Kapitola 2

Funkce s konečnou variací

V této kapitole definujeme variaci funkce a odvodíme základní vlastnosti třídy funkcí, které mají konečnou variaci na daném uzavřeném a konečném intervalu. Funkce s konečnou variací jsou užitečné v celé řadě fyzikálních a technických problémů, v teorii pravděpodobnosti, teorii Fourierových řad, v diferenciálních rovnicích a v dalších oblastech matematiky.

2.1 Definice a základní vlastnosti

Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Připomeňme, děleními intervalu $[a,b]$ nazýváme konečné množiny bodů $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ takové, že

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_m = b$$

a symbol $\mathscr{D}[a,b]$ značí množinu všech dělení intervalu $[a,b]$. Dále elementy dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ jsou zpravidla značeny symboly σ_j, $\nu(\boldsymbol{\sigma}) = m$,

$$\sigma_{\nu(\boldsymbol{\sigma})} = b \quad \text{a} \quad |\boldsymbol{\sigma}| = \max_{j=1,2,\ldots,\nu(\boldsymbol{\sigma})} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \quad \text{pro } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b].$$

Jestliže $\boldsymbol{\sigma}' \supset \boldsymbol{\sigma}$, pak říkáme, že $\boldsymbol{\sigma}'$ je *zjemnění* $\boldsymbol{\sigma}$.

2.1 Definice. Pro danou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ definujeme

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]} V(f,\boldsymbol{\sigma}).$$

Je-li $a = b$, definujeme $\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^a f = 0$. Veličinu $\operatorname{var}_a^b f$ nazýváme *variace funkce* f na intervalu $[a,b]$. Je-li $\operatorname{var}_a^b f < \infty$, říkáme, že funkce f má *konečnou variaci* na $[a,b]$. Množinu funkcí s konečnou variací na $[a,b]$ značíme $\mathbb{BV}[a,b]$.

Geometrický význam pojmu variace nám přiblíží následující tvrzení, zpravidla nazývané DRUHÁ JORDANOVA VĚTA. Dříve než ji budeme formulovat, připomeňme, jak se definuje délka křivky, která je zadána jako graf spojité funkce f na intervalu $[a,b]$:

Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ je součet

$$\lambda(f,\boldsymbol{\sigma}) := \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \sqrt{\big(\sigma_j - \sigma_{j-1}\big)^2 + \big(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\big)^2}.$$

roven délce lomené křivky proložené body $[\sigma_j, f(\sigma_j)], j=0,1,\dots,m,$ ležícími na grafu funkce f. Délka grafu $\Lambda(f;[a,b])$ funkce f na intervalu $[a,b]$ se pak definuje jako

$$\Lambda(f;[a,b]) = \sup_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]} \lambda(f,\boldsymbol{\sigma}).$$

2.2 Věta (DRUHÁ JORDANOVA VĚTA)**.** *Nechť f je spojitá na $[a,b]$. Potom má její graf na intervalu $[a,b]$ konečnou délku právě tehdy, když f má konečnou variaci na intervalu $[a,b]$.*

D ů k a z . Použijeme nerovnosti

$$|\beta| \le \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \le |\alpha| + |\beta|, \tag{2.1}$$

které platí pro libovolná reálná čísla α,β. (Odvodíme je odmocněním triviálních nerovností $\beta^2 \le \alpha^2+\beta^2 \le (|\alpha|+|\beta|)^2$.) Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ máme podle (2.1)

$$\begin{aligned}
V(f,\boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| \\
&\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \sqrt{\big(\sigma_j - \sigma_{j-1}\big)^2 + \big(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\big)^2} = \lambda(f,\boldsymbol{\sigma}) \\
&\le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \Big[\big(\sigma_j - \sigma_{j-1}\big) + \big|f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\big|\Big] = (b-a) + V(f,\boldsymbol{\sigma})
\end{aligned}$$

neboli

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) \le \lambda(f,\boldsymbol{\sigma}) \le V(f,\boldsymbol{\sigma}) + (b-a).$$

Přechodem k supremu dostaneme nerovnosti

$$\operatorname{var}_a^b f \le \Lambda(f;[a,b]) \le \operatorname{var}_a^b f + (b-a),$$

ze kterých tvrzení věty okamžitě plyne. $\square$

2.3 Příklad. Buď f funkce spojitá na intervalu $[a,b]$ a taková, že pro každé $x \in (a,b)$ platí $|f'(x)| \le M < \infty$, kde M nezávisí na x.

Podle věty o střední hodnotě tedy platí $|f(y) - f(x)| \le M\,|y-x|$ pro všechna $x, y \in [a,b]$. Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ tedy máme

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) \le M \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big[\sigma_j - \sigma_{j-1}\big] = M\,[b-a].$$

Vidíme, že *každá funkce spojitá na intervalu* $[a,b]$, *která má na jeho vnitřku* (a,b) *ohraničenou derivaci, má konečnou variaci*.

Jestliže je navíc $|f'|$ riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a,b]$ (na příklad f' je spojitá na (a,b)), můžeme variaci funkce f na intervalu $[a,b]$ přesně určit. Platí totiž

$$\operatorname{var}_a^b f = (\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x, \tag{2.2}$$

kde na pravé straně je Riemannův integrál. Důkaz tohoto tvrzení pochopitelně předpokládá znalost Riemannova integrálu.

Buď dáno $\varepsilon > 0$. Předpoklad o existenci a konečné hodnotě Riemannova integrálu $(\mathrm{R})\displaystyle\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x$ znamená, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f'(\xi_j)|\,(\sigma_j - \sigma_{j-1}) - (\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3}$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta$ a každý výběr bodů ξ_j takových, že

$$\xi_j \in [\sigma_{j-1}, \sigma_j] \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\sigma}). \tag{2.4}$$

Na druhou stranu, podle definice variace existuje $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta$ a

$$\operatorname{var}_a^b f \ge V(f,\boldsymbol{\sigma}) > \operatorname{var}_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.5}$$

Podle věty o střední hodnotě existují body ξ_j, $j = 1, 2, \dots, \nu(\boldsymbol{\sigma})$, splňující (2.4) a takové, že

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f'(\xi_j)|\,(\sigma_j - \sigma_{j-1}).$$

Odtud podle (2.3) a (2.5) dostáváme, že platí

$$\begin{aligned}
&\Big|\operatorname{var}_a^b f - (\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\Big| \\
&\le |\operatorname{var}_a^b f - V(f,\boldsymbol{\sigma})| + \Big|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} |f'(\xi_j)|\,(\sigma_j - \sigma_{j-1}) - (\mathrm{R})\int_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x\Big| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, to znamená, že platí (2.2).

2.4 Cvičení. (i) Dokažte, že pro libovolnou spojitou funkci f platí

$$\Big(\big(\operatorname{var}_a^b f\big)^2 + (b-a)^2\Big)^{1/2} \le \Lambda(f,[a,b]) \le \operatorname{var}_a^b f + (b-a).$$

(ii) Určete $\operatorname{var}_a^b f$ a odhadněte délku grafu funkce f, jestliže

a) $f(x) = \sin^2 x,\ \ a=0,\ b=\pi,$

b) $f(x) = x^3 - 3\,x + 4,\ \ a=0,\ b=2,$

c) $f(x) = \cos x + x \sin x,\ \ a=0,\ b=2\,\pi.$

2.5 Poznámka. Z definice 2.1 je zřejmé, že pro každou funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je $\operatorname{var}_a^b f \ge 0$. Dále je-li dáno libovolné dělení $\boldsymbol{\rho}\in\mathscr{D}[a,b]$, pak platí

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}} V(f,\boldsymbol{\sigma}). \tag{2.6}$$

To plyne z několika elementárních pozorování: Zaprvé, protože

$$\{V(f,\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b] \ \text{ a } \ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}\} \subset \{V(f,\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\},$$

musí být $\sup_{\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}} V(f,\boldsymbol{\sigma}) \le \operatorname{var}_a^b f$.

Dále díky trojúhelníkové nerovnosti pro libovolná dvě dělení $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\sigma}'$ intervalu $[a,b]$ taková, že $\boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\sigma}$, a funkci $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, máme $V(f,\boldsymbol{\sigma}) \le V(f,\boldsymbol{\sigma}')$.

Konečně, je-li $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ libovolné a $\boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{\sigma}\cup\boldsymbol{\rho}$, pak $\boldsymbol{\sigma}'\supset\boldsymbol{\rho}$ a tedy $V(f,\boldsymbol{\sigma}) \le V(f,\boldsymbol{\sigma}')$. To znamená, že pro každé $d\in\{V(f,\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]\}$ existuje $d'\in\{V(f,\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b] \ \text{ a } \ \boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}\}$ takové, že $d\le d'$, a tedy

$$\operatorname{var}_a^b f \le \sup_{\boldsymbol{\sigma}\supset\boldsymbol{\rho}} V(f,\boldsymbol{\sigma}).$$

Platí tedy (2.6).

2.6 Cvičení. Dokažte následující vlastnosti variace a funkcí s konečnou variací.

(i) *Je-li* $[c,d] \subset [a,b]$, *pak pro každou funkci* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *platí*

$$|f(d)-f(c)| \le \operatorname{var}_c^d f \le \operatorname{var}_a^b f.$$

(ii) $\operatorname{var}_a^b f = d \in \mathbb{R}$
$\iff \Big(\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \mathscr{D}[a,b] : \boldsymbol{\sigma} \supset \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \implies d - \varepsilon \le V(f,\boldsymbol{\sigma}) \le d\Big).$

(iii) $\operatorname{var}_a^b f = \infty \iff \big(\forall\, K > 0 \;\; \exists\, \boldsymbol{\sigma}_K \in \mathscr{D}[a,b] : V(f, D_K) \ge K\big).$

(iv) *Jestliže pro funkci* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *existuje* $L \in \mathbb{R}$ *takové, že*

$$|f(x)-f(y)| \le L\,|x-y| \quad \textit{platí pro všechna } x,y \in [a,b],$$

pak $\operatorname{var}_a^b f \le L\,(b-a)$.

(V takovém případě říkáme, že f splňuje *Lipschitzovu podmínku* na $[a,b]$, nebo též, že je *lipschitzovská* na $[a,b]$.)

2.7 Příklad. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, \\ x\,\sin\!\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{pro } x \in (0,2]. \end{cases}$$

Všimněme si, že $f(x) = 0$ právě když $x = 0$ nebo $x = \dfrac{1}{k}$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a pro $x \in (0,2]$ platí

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{právě když } x = y_k = \dfrac{2}{4\,k+1},\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ -x & \text{právě když } x = z_k = \dfrac{2}{4\,k-1},\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Pro dané $n \in \mathbb{N}$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}^n = \{0, y_n, z_n, \dots, y_1, z_1, 2\}$ dostaneme

$$\begin{aligned} V(f,\boldsymbol{\sigma}^n) &= |f(0)-f(y_n)| + \sum_{k=1}^n |f(y_{k-1}) - f(z_k)| + \sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(z_k)| \\ &= y_n + \sum_{k=1}^n \big(y_{k-1} + z_k\big) + \sum_{k=1}^n \big(y_k + z_k\big) \end{aligned}$$

$$= y_0 + 2\sum_{k=1}^{n}\bigl(y_k + z_k\bigr) = 2 + 4\sum_{k=1}^{n}\frac{8\,k}{16\,k^2-1} \geq 2\Bigl(1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Bigr).$$

Je známo, že $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty$. Tudíž $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V(f,\boldsymbol{\sigma}^n) = \infty$ a $\operatorname{var}_0^2 f = \infty$.

Snadno můžeme určit variaci monotónních funkcí.

2.8 Věta. *Pro každou funkci* f *monotónní na* $[a,b]$ *platí* $\operatorname{var}_a^b f = |f(b) - f(a)|$.

D ů k a z . Je-li f nerostoucí na $[a,b]$ a $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$, pak

$$\begin{aligned}
V(f,\boldsymbol{\sigma}) &= \sum_{j=1}^{m}\bigl[f(\sigma_{j-1}) - f(\sigma_j)\bigr]\\
&= \bigl[f(a) - f(\sigma_1)\bigr] + \bigl[f(\sigma_1) - f(\sigma_2)\bigr] + \cdots\\
&\qquad + \bigl[f(\sigma_{m-2}) - f(\sigma_{m-1})\bigr] + \bigl[f(\sigma_{m-2}) - f(b)\bigr]\\
&= f(a) - f(b),
\end{aligned}$$

tj. $\quad \operatorname{var}_a^b f = f(a) - f(b) = \bigl|f(b) - f(a)\bigr|$.

Podobně bychom ukázali, že je-li f neklesající na $[a,b]$, pak

$$\operatorname{var}_a^b f = f(b) - f(a) = \bigl|f(b) - f(a)\bigr|. \qquad \square$$

2.9 Cvičení. Dokažte,že funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ má konečnou variaci na $[a,b]$ právě tehdy, když existuje taková neklesající funkce φ na $[a,b]$, že

$$|f(x) - f(y)| \leq \varphi(x) - \varphi(y) \quad \text{pro } x,y \in [a,b],\ y \leq x.$$

2.10 Příklady. (i) Příkladem jednoduché funkce, která nemá ohraničenou derivaci na intervalu $[0,1]$ (a tudíž tvrzení z příkladu 2.3 (i) nezaručuje, že má konečnou variaci na $[0,1]$) je $f(x) = \sqrt{x}$. Protože je ale f rostoucí, je $\operatorname{var}_0^1 f = 1$ podle věty 2.8.

(ii) Konečnou variaci mohou mít i funkce nespojité, jak ukazuje příklad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x = 0,\\ \dfrac{1}{k} & \text{je-li } x \in (0,1] \quad \text{a} \quad x \in \bigl(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\,\bigr] \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Tato funkce je zřejmě definovaná a neklesající na intervalu $[0,1]$. Podle věty 2.8 je tedy $\operatorname{var}_0^1 f = 1$.

2.11 Věta. *Pro každé* $c \in [a,b]$ *a každou funkci* $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ *platí*

$$\operatorname{var}_a^b f = \operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f.$$

D ů k a z . Buďte dány funkce $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ a bod $c \in [a,b]$. Pokud $c = a$ nebo $c = b$, je tvrzení věty triviální. Nechť tedy $c \in (a,b)$.

Nechť $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \{a, c, b\}$ a nechť $\boldsymbol{\sigma}$ je libovolné dělení intervalu $[a,b]$ takové, že $\boldsymbol{\sigma} \supset \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Pak nutně $c \in \boldsymbol{\sigma}$. Dělení $\boldsymbol{\sigma}$ lze tudíž rozdělit na dělení $\boldsymbol{\sigma}'$ intervalu $[a,c]$ a dělení $\boldsymbol{\sigma}''$ intervalu $[c,b]$, tj. $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}''$, kde $\boldsymbol{\sigma}' \in \mathscr{D}[a,c]$ a $\boldsymbol{\sigma}'' \in \mathscr{D}[c,b]$. Zřejmě pak také platí

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) = V(f,\boldsymbol{\sigma}') + V(f,\boldsymbol{\sigma}''). \tag{2.7}$$

Podle poznámky 2.5 dostáváme tedy

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \supset \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}} V(f,\boldsymbol{\sigma}) \le \operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f.$$

Na druhou stranu pro každá dvě dělení $\boldsymbol{\sigma}' \in \mathscr{D}[a,c]$ a $\boldsymbol{\sigma}'' \in \mathscr{D}[c,b]$ je jejich sjednocení $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \cup \boldsymbol{\sigma}''$ dělením intervalu $[a,b]$ a platí opět (2.7). Odtud plyne, že

$$\operatorname{var}_a^c f + \operatorname{var}_c^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma}' \in \mathscr{D}[a,c]} V(f,\boldsymbol{\sigma}') + \sup_{\boldsymbol{\sigma}'' \in \mathscr{D}[c,b]} V(f,\boldsymbol{\sigma}'') \le \operatorname{var}_a^b f.$$

Tím je důkaz věty hotov. □

2.12 Příklad. Buď dáno $n \in \mathbb{N}$. Vyšetřujme funkci

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ x \sin(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } \frac{1}{n} \le x \le 2. \end{cases}$$

Její derivace

$$f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \le x < \frac{1}{n}, \\ \sin(\dfrac{\pi}{x}) - \dfrac{\pi}{x} \cos(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } \frac{1}{n} > x \le 2 \end{cases}$$

je ohraničená na $(0, \frac{1}{n})$ a na $(\frac{1}{n}, 2)$. Zřejmě je $\operatorname{var}_0^{1/n} f_n = 0$. Podle příkladu 2.3 (i) je dále $\operatorname{var}_{1/n}^2 f_n < \infty$. Věta 2.11 tedy implikuje, že je také $\operatorname{var}_0^1 f_n < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Na množině $\mathbb{BV}[a,b]$ jsou přirozeným způsobem definovány operace sčítání a násobení skalárem (viz Úmluvy a označení (x)). Funkci identicky nulovou na $[a,b]$ nazveme nulovým prvkem množiny $\mathbb{BV}[a,b]$. Následující tvrzení je zřejmé.

2.13 Lemma. *Pro libovolné dvě funkce* $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ *a reálné číslo* c *platí*

$$\operatorname{var}_a^b (f_1 + f_2) \le \operatorname{var}_a^b f_1 + \operatorname{var}_a^b f_2 \quad a \quad \operatorname{var}_a^b (c\, f_1) = |c| \operatorname{var}_a^b f_1. \tag{2.8}$$

Dále $\operatorname{var}_a^b f = 0$ *tehdy a jen tehdy, když* f *je konstantní na* $[a,b]$.

Stačí si totiž uvědomit, že pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ platí

$$V(f_1 + f_2, \boldsymbol{\sigma}) \le V(f_1, \boldsymbol{\sigma}) + V(f_2, \boldsymbol{\sigma}) \quad \text{a} \quad V(c\, f, \boldsymbol{\sigma}) = |c|\, V(f, \boldsymbol{\sigma})$$

a dále že je-li $\operatorname{var}_a^b f = 0$, musí pro každé $x \in (a,b]$ platit $|f(x) - f(a)| = 0$.

2.14 Věta. $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *tehdy a jen tehdy, když existují funkce* f_1 *a* f_2 *neklesající na* $[a,b]$ *a takové, že platí* $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ *pro každé* $x \in [a,b]$.

D ů k a z . Jestliže f_1 a f_2 jsou neklesající na $[a,b]$ a $f = f_1 - f_2$, pak podle věty 2.8 mají f_1 i f_2 konečnou variaci na $[a,b]$ a podle (2.8) je také $\operatorname{var}_a^b f < \infty$.

Stačí tedy dokázat, že pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ existují funkce f_1 a f_2 neklesající na $[a,b]$ a takové, že $f = f_1 - f_2$.

Nechť tedy $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Položme

$$f_1(x) = \operatorname{var}_a^x f \quad \text{a} \quad f_2(x) = f_1(x) - f(x) \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Nechť $x, y \in [a,b]$ a $y \ge x$. Potom podle věty 2.11 je $f_1(y) = f_1(x) + \operatorname{var}_x^y f$, a protože variace je vždy nezáporná, znamená to, že funkce f_1 je neklesající na $[a,b]$. Dále podle věty 2.11 máme

$$f_2(y) = f_1(x) + \operatorname{var}_x^y f - f(y)$$

a

$$f_2(y) - f_2(x) = \operatorname{var}_x^y f - (f(y) - f(x)) \ge 0$$

(viz cvičení 2.6 (i)). To znamená, že funkce f_2 je také neklesající na $[a,b]$ a důkaz je hotov. □

2.15 Cvičení. Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$. Dokažte, že obě funkce

$$\mathfrak{p}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = a, \\ \sup\limits_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,x]} \sum\limits_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\big)^+ & \text{pro } x \in (a,b] \end{cases}$$

a

$$\mathfrak{n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = a, \\ \sup\limits_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,x]} \sum\limits_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} \big(f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})\big)^- & \text{pro } x \in (a,b] \end{cases}$$

jsou neklesající a nezáporné na $[a,b]$ a platí

$$f(x) = f(a) + \mathfrak{p}(x) - \mathfrak{n}(x) \quad \text{a} \quad \operatorname{var}_a^x f = \mathfrak{p}(x) + \mathfrak{n}(x) \ \text{ pro } x \in [a,b].$$

2.16 Důsledek. *Pro každou funkci f s konečnou variací na $[a,b]$ a pro všechna $t \in [a,b)$ a $s \in (a,b]$ existují konečné limity*

$$f(t+) = \lim_{\tau \to t+} f(\tau) \quad \textit{a} \quad f(s-) = \lim_{\tau \to s-} f(\tau)$$

(tj. f může mít v $[a,b]$ pouze nespojitosti prvního druhu).[1]

D ů k a z . Podle věty 2.14 můžeme předpokládat, že f je neklesající na $[a,b]$. Pro každé $x \in [a,b]$ je $f(a) \le f(x) \le f(b)$, a tudíž platí také

$$f(a) \le \sup_{x \in [a,s)} f(x) \le f(b) \quad \text{pro každé } s \in (a,b]$$

a

$$f(a) \le \inf_{x \in (t,b]} f(x) \le f(b) \quad \text{pro každé } t \in [a,b)$$

Ukážeme, že

$$f(t+) = \inf_{x \in (t,b]} f(x), \quad \text{jestliže } t \in [a,b) \tag{2.9}$$

Označme $d = \inf\limits_{x \in (t,b]} f(x)$ a zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Potom podle definice infima existuje $t' \in (t,b]$ takové, že je $d \le f(t') < d + \varepsilon$. Vzhledem k monotónnosti

[1] Říkáme, že bod x je bodem nespojitosti 1. druhu funkce f, jestliže existují konečné limity $f(x-)$, $f(x+)$, přičemž $f(x-) \ne f(x+)$

funkce f odtud plyne, že nerovnost $d \leq f(x) < d + \varepsilon$ platí pro každé $x \in (t, t']$. Dokázali jsme tedy vztah (2.9).

Podobně bychom ukázali, že platí také

$$f(s-) = \sup_{x \in [a,s)} f(x), \quad \text{jestliže } s \in (a, b]. \tag{2.10}$$

□

2.2 Prostor funkcí s konečnou variací

Podle lemmatu 2.13 každá lineární kombinace funkcí s konečnou variací má také konečnou variaci. Z toho plyne, že množina $\mathbb{BV}[a,b]$ je lineární prostor. Ukážeme, že při vhodně zvolené normě se $\mathbb{BV}[a,b]$ stane lineárním normovaným prostorem.

2.17 Věta. $\mathbb{BV}[a,b]$ *je lineární normovaný prostor vzhledem k normě definované předpisem*

$$\|f\|_{\mathbb{BV}} = |f(a)| + \operatorname{var}_a^b f \quad \textit{pro } f \in \mathbb{BV}[a,b]. \tag{2.11}$$

D ů k a z. $\mathbb{BV}[a,b]$ je lineární prostor podle lemmatu 2.13. Dále pro každou funkci $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a každé $x \in [a,b]$ platí

$$|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + \operatorname{var}_a^b f \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

(Rozmyslete si, proč tomu tak je.) Tudíž

$$\|f\| \leq \|f\|_{\mathbb{BV}} < \infty \text{ pro } f \in \mathbb{BV}. \tag{2.12}$$

Podle lemmatu 2.13 relace

$$\|f + g\|_{\mathbb{BV}} \leq \|f\|_{\mathbb{BV}} + \|g\|_{\mathbb{BV}} \quad \text{a} \quad \|c\,f\|_{\mathbb{BV}} = |c|\,\|f\|_{\mathbb{BV}} \tag{2.13}$$

platí pro všechny funkce $f,\ g \in \mathbb{BV}[a,b]$ a každé reálné číslo $c \in \mathbb{R}$.

Konečně, jestliže $\|f\|_{\mathbb{BV}} = 0$, musí být $f(a) = 0$ a $\operatorname{var}_a^b f = 0$ Podle lemmatu 2.13 je tedy $f(x) \equiv f(a) = 0$ na $[a,b]$, tj. f je nulový prvek $\mathbb{BV}[a,b]$.

Dokázali jsme tedy, že rovnost (2.11) definuje normu na $\mathbb{BV}[a,b]$. □

2.18 Poznámka. Nerovnost (2.12) implikuje, že každá funkce, která má ohraničenou variaci na $[a,b]$ je také ohraničená na $[a,b]$.

Podle věty 2.17 je $\mathbb{BV}[a,b]$ lineární normovaný prostor vzhledem k normě definované předpisem (2.11). Nyní dokážeme, že $\mathbb{BV}[a,b]$ je Banachův prostor vzhledem k této normě. Toto tvrzení umožňuje používání metod funkcionální analýzy při práci s funkcemi s konečnou variací. Nejprve ale připomeňme Bolzanovu-Weierstraßovu větu, kterou budeme potřebovat.

2.19 Věta (BOLZANO-WEIERSTRAß)**.** *Z každé ohraničené posloupnosti reálných čísel lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

2.20 Věta. $\mathbb{BV}[a,b]$ *je Banachův prostor.*

D ů k a z . Zbývá dokázat, že $\mathbb{BV}[a,b]$ je úplný, tj. že každá posloupnost cauchyovská v $\mathbb{BV}[a,b]$ má v $\mathbb{BV}[a,b]$ limitu. Nechť $\{f_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$ je posloupnost cauchyovská v $\mathbb{BV}[a,b]$. Potom platí

$$\left.\begin{aligned} &\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\, n_\varepsilon:\\ &n,m\ge n_\varepsilon \implies |f_n(x)-f_m(x)|\le\|f_n-f_m\|_{\mathbb{BV}}<\varepsilon \text{ pro } x\in[a,b]. \end{aligned}\right\}\tag{2.14}$$

a) Podle (2.14) je pro každé $x\in[a,b]$ posloupnost reálných čísel $\{f_n(x)\}$ cauchyovská. Pro každé $x\in[a,b]$ tedy existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x).$$

b) Nechť je dáno libovolné $\varepsilon>0$ a nechť $n_\varepsilon\in\mathbb{N}$ je určeno podmínkou (2.14). Potom pro každé $x\in[a,b]$ máme také

$$|f(x)-f_{n_\varepsilon}(x)|=\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f_{n_\varepsilon}(x)|\le\varepsilon,$$

a tudíž pro každé $n\ge n_\varepsilon$ a každé $x\in[a,b]$ platí

$$|f(x)-f_n(x)|\le|f(x)-f_{n_\varepsilon}(x)|+|f_{n_\varepsilon}(x)-f_n(x)|<2\,\varepsilon.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0$$

neboli posloupnost $\{f_n\}$ konverguje k f stejnoměrně na $[a,b]$.

c) Podle (2.13) a (2.14) existuje $n_1\in\mathbb{N}$ takové, že

$$\operatorname{var}_a^b f_n\le\|f_n\|_{\mathbb{BV}}\le\|f_{n_1}\|_{\mathbb{BV}}+1 \text{ pro } n\ge n_1.$$

Číselná posloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_n\}$ je tedy ohraničená. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty z ní lze vybrat podposloupnost $\{\operatorname{var}_a^b f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\},$ pro kterou platí

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{var}_a^b f_{n_k} = d < \infty,$$

tj.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, k_\varepsilon \in \mathbb{N} : \Big(k \geq k_\varepsilon \text{ a } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] \implies V(f_{n_k}, \boldsymbol{\sigma}) < d + \varepsilon\Big)$$

a

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b] : V(f, \boldsymbol{\sigma}) = \lim_{k\to\infty} V(f_{n_k}, \boldsymbol{\sigma}) \leq d + \varepsilon.$$

Odtud ovšem už plyne, že je

$$\operatorname{var}_a^b f = \sup_{\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]} V(f, \boldsymbol{\sigma}) \leq d < \infty, \quad \text{tj. } f \in \mathbb{BV}[a,b].$$

d) Podle (2.14) tedy pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takové, že

$$n, m \geq n_\varepsilon \implies V(f_n - f_m, \boldsymbol{\sigma}) \leq \operatorname{var}_a^b (f_n - f_m) < \varepsilon \text{ pro } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b].$$

Tudíž, je-li $m \geq n_\varepsilon,$ pak pro každé $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ platí

$$V(f - f_m, \boldsymbol{\sigma}) = \lim_{n\to\infty} V(f_n - f_m, \boldsymbol{\sigma}) \leq \varepsilon \text{ neboli } \operatorname{var}_a^b (f - f_m) \leq \varepsilon.$$

To ovšem znamená, že $\lim_{m\to\infty} \|f - f_m\|_{\mathbb{BV}} = 0,$ což zbývalo ještě dokázat. □

2.3 Konečná variace a spojitost

Podle důsledku 2.16 mohou mít funkce s konečnou variací nespojitosti pouze prvního druhu. Podívejme se nyní trochu podrobněji na vlastnosti funkcí s konečnou variací související se spojitostí.

2.21 Věta. *Každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti na intervalu $[a,b]$.*

D ů k a z plyne z důsledku 2.16 a z následujícího lemmatu. □

2.22 Lemma. *Nechť $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval, $f : J \to \mathbb{R}$ a M je množina bodů nespojitosti 1. druhu funkce f v J. Potom M je nejvýše spočetná.*

D ů k a z . a) Označme

$$M^+ = \{x \in J : f(x+) \neq f(x)\}, \qquad M^- = \{x \in J : f(x-) \neq f(x)\}$$

a

$$M_1^+ = \{x \in M^+ : f(x) < f(x+)\},\ M_2^+ = \{x \in M^+ : f(x) > f(x+)\}.$$

Potom je $M = M^+ \cup M^-$ a $M^+ = M_1^+ \cup M_2{}^+.$ Uspořádejme množinu $\mathbb{P}$ racionálních čísel do posloupnosti $\mathbb{P} = \{r_k\}.$ (Uvědomte si však, že množinu $\mathbb{P}$ nelze uspořádat „podle velikosti“, tj. tak aby platilo $r_k < r_{k+1}$ pro každé $k \in \mathbb{N}.$)
Nechť r značí zobrazení, které každému $x \in M_1^+$ přiřadí první (při daném uspořádání množiny $\mathbb{P}$) racionální číslo, které leží v intervalu $(f(x), f(x+)).$ Přesněji řečeno,

$$r(x) = r_j \iff r_j \in (f(x), f(x+)) \text{ a } \{r_1, r_2, \ldots, r_{j-1}\} \cap (f(x), f(x+)) = \emptyset.$$

Dále pro každé $q \in \mathbb{P}$ označme symbolem $r_{-1}(q)$ jeho vzor při zobrazení $r,$ tj.

$$r_{-1}(q) = \{x \in M_1^+ : r(x) = q\}.$$

Máme

$$M_1^+ = \bigcup_{q \in \mathbb{P}} r_{-1}(q).$$

Ukážeme-li tedy, že každá množina $r_{-1}(q),\ q \in \mathbb{P}$ je spočetná, budeme mít současně také dokázáno, že i množina M_1^+ je spočetná.

Nechť je tedy dáno libovolné $q \in \mathbb{P}.$ Vzhledem k definici množiny M_1^+ a zobrazení r pro každé $x \in r_{-1}(q)$ existuje $\delta(x) > 0$ takové, že

$$x < y < x + \delta(x) \implies f(y) > r(x).$$

Jsou-li $x_1, x_2 \in r_{-1}(q)$ taková, že $x_1 < x_2$ a $r(x_1) = r(x_2) = q,$ pak musí platit

$$(x_1, x_1 + \delta(x_1)) \cap (x_2, x_2 + \delta(x_2)) = \emptyset.$$

Vskutku, kdyby bylo $x_1 < x_2 < x_1 + \delta(x_1),$ bylo by též (vzhledem k definici δ)

$$q = r(x_1) < f(x_2) < r(x_2) = q,$$

což není možné. Systém intervalů $\big\{(x, x + \delta(x)),\ x \in r_{-1}(q)\big\}$ je tedy disjunktní. Každému $x \in r_{-1}(q)$ lze tedy přiřadit jediné racionální číslo $p \in (x, x + \delta(x))$ a tím definovat prosté zobrazení $r_{-1}(q)$ do $\mathbb{P}$. To znamená, že pro každé $q \in \mathbb{P}$ je množina $r_{-1}(q)$ spočetná.

b) Protože $M_2^+ = \{x \in J : -f(x) < -f(x+)\}$, můžeme použít část a) tohoto důkazu k důkazu spočetnosti množiny $M_2{}^+$.

c) Konečně, $M^- = \{x \in J : f(-x) \neq f(-x+)\}$, takže podle částí a)–b) tohoto důkazu je také M^- spočetná množina. □

2.23 Poznámka. Klíčovým argumentem pro platnost lemmatu 2.22 je tvrzení: *Každý disjunktní systém intervalů v* $\mathbb{R}$ *je spočetný*. Důkaz tohoto tvrzení je v našem důkazu lemmatu 2.22 obsažen.

Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ a

$$v(x) = \mathrm{var}_a^x f \quad \text{pro } x \in [a,b]. \tag{2.15}$$

Podle důkazu věty 2.14 víme, že funkce v a $v - f$ jsou neklesající na $[a,b]$. Ukážeme nyní, že funkce v „kopíruje" spojitost funkce f.

2.24 Lemma. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a* $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ *je definována vztahem* (2.15). *Potom je* f *spojitá v bodě* $x \in [a,b)$ *zprava právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zprava i funkce* v. *Podobně,* f *je spojitá v bodě* $x \in (a,b]$ *zleva právě tehdy, když je v tomto bodě spojitá zleva i funkce* v.

D ů k a z . a) Nechť $x \in (a,b]$ a $f(x-) = f(x)$. Buď dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme $\delta > 0$ tak, aby platilo

$$|f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pro každé } t \in (x-\delta, x].$$

Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\} \in \mathscr{D}[a,x]$ tak, aby platilo

$$v(x) - V(f, \boldsymbol{\sigma}) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{a} \quad \sigma_{m-1} \in (x-\delta, x).$$

Máme $|f(x) - f(\sigma_{m-1})| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, a tedy

$$v(x) - \sum_{j=1}^{m-1} |f(\sigma_j) - f(\sigma_{j-1})| < |f(x) - f(\sigma_{m-1})| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Odtud snadno odvodíme, že platí $v(x) - v(\sigma_{m-1}) < \varepsilon$. Protože v je neklesající na $[a,b]$, dostáváme dále

$$v(x) - v(t) < \varepsilon \quad \text{pro každé } t \in (\sigma_{m-1}, x].$$

Tím je dokázána spojitost zleva funkce v.

b) Podobně dokážeme, že funkce v je spojitá zprava v každém bodě $x \in [a,b)$, ve kterém je zprava spojitá funkce f.

c) Pravdivost zbývajících implikací plyne okamžitě z nerovností

$$|f(x) - f(y)| \le |v(x) - v(y)|$$

platných pro všechna $x, y \in [a,b]$ (viz cvičení 2.6 (i)). □

Z následujícího tvrzení vyplyne, že součet absolutních hodnot skoků funkce s konečnou variací je vždy konečný.

2.25 Věta. *Nechť* $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a nechť* $D = \{s_k\}$ *je prostá posloupnost bodů z intervalu* (a,b). *Potom*

$$|\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)| \Big) + |\Delta^- f(b)| \le \operatorname{var}_a^b f. \qquad (2.16)$$

D ů k a z . a) Předpokládejme nejprve, že f je neklesající. Potom

$$\begin{aligned} &|\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)| \Big) + |\Delta^- f(b)| \\ &\qquad = \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta f(s_k) + \Delta^- f(b). \end{aligned}$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}$ jsou body intervalu $[a,b]$ takové, že

$$a = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_n < \sigma_{n+1} = b$$

a

$$\big\{\sigma_k : k = 0, \dots n+1\big\} = \{a\} \cup \{s_k : k = 1, \dots, n\} \cup \{b\}.$$

Zvolme dále $t_k,\ k = 1, 2, \dots, n+1,$ tak, aby platilo

$$a < t_1 < \sigma_1 < t_2 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_n < t_{n+1} < b.$$

Potom je

$$0 \le \Delta^+ f(a) \le f(t_1) - f(a),\ 0 \le \Delta^- f(b) \le f(b) - f(t_{n+1})$$

a

$$0 \leq \Delta f(\sigma_k) \leq f(t_{k+1}) - f(t_k) \quad \text{pro} \;\; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Tudíž

$$\begin{aligned}
\Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{n} \Delta f(s_k) + \Delta^- f(b) &= \Delta^+ f(a) + \sum_{k=1}^{n} \Delta f(\sigma_k) + \Delta^- f(b) \\
&\leq \big(f(t_1) - f(a)\big) + \sum_{k=1}^{n} \big(f(t_{k+1}) - f(t_k)\big) + \big(f(b) - f(t_{n+1})\big) \\
&= f(b) - f(a).
\end{aligned}$$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ tedy máme

$$\Delta^+ f(a) + \sum_{k=0}^{n} \Delta f(s_k) + \Delta^- f(b) \leq f(b) - f(a) = \operatorname{var}_a^b f.$$

Nerovnost (2.16) tedy platí pro každou funkci f neklesající na $[a, b]$.

b) Nyní nechť f je libovolná funkce s konečnou variací na $[a, b]$ a nechť funkce $\mathfrak{p}$ a $\mathfrak{n}$ jsou definovány jako ve cvičení 2.15. Potom $f = f(a) + \mathfrak{p} - \mathfrak{n}$,

$$\begin{aligned}
&\Delta^+ f(t) = \Delta^+ \mathfrak{p}(t) - \Delta^+ \mathfrak{n}(t), \;\; \Delta^- f(s) = \Delta^- \mathfrak{p}(s) - \Delta^- \mathfrak{n}(s), \\
&|\Delta^+ f(t)| = \Delta^+ \mathfrak{p}(t) + \Delta^+ \mathfrak{n}(t) \quad \text{a} \quad |\Delta^- f(s)| = \Delta^- \mathfrak{p}(s) + \Delta^- \mathfrak{n}(s)
\end{aligned}$$

pro $t \in [a, b)$, $s \in (a, b]$. Podle první části důkazu máme

$$\Delta^+ \mathfrak{p}(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\Delta^+ \mathfrak{p}(s_k) + \Delta^- \mathfrak{p}(s_k)\Big) + \Delta^- \mathfrak{p}(b) \leq \mathfrak{p}(b)$$

a

$$\Delta^+ \mathfrak{n}(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\Delta^+ \mathfrak{n}(s_k) + \Delta^- \mathfrak{n}(s_k)\Big) + \Delta^- \mathfrak{n}(b) \leq \mathfrak{n}(b).$$

Sečteme-li tyto nerovnosti, dostaneme

$$|\Delta^+ f(a)| + \sum_{k=0}^{n} \Big(|\Delta^+ f(s_k)| + |\Delta^- f(s_k)|\Big) + |\Delta^- f(b)| \leq \mathfrak{p}(b) + \mathfrak{n}(b) = \operatorname{var}_a^b f.$$

$\square$

2.26 Poznámka. Nechť $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ má konečnou variaci a nechť množina D jejích bodů nespojitosti v (a,b) je nekonečná. Podle věty 2.21 existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $k\in\mathbb{N}\to s_k\in D$ takové, že $D=\{s_k\}$. Takových zobrazení je ovšem nekonečně mnoho. Podle věty 2.25 je však řada

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(|\Delta^+ f(s_k)|+|\Delta^- f(s_k)|\Big)$$

(absolutně) konvergentní a její součet nezávisí na volbě uspořádání množiny D. Protože pro $x\in(a,b)$ je $\Big(|\Delta^+ f(x)|+|\Delta^- f(x)|\Big)\neq 0$ pouze tehdy, když $x\in D$, má tedy smysl definovat

$$\sum_{x\in(a,b)}\Big(|\Delta^+ f(x)|+|\Delta^- f(x)|\Big)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(|\Delta^+ f(s_k)|+|\Delta^- f(s_k)|\Big), \qquad (2.17)$$

kde $\{s_k\}$ je libovolná prostá posloupnost bodů z (a,b) taková, že $D=\{s_k\}$. Analogicky budeme rozumět i symbolům $\sum\limits_{x\in[a,b)}$, resp. $\sum\limits_{x\in(a,b]}$, resp. $\sum\limits_{x\in[a,b]}$.

Větu 2.25 můžeme nyní přeformulovat do následující podoby.

2.27 Důsledek. Pro každou funkci $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ platí

$$\sum_{x\in[a,b)}|\Delta^+ f(x)|+\sum_{x\in(a,b]}|\Delta^- f(x)|\leq \operatorname{var}_a^b f. \qquad (2.18)$$

2.4 Derivace funkcí s konečnou variací

Nyní se budeme věnovat vlastnostem funkcí s konečnou variací vzhledem k derivování. Nejprve připomeňme pojem množin s nulovou mírou.

2.28 Definice. Množina $M\subset\mathbb{R}$ má *nulovou míru* ($\mu(M)=0$), když ke každému $\varepsilon>0$ existuje nejvýše spočetný systém otevřených intervalů $I_j,\ j\in\mathbb{N}$, takový, že

$$M\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}I_j \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{\infty}|I_j|<\varepsilon.$$

Řekneme, že nějaká vlastnost platí *skoro všude* (s.v.) na intervalu $[a,b]$, jestliže existuje množina $M\subset[a,b]$ nulové míry taková, že tato vlastnost platí pro každé $x\in[a,b]\setminus M$.

2.29 Cvičení. Dokažte, že platí:

(i) *Každá spočetná množina* $S \subset \mathbb{R}$ *má nulovou míru.*

(ii) *Sjednocení spočetně mnoha množin nulové míry má nulovou míru.*

2.30 Věta (LEBESGUEOVA VĚTA O DERIVACI MONOTÓNNÍ FUNKCE)**.** *Každá funkce* f, *definovaná a monotónní na intervalu* $[a,b]$, *má konečnou derivaci* $f'(x)$ *pro s.v.* $x \in [a,b]$.

Důkaz věty 2.30 je rozsáhlý, technicky komplikovaný a do značné míry závislý na pojmech, které se do tohoto textu nevejdou. Pro důkaz odkazujeme na učebnice, které obsahují důkladný přehled této tematiky (viz např. [15, věta 84], [16, věta VI.1.2], [33, Theorem 22.5]).

2.31 Poznámka. Speciálně vzhledem k větě 2.14, má každá funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ konečnou derivaci skoro všude na intervalu $[a,b]$. Je dokonce známo (viz větu 3.10), že derivace funkcí s konečnou variací jsou lebesgueovsky integrovatelné. **ALE !!!** Obecně neplatí pro každou funkci $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ zdánlivě přirozená rovnost

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Existují totiž funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ nekonstantní na $[a,b]$ a takové, že $f' = 0$ s.v. na $[a,b]$.

2.32 Definice. Funkce $f \in \mathbb{BV}[a,b]$ se nazývá *singulární*, jestliže $f'(x) = 0$ pro s.v. $x \in [a,b]$.

2.5 Skokové funkce

Nejjednodušším příkladem nekonstantních singulárních funkcí jsou funkce typu $f(x) = \chi_{[a,c]}(x)$, kde $c \in (a,b)$. Jejich zobecněním jsou třídy *jednoduchých skokových funkcí* (anglicky *step functions*), resp. *skokových funkcí* (anglicky *break functions*).

2.33 Definice. (i) Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je *jednoduchá (též konečná) skoková funkce na* $[a,b]$, jestliže existuje dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ takové, že na každém jeho dílčím otevřeném intervalu (σ_{j-1}, σ_j) je f konstantní. Množinu jednoduchých skokových funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathbb{S}[a,b]$.

(ii) Funkce $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ je *skoková funkce na* $[a,b]$, jestliže buďto f je jednoduchá skoková funkce, nebo existují $c, c_0, d\in\mathbb{R}$, prostá posloupnost $\{s_k\}\subset(a,b)$ a posloupnosti $\{c_k\}\subset\mathbb{R}$ a $\{d_k\}\subset\mathbb{R}$ takové, že platí

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|c_k|+|d_k|)<\infty \tag{2.19}$$

a

$$\left.\begin{aligned} & f(x)=c+c_0\,\chi_{(a,b]}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(c_k\,\chi_{(s_k,b]}(x)+d_k\,\chi_{[s_k,b]}(x)\Big)+d\,\chi_{[b]}(x) \\ & \text{pro } x\in[a,b]. \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

Množinu skokových funkcí na intervalu $[a,b]$ značíme $\mathbb{B}[a,b]$.

2.34 Cvičení. Dokažte, že platí:

(i) $f\in\mathbb{S}[a,b]$ *právě tehdy, když existují* $m\in\mathbb{N}$, $c, c_0, d\in\mathbb{R}$, *množiny*

$$\{c_k: k=1,2,\dots,m\}\subset\mathbb{R},\ \{d_k: k=1,2,\dots,m\}\subset\mathbb{R}$$

a prostá množina $\{s_k: k=1,2,\dots,m\}\subset(a,b)$ *takové, že platí*

$$f(x)=c+c_0\,\chi_{(a,b]}(x)+\sum_{k=1}^{m}\Big(c_k\,\chi_{(s_k,b]}(x)+d_k\,\chi_{[s_k,b]}(x)\Big)+d\,\chi_{[b]}$$

pro $x\in[a,b]$.

(ii) $f\in\mathbb{B}[a,b]$ *právě tehdy, když buďto* $f\in\mathbb{S}[a,b]$, *nebo existují* $c\in\mathbb{R}$, *posloupnosti* $\{c_k\}\subset\mathbb{R}$, $\{d_k\}\subset\mathbb{R}$ *a prostá posloupnost* $\{s_k\}\subset[a,b]$ *takové, že platí* (2.19) *a*

$$f(x)=c+\sum_{a\le s_k<x}c_k+\sum_{a<s_k\le x}d_k \quad \textit{pro}\ \ x\in[a,b], \tag{2.21}$$

kde součtové symboly mají smysl zavedený v poznámce 2.26 (tj. v první sumě se sčítá přes všechny indexy k, pro které $s_k\in(a,x]$, a ve druhé se sčítá přes všechny indexy k, pro které $s_k\in[a,x)$). POZOR na jemné rozdíly mezi posloupnostmi $\{s_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$ zde a v definici 2.33.

(iii) *Pro každou funkci* $f \in \mathbb{B}[a,b]$ *tvaru* (2.21) *platí*

$$f(x-) = c + \sum_{a \le s_k < x} c_k + \sum_{a < s_k < x} d_k, \quad \textit{jestliže} \;\; x \in (a,b]$$

a

$$f(x+) = c + \sum_{a \le s_k \le x} c_k + \sum_{a < s_k \le x} d_k, \quad \textit{jestliže} \;\; x \in [a,b).$$

(Jak bude vypadat vyjádření jednostranných limit funkcí z $\mathbb{B}[a,b]$, vyjdeme-li z tvaru (2.20) ?)

2.35 Věta. *Pro každou skokovou funkci* $f \in \mathbb{B}[a,b]$ *platí*

$$\operatorname{var}_a^b f = |\Delta^+ f(a)| + \sum_{x \in (a,b)} \Big(|\Delta^+ f(x)| + |\Delta^- f(x)|\Big) + |\Delta^- f(b)| < \infty. \tag{2.22}$$

Speciálně $\mathbb{S}[a,b] \subset \mathbb{B}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b]$.

D ů k a z. Je-li $f \in \mathbb{S}[a,b]$, je tvrzení věty zřejmé. Předpokládejme tedy, že $f \in \mathbb{B}[a,b] \setminus \mathbb{S}[a,b]$ je vyjádřena ve tvaru (2.21) ze cvičení 2.34 (ii).

a) Pro libovolná $x, y \in [a,b]$, $x < y$, máme

$$|f(y) - f(x)| \le \sum_{x \le s_k < y} |c_k| + \sum_{x < s_k \le y} |d_k|.$$

Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}$ intervalu $[a,b]$ tedy platí

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) \le \sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} m\Big(\sum_{\sigma_{j-1} \le s_k < \sigma_j} |c_k| + \sum_{\sigma_{j-1} < s_k \le \sigma_j} |d_k|\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \big(|c_k| + |d_k|\big).$$

Odtud plyne podle (2.19), že

$$\operatorname{var}_a^b f \le \sum_{k=1}^{\infty} \big(|c_k| + |d_k|\big) < \infty, \tag{2.23}$$

tj. $f \in \mathbb{BV}[a,b]$.

b) Na druhou stranu, podle cvičení 2.34 (iii) snadno odvodíme, že platí

$$\Delta^+ f(s_k) = c_k \quad \text{a} \quad \Delta^- f(s_k) = d_k \quad \text{pro každé } k \in \mathbb{N}. \tag{2.24}$$

Můžeme tedy použít také důsledek 2.27, podle kterého platí obrácená nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(|c_k| + |d_k|\big) \le \operatorname{var}_a^b f$$

a uzavřít tak důkaz věty. $\square$

Je-li f jednoduchá skoková funkce na $[a,b]$, pak zřejmě platí $f'(x)=0$ pro každé $x \in [a,b] \setminus M$, kde $M \subset [a,b]$ je nějaká konečná (nebo také prázdná) množina. Jednoduché skokové funkce na $[a,b]$ jsou tedy singulární na $[a,b]$. Ukážeme, že dokonce každá skoková funkce na $[a,b]$ je singulární na $[a,b]$. K tomu budeme potřebovat následující tvrzení známé ze základů matematické analýzy jako *malá Fubinova věta*.

2.36 Věta (MALÁ FUBINIOVA)**.** *Nechť $\{f_k\}$ je posloupnost funkcí neklesajících na $[a,b]$ a taková, že řada $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konverguje pro každé $x \in [a,b]$. Potom $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) < \infty$ pro s.v. $x \in [a,b]$.*

Důkaz. a) Označme

$$g_k(x) = f_k(x) - f_k(a) \quad \text{a} \quad g(x) = f(x) - f(a) \quad \text{pro } k \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad x \in [a,b]$$

Potom jsou všechny funkce $g, g_k,\ k \in \mathbb{N}$, nezáporné a neklesající na $[a,b]$. Podle věty 2.30 pro každé $k \in \mathbb{N}$ existuje množina $D_k \subset [a,b]$ nulové míry taková, že funkce g_k má konečnou derivaci $g'_k(x)$ pro každé $x \in [a,b] \setminus D_k$. Podobně existuje konečná derivace $g'(x)$ pro každé $x \in [a,b] \setminus D$, kde $D \subset [a,b]$ má také nulovou míru. Označíme-li tedy $U = D \cup \bigcup_{k=1}^{m} D_k$, můžeme shrnout, že existují konečné derivace $g'(x), g'_k(x), k \in \mathbb{N}$, pro každé $x \in [a,b] \setminus U$. Podle Cvičení 2.29 (ii) má ovšem také množina U nulovou míru.

Pro libovolná $x \in [a,b] \setminus U$ a $\xi \in [a,b]$ taková, že $\xi \ne x$, máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k(\xi) - g_k(x)}{\xi - x} = \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x}.$$

Protože každý sčítanec v sumě na levé straně je neklesající, plyne odtud, že

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{g_k(\xi) - g_k(x)}{\xi - x} \le \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x}$$

platí pro libovolná $x \in [a,b] \setminus U$, $\xi \in [a,b] \setminus \{x\}$ a $n \in \mathbb{N}$. Limitním přechodem $\xi \to x$ dostaneme

$$s_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} g_k'(x) \leq g'(x) \quad \text{pro } x \in [a,b] \setminus U \text{ a } n \in \mathbb{N}.$$

Díky tomu, že $g_k'(x) \geq 0$ pro $x \in [a,b] \setminus U$ a $k \in \mathbb{N}$, je posloupnost $\{s_n'\}$ neklesající a ohraničená na $[a,b]$. Pro každé $x \in [a,b] \setminus U$ tedy existuje konečná limita

$$\lim_{n\to\infty} s_n'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x) \leq g'(x), \tag{2.25}$$

tj. řada $\sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x)$ konverguje pro s.v. $x \in [a,b]$.

b) Z druhé strany, pro každé $\ell \in \mathbb{N}$ existuje n_ℓ takové, že $0 \leq g(b) - s_{n_\ell}(b) < \dfrac{1}{2^\ell}$. Protože g i s_{n_ℓ} jsou neklesající na $[a,b]$, znamená to, že je také

$$0 \leq g(x) - s_{n_\ell}(x) < \frac{1}{2^\ell}$$

a tudíž

$$0 \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \big(g(x) - s_{n_\ell}(x)\big) \leq \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} = 1 \quad \text{pro } x \in [a,b].$$

Podle části a), kde uvažujeme posloupnost $\big\{g(x) - s_{n_\ell}(x)\big\}$ místo $\{g_k\}$, dostáváme odtud, že i řada $\sum_{\ell=1}^{\infty} \big(g'(x) - s_{n_\ell}'(x)\big)$ je konvergentní pro s.v. $x \in [a,b]$. Speciálně, musí platit $\lim_{\ell\to\infty} \big(s_{n_\ell}'(x) - g'(x)\big) = 0$ pro s.v. $x \in [a,b]$. Toto by ovšem nemohlo být pravda, kdyby nerovnost v (2.25) byla ostrá. Platí tedy rovnosti

$$\begin{aligned} f'(x) &= (f(x) - f(a))' = g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \big(f_k(x) - f(a)\big)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) \quad \text{pro s.v. } x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Tím je důkaz dokončen. $\square$

2.37 Věta. *Každá skoková funkce na* $[a,b]$ *je singulární na* $[a,b]$.

D ů k a z . Nechť $f\in\mathbb{B}[a,b]\setminus\mathbb{S}[a,b]$, $c\in\mathbb{R}$, posloupnosti $\{c_k\}\subset\mathbb{R}$ a $\{d_k\}\subset\mathbb{R}$ a prostá posloupnost $D=\{s_k\}\subset[a,b]$ jsou takové, že platí (2.19) a (2.21). Definujme pro $k\in\mathbb{N}$

$$v_k(x)=\begin{cases}0, & \text{když } a\le x<s_k,\\ |d_k|, & \text{když } x=s_k,\\ |c_k|+|d_k|, & \text{když } s_k<x\le b.\end{cases}$$

Každá funkce v_k je neklesající na $[a,b]$ a $v_k'(x)=0$ pro $x\ne s_k$. Dále

$$\sum_{k=1}^{\infty}v_k(x)=\sum_{a\le s_k<x}|c_k|+\sum_{a<s_k\le x}|d_k|\quad\text{pro } x\in[a,b].$$

Protože podle (2.21) řady $\displaystyle\sum_{a\le s_k<x}|c_k|$ a $\displaystyle\sum_{a<s_k\le x}|d_k|$ konvergují pro každé $x\in[a,b]$, je funkce

$$v(x)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k(x)$$

definovaná pro každé $x\in[a,b]$ a podle věty 2.36 platí

$$v'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k'(x)=0\quad\text{pro s.v. } x\in[a,b].$$

Protože pro všechna $x,y\in[a,b]$ taková, že $x\ne y$, zřejmě platí

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\le\left|\frac{v(x)-v(y)}{x-y}\right|,$$

plyne odsud, že také $f'(x)=0$ pro $x\notin D$.

V případě, že $f\in\mathbb{S}[a,b]$, je tvrzení věty evidentní. □

2.38 Poznámka. Příklad funkce, která je spojitá, neklesající a singulární na daném intervalu, je uveden v [14, V.9, cvičení 4].

2.6 Jordanův rozklad funkce s konečnou variací

2.39 Věta. *Každou funkci* $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *lze vyjádřit jako součet* $f=f_1+f_2$ *na* $[a,b]$, *kde* $f_1\in\mathbb{BV}[a,b]\cap\mathbb{C}[a,b]$ *a* $f_2\in\mathbb{B}[a,b]$.

Je-li $f=\widetilde{f}_1+\widetilde{f}_2$, *kde* $\widetilde{f}_1\in\mathbb{C}[a,b]\cap\mathbb{BV}[a,b]$ *a* $\widetilde{f}_2\in\mathbb{B}[a,b]$, *jiný takový rozklad, potom jsou funkce* $f_1-\widetilde{f}_1$ *a* $f_2-\widetilde{f}_2$ *konstantní na* $[a,b]$.

D ů k a z . a) Označme symbolem D množinu bodů nespojitosti funkce f, tj. $D=\{s_k\in[a,b]:k\in\mathbb{K}\}$, kde $\mathbb{K}=\{1,2,\dots,m\}$ pro nějaké $m\in\mathbb{N}$. nebo $\mathbb{K}=\mathbb{N}$. Definujme

$$f_2(x)=\sum_{a<s_k\le x}\Delta^- f(s_k)+\sum_{a\le s_k<x}\Delta^+ f(s_k)\quad\text{pro } x\in[a,b]. \tag{2.26}$$

Potom podle důsledku 2.27 platí

$$\sum_{x\,\in\,[a,b)}|\Delta^+ f(x)|+\sum_{x\,\in\,(a,b]}|\Delta^- f(x)|\le \operatorname{var}_a^b f$$

a podle definice 2.33 (ii) je tedy $f_2\in\mathbb{B}[a,b]$. Analogicky jako ve cvičení 2.34 (iii) (viz též (2.24)) dostaneme

$$f_2(t+)=\sum_{a<s_k\le t}\Delta^- f(s_k)+\sum_{a\le s_k\le t}\Delta^+ f(s_k)\quad\text{pro } t\in[a,b)$$

a

$$f_2(s-)=\sum_{a<s_k<s}\Delta^- f(s_k)+\sum_{a\le s_k<s}\Delta^+ f(s_k))\quad\text{pro } s\in(a,b]$$

Snadno tedy ověříme, že

$$\left.\begin{aligned}&\Delta^+ f_2(t)=\Delta^+ f(t)\ \text{ pro } t\in[a,b),\\&\Delta^- f_2(s)=\Delta^- f(s)\ \text{ pro } s\in(a,b].\end{aligned}\right\}\tag{2.27}$$

Tudíž

$$\big((f(t+)-f_2(t+)\big)-\big(f(t)-f_2(t)\big)=\Delta^+ f(t)-\Delta^+ f_2(t)=0$$

a

$$\big(f(s)-f_2(s)\big)-\big(f(s-)-f_2(s-)\big)=\Delta^- f(s)-\Delta^- f_2(s)=0.$$

Funkce $f_1 = f - f_2$ je tedy spojitá na $[a,b]$ a $f = f_1 + f_2$ na $[a,b]$.

b) Nechť $f = \widetilde{f}_1 + \widetilde{f}_2$, kde $\widetilde{f}_1 \in \mathbb{C}[a,b] \cap \mathbb{BV}[a,b]$ a $\widetilde{f}_2 \in \mathbb{B}[a,b]$. Potom

$$\big(f(t+) - \widetilde{f}_2(t+)\big) - \big(f(t) - \widetilde{f}_2(t)\big) = \Delta^+ f(t) - \Delta^+ \widetilde{f}_2(t) = 0$$

a

$$\big(f(s) - \widetilde{f}_2(s)\big) - \big(f(s-) - \widetilde{f}_2(s-)\big) = \Delta^- f(s) - \Delta^- \widetilde{f}_2(s) = 0$$

platí pro všechna $t \in [a,b)$ a $s \in [a,b)$. Vzhledem k (2.27) dostáváme, že platí

$$\Delta^+ \widetilde{f}_2(t) = \Delta^+ f_2(t) = \Delta^+ f(t) \quad \text{a} \quad \Delta^- \widetilde{f}_2(s) = \Delta^- f_2(s) = \Delta^- f(s)$$

pro $t \in [a,b)$, $s \in (a,b]$. Odtud podle definice 2.33 (ii) (viz cvičení 2.34 (ii), (2.21) a (2.24)) plyne, že

$$\widetilde{f}_2(x) = c + \sum_{a<s_k\le x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a\le s_k<x} \Delta^+ f(s_k) \quad \text{pro } x \in [a,b],$$

kde $c \in \mathbb{R}$ může být libovolné. Rozdíl $f_2 - \widetilde{f}_2 = f_2(a) - \widetilde{f}_2(a)$ je tedy konstantní na $[a,b]$. □

2.40 Poznámka. Podle věty 2.39 lze každou funkci s konečnou variací rozložit na součet funkce spojité a funkce skokové. Takový rozklad se nazývá *Jordanův rozklad* funkce s konečnou variací.

2.41 Definice. Každou funkci f_2 přiřazenou k f podle věty 2.39 nazýváme *skoková část* funkce f. Rozdíl $f - f_2$ nazýváme *spojitá část* funkce f. Skokovou, resp. spojitou část funkce f značíme obvykle f^{B}, resp. f^{C}.

Následující lemmátko se nám bude hodit v kapitole 5.

2.42 Lemma. *Nechť $f \in \mathbb{BV}[a,b]$, $D = \{s_k\}$ je její množina bodů nespojitosti v intervalu $[a,b]$. Pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in [a,b]$ definujme*

$$f^{\mathrm{B}}(x) = \sum_{a<s_k\le x} \Delta^- f(s_k) + \sum_{a\le s_k<x} \Delta^+ f(s_k)$$

a

$$f^{\mathrm{B}}_n(x) = \sum_{\substack{a<s_k\le x\\ k\le n}} \Delta^- f(s_k) + \sum_{\substack{a\le s_k<x\\ k\le n}} \Delta^+ f(s_k).$$

Potom je $f^{\mathrm{B}}_n \in \mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a platí

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}_a^b (f^{\mathrm{B}} - f^{\mathrm{B}}_n) = 0. \tag{2.28}$$

D ů k a z. Zřejmě je $f_n^{\mathrm{B}} \in \mathbb{S}[a,b]$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. V případě, že množina D je konečná, je $f_n^{\mathrm{B}} = f^{\mathrm{B}}$ na $[a,b]$ pro dostatečně velká n a tvrzení lemmatu je triviální. Předpokládejme tedy, že D je nekonečná. Potom

$$f^{\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}} = \sum_{\substack{a<s_k\leq x\\ k>n}} \Delta^- f(s_k) + \sum_{\substack{a\leq s_k<x\\ k>n}} \Delta^+ f(s_k)$$

a podle věty 2.35 dostaneme

$$\operatorname{var}_a^b (f^{\mathrm{B}} - f_n^{\mathrm{B}}) \leq \sum_{\substack{a<s_k\leq x\\ k>n}} |\Delta^- f(s_k)| + \sum_{\substack{a\leq s_k<x\\ k>n}} |\Delta^+ f(s_k)|. \tag{2.29}$$

Podle důsledku 2.27 je výraz na pravé straně nerovnosti (2.29) zbytek absolutně konvergentní řady, který ovšem konverguje k 0 při $n \to \infty$. Platí tudíž (2.28). □

2.43 Příklad. Vraťme se ještě k funkcím

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ x\,\sin(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } \frac{1}{n} \leq x \leq 2 \end{cases} \qquad \text{pro } n \in \mathbb{N}$$

a

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0, \\ x\,\sin(\dfrac{\pi}{x}) & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Z příkladu 2.12 víme, že $\operatorname{var}_0^2 f_n < \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Snadno ověříme, že $\{f_n\}$ konverguje k f stejnoměrně na $[0,2]$ a přitom podle příkladu 2.7 f nemá konečnou variaci na $[0,2]$.

2.7 Bodová konvergence

Podle příkladu 2.43 stejnoměrná konvergence posloupnosti funkcí s konečnou variací nemusí stačit k tomu, aby její limita měla také konečnou variaci. Z následující věty však uvidíme, že stejnoměrná ohraničenost variací členů dané posloupnosti už zaručí, že dokonce její bodová limita konečnou variaci má. (Pomocí argumentů použitých v příkladu 2.7 ověřte, že pro posloupnost funkcí $\{f_n\}$ z příkladů 2.12 a 2.43 platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{var}_0^2 f_n = \infty$ a $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{var}_0^2 f_n = \infty$.)

2.44 Věta. *Nechť pro funkci* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *existuje posloupnost funkcí* $\{f_n\}$ *taková, že*

$$\operatorname{var}_a^b f_n \le \varkappa < \infty \quad \textit{pro} \ \ n\in\mathbb{N}, \quad \textit{a} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ \ \textit{pro}\ x\in[a,b].$$

Potom je také $\operatorname{var}_a^b f \le \varkappa$.

D ů k a z . Pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ platí

$$V(f,\boldsymbol{\sigma}) = \lim_{n\to\infty} V(f_n,\boldsymbol{\sigma}) \le \varkappa,$$

a tudíž je také $\operatorname{var}_a^b f \le \varkappa$. □

2.45 Cvičení. Nechť

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-k} & \text{když } \ x = \frac{1}{k+1} \text{ pro nějaké } k\in\mathbb{N}, \\ 0 & \text{pro ostatní } \ x\in[0,1]. \end{cases}$$

Dokažte, že $f\in\mathbb{BV}[0,1]$.

Nyní zformulujeme a dokážeme Hellyovu větu, která bude užitečná např. pro důkaz totální spojitosti některých operátorů definovaných na prostoru $\mathbb{BV}[a,b]$. Hellyova věta říká, že z každé posloupnosti funkcí se stejnoměrně ohraničenou variací lze vybrat posloupnost bodově konvergující k funkci s konečnou variací.

2.46 Věta (HELLYOVA VĚTA O VÝBĚRU)**.** *Nechť* $\{f_n\}\subset\mathbb{BV}[a,b]$, $\varkappa\in\mathbb{R}$,

$$|f_n(a)| \le \varkappa \ \ \textit{a} \ \ \operatorname{var}_a^b f_n \le \varkappa \ \ \textit{pro všechna}\ n\in\mathbb{N}.$$

Potom existují funkce $f\in\mathbb{BV}[a,b]$ *a podposloupnost* $\{f_{n_k}: k\in\mathbb{N}\}$ *posloupnosti* $\{f_n\}$ *takové, že platí*

$$|f(a)|\le\varkappa, \quad \operatorname{var}_a^b f \le \varkappa \quad \textit{a} \quad \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad \textit{pro} \ \ x\in[a,b].$$

V důkazu využijeme následující dvě tvrzení.

Tvrzení 1. *Nechť*

$$|f_n(x)| \le M < \infty \quad \textit{na} \ \ [a,b] \quad \textit{pro všechna}\ n\in\mathbb{N}.$$

Potom pro každou spočetnou množinu $P\subset[a,b]$ *posloupnost* $\{f_n\}$ *obsahuje podposloupnost* $\{f_{n_k}: k\in\mathbb{N}\}$ *takovou, že*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p)\in\mathbb{R} \ \ \textit{pro všechna}\ p\in P.$$

D ů k a z . Nechť $P=\{p_k\}$. Máme $|f_n(p_k)|\le M<\infty$ pro všechna $n,k\in\mathbb{N}$. Podle Bolzanovy-Weierstraßovy věty pak existují posloupnost $\{n_{k,1}:k\in\mathbb{N}\}$ a $q_1\in\mathbb{R}$ tak, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,1}}(p_1)=q_1.$$

Podobně existují $\{f_{n_{k,2}}:k\in\mathbb{N}\}\subset\{f_{n_{k,1}}:k\in\mathbb{N}\}$ a $q_2\in\mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,2}}(p_2)=q_2\in\mathbb{R}, \text{ přičemž také } \lim_{k\to\infty} f_{n_{k,2}}(p_1)=q_1\in\mathbb{R}.$$

Takto pro každé $j\in\mathbb{N}\cap(1,\infty)$ najdeme posloupnosti

$$\{f_{n_{k,j}}:k\in\mathbb{N}\}\subset\{f_{n_{k,j-1}}:k\in\mathbb{N}\}$$

a čísla $q_j\in\mathbb{R}$ tak, že bude platit

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_{k,\ell}}(p_\ell)=q_\ell\in\mathbb{R} \quad \text{pro každé } \ell\in\{1,2,\dots,j\}.$$

Položme $f_{n_k}=f_{n_{k,k}}$ pro $k\in\mathbb{N}$. Potom

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p_j)=q_j\in\mathbb{R} \quad \text{pro } j\in\mathbb{N}.$$

□

Tvrzení 2. *Předpokládejme, že všechny funkce* f_n, $n\in\mathbb{N}$, *jsou neklesající na* $[a,b]$ *a že existuje* $M\in(0,\infty)$ *takové, že* $||f_n||\le M$ *pro každé* $n\in\mathbb{N}$. *Potom existují podposloupnost* $\{f_{n_k}:k\in\mathbb{N}\}$ *posloupnosti* $\{f_n\}$ *a funkce* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *neklesající na* $[a,b]$ *takové, že platí*

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)=f(x) \quad \textit{pro } x\in[a,b].$$

D ů k a z . Nechť $P=\big(\mathbb{P}\cap(a,b)\big)\cup[a]\cup[b]$ je množina racionálních čísel z intervalu (a,b) doplněná o body a,b. Množina P je spočetná a $[a,b]\setminus P\subset(a,b)$. Podle tvrzení 1 existují podposloupnost $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$ a zobrazení $\varphi:P\to\mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(p)=\varphi(p) \quad \text{pro } p\in P.$$

Zřejmě $\varphi(p')\le\varphi(p'')$ pro všechna $p',p''\in P$ taková, že $p'\le p''$. Dále definujme

$$\varphi(x)=\sup_{p\in P\cap[a,x)}\varphi(p) \text{ pro } x\in(a,b)\setminus P.$$

Potom φ je definovaná a neklesající na $[a, b]$ a

$$\varphi(x) = \lim_{\substack{p \to x- \\ p \in P}} \varphi(p) \quad \text{pro } x \in (a, b) \setminus P.$$

Ukážeme, že v každém bodě $x_0 \in (a, b),$ ve kterém je funkce φ spojitá, platí

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x_0) = \varphi(x_0). \tag{2.30}$$

Vskutku, nechť je dáno $\varepsilon > 0.$ Potom existuje $\delta_\varepsilon > 0$ takové, že

$$x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0 + \delta_\varepsilon \implies \varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Zvolíme-li $r' \in P \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0)$ a $r'' \in P \cap (x_0, x_0 + \delta_\varepsilon),$ bude platit

$$\varphi(x_0) - \varepsilon < \varphi(r') \le \varphi(x_0) \le \varphi(r'') < \varphi(x_0) + \varepsilon.$$

Dále zvolme k_ε tak, aby bylo

$$\varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') < \varphi(r') + \varepsilon$$

a

$$\varphi(r'') - \varepsilon < f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon$$

pro každé $k \ge k_\varepsilon.$ Potom pro každé $k \ge k_\varepsilon$ dostaneme také

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) - 2\,\varepsilon < \varphi(r') - \varepsilon < f_{n_k}(r') \le f_{n_k}(x_0) \\ \le f_{n_k}(r'') < \varphi(r'') + \varepsilon < \varphi(x_0) + 2\,\varepsilon \end{aligned}$$

čili platí (2.30).

Dokázali jsme tedy, že je-li Q množina bodů nespojitosti funkce φ v $(a, b),$ pak

$$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) = \varphi(x) \quad \text{pro } x \in [a, b] \setminus Q.$$

Podle věty 2.21 je množina Q spočetná. Můžeme tedy použít ještě jednou tvrzení 1 a dokázat tak existenci vybrané posloupnosti

$$\{f_{n_{k_\ell}} : \ell \in \mathbb{N}\} \subset \{f_{n_k} : k \in \mathbb{N}\},$$

která má limitu $\psi(x) \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in Q.$ Definujeme-li tedy

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{když } x \in [a, b] \setminus Q, \\ \psi(x), & \text{když } x \in Q, \end{cases}$$

bude

$$\lim_{\ell\to\infty} f_{n_{k_\ell}}(x) = f(x) \quad \text{pro } x\in[a,b],$$

a protože funkce, která je na intervalu $[a,b]$ bodovou limitou posloupnosti funkcí neklesajících na $[a,b]$, je také neklesající, tvrzení 2 je dokázáno. □

Důkaz věty 2.46

Pro každé $n\in\mathbb{N}$ a $x\in[a,b]$ položme

$$g_n(x) = \operatorname{var}_a^x f_n \quad \text{a} \quad h_n(x) = g_n(x) - f_n(x).$$

Máme $f_n = g_n - h_n$ a všechny funkce g_n, h_n jsou neklesající na $[a,b]$ (viz cvičení 2.15). Dále

$$\|g_n\| \le \operatorname{var}_a^b f_n \le \varkappa \quad \text{a} \quad \|h_n\| \le \|f_n\| + \|g_n\| \le 2\,\varkappa \quad \text{pro } n\in\mathbb{N}.$$

Podle tvrzení 2 existují funkce $g,h\in\mathbb{BV}[a,b]$ a posloupnost $\{n_k\}\subset\mathbb{N}$ takové, že

$$\lim_{k\to\infty} g_{n_k}(x) = g(x) \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} h_{n_k}(x) = h(x) \quad \text{pro každé } x\in[a,b].$$

Označme $f = g - h.$ Potom je

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \lim_{k\to\infty} \bigl(g_{n_k}(x) - h_{n_k}(x)\bigr) = g(x) - h(x) = f(x)$$

pro každé $x\in[a,b]$. Zřejmě je $|f(a)|\le\varkappa$. Konečně, podle věty 2.44 je také $\operatorname{var}_a^b f \le \varkappa$. Tím je důkaz dokončen. □

Výklad v této kapitole se opíral o monografie V. Jarníka *Diferenciální počet II* [14, Kapitola V] a *Integrální počet II* [15, Kapitola V] a dále o odstavec II.6 v monografii T. H. Hildebrandta *Theory of Integration* [11] a o kapitolu XIII v monografii Š. Schwabika *Integrace v* $\mathbb{R}$ (*Kurzweilova teorie*) [46], viz též kapitolu VI.2 v monografii A. N. Kolmogorova a S. V. Fomina *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy*. V těchto monografiích lze též nalézt i některé další podrobnosti.