}(x)$$

neboli

$$\begin{aligned} f^{\,\mathrm{SC}}(y) - f^{\,\mathrm{SC}}(x) &= \big(g(y) - f^{\,\mathrm{AC}}(y)\big) - \big(g(x) - f^{\,\mathrm{AC}}(x)\big) \\ &= \big(g(y) - g(x)\big) - \big(f^{\,\mathrm{AC}}(y) - f^{\,\mathrm{AC}}(x)\big) \geq 0. \end{aligned}$$

Spojitá singulární část $f^{\,\mathrm{SC}}$ funkce f je tedy také neklesající na $[a, b]$. Tím je důkaz dokončen. □

Další podrobnosti o funkcích absolutně spojitých lze nalézt v monografiích V. Jarníka *Diferenciální počet* II [14, v.9], *Integrální počet* II [15, v.5], A. N. Kolmogorova a S. V. Fomina *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy* [16, Sec. 33.2] a Š. Schwabika *Integrace v* $\mathbb{R}$ $($*Kurzweilova teorie*$)$ [46, XIII.4] a ve skriptech [33] J. Lukeše a J. Malého *Measure and Integral*.