Kapitola 1

Úvod

1.1 Obsah rovinných útvarů a momenty

Je známo (viz např. kapitolu I v [46]), že hodnota klasického Riemannova integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ nezáporné a spojité funkce f přes interval ohraničený $[a,b]$ je rovna obsahu útvaru M ohraničeného v rovině s osami x,y křivkou $y=f(x)$ a přímkami $y=0,\ x=a$ a $x=b$. K tomuto poznání nás vede následující úvaha:

Zvolme v intervalu $[a,b]$ body $\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m$ tak, aby platilo

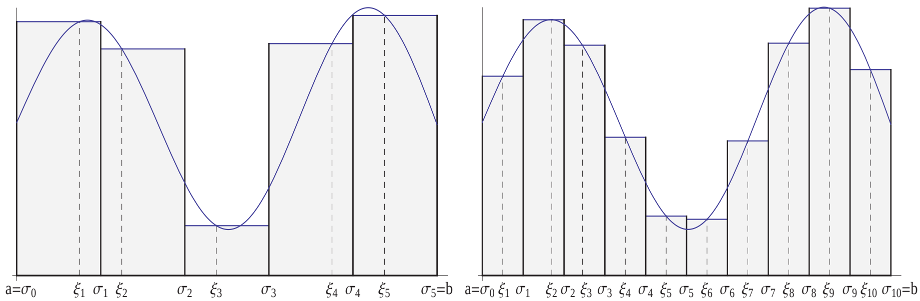
$$a=\sigma_0<\sigma_1<\dots<\sigma_m=b.$$

Množinu bodů $\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ s těmito vlastnostmi budeme nazývat *dělení intervalu* $[a,b]$ a značit $\boldsymbol{\sigma}$. Dále v každém intervalu $[\sigma_{j-1},\sigma_j],\ j=1,2,\dots,m,$ vyberme nějaký bod ξ_j. Tomuto bodu budeme říkat *značka intervalu* $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$. Vektor $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_m)\in\mathbb{R}^m$ nazveme *vektor značek* dělení $\boldsymbol{\sigma}$ a označíme ho symbolem $\boldsymbol{\xi}$. Plocha útvaru M se dá přibližně nahradit součtem ploch obdélníků vytvořených nad úsečkami $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$ s výškou $f(\xi_j)$, tj. součtem

$$S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})=\sum_{j=1}^{m} f(\xi_j)\,[\sigma_j-\sigma_{j-1}]. \tag{1.1}$$

Jak naznačují přiložené obrázky, přesnost aproximace bude tím lepší, čím jemnější bude dělení intervalu $[a,b]$ na podintervaly $[\sigma_{j-1},\sigma_j]$. Lze očekávat, že při vhodně definovaném limitním procesu založeném na zjemňování dělení intervalu se součty $S(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})$ (nezávisle na volbě odpovídajících vektorů značek) neomezeně blíží k nějakému reálnému číslu $S(M)$, které se rovná plošnému obsahu útvaru M. Prozatím se spokojme s intuitivní představou o takovém limitním procesu. Později ho popíšeme exaktněji. Jeho výsledkem je pojem Riemannova integrálu funkce f přes interval $[a,b]$ (neboli „od a do b“), který se značí symbolem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$ a definuje tak, že platí

$$S(M)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$



Riemannovy integrální součty

Podobného typu je i úloha určit *statický moment* rovinných a prostorových útvarů. Omezme se na ohraničenou úsečku $[a, b]$ ležící na reálné ose $\mathbb{R}$. Víme, že statický moment hmotného bodu $x \in [a, b]$ o hmotě μ vzhledem k počátku je dán výrazem $|x|\,\mu$. Je-li hmota úsečky soustředěna do konečného počtu bodů $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \dots, n$, přičemž hmota bodu x_i se rovná μ_i, pak statický moment úsečky $[a, b]$ vzhledem k počátku je roven součtu $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} |x_i|\,\mu_i$.

V obecném případě, kdy hmota úsečky není soustředěna do konečného počtu bodů, uvažujeme takto:

Mějme dáno dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ intervalu $[a, b]$ a nechť pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ je ξ_j značka intervalu $I_j = [\sigma_{j-1}, \sigma_j]$. Nechť pro každé $x \in [a, b]$ značí $\mu(x)$ hmotu úsečky $[a, x]$. Potom je zřejmě $\mu(\sigma_j) - \mu(\sigma_{j-1})$ hmota podintervalu I_j pro každé $j = 1, 2, \dots, m$. Představujme si, že hmota každého takového podintervalu je soustředěna do bodu jeho značky. Statický moment úsečky I_j je tedy přibližně roven výrazu $|\xi_j|\,[\mu(\sigma_j) - \mu(\sigma_{j-1})]$ a statický moment celé úsečky $[a, b]$ můžeme aproximovat součtem

$$S(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|\,[\mu(\sigma_j) - \mu(\sigma_{j-1})]. \tag{1.2}$$

Opět můžeme očekávat, že přiblížení ke skutečné hodnotě statického momentu bude tím lepší, čím jemnější bude dělení $\boldsymbol{\sigma}$, tj. čím více bude mít prvků. Je vidět, že pokud se při vhodné definici limitního procesu součty (1.2) blíží k nějakému číslu S, bude se toto číslo rovnat statickému momentu úsečky $[a, b]$ vzhledem k počátku. Značíme

$$S = \int_a^b |x|\, \mathrm{d}[\,\mu(x)\,]$$

a výrazu na pravé straně budeme říkat *Stieltjesův integrál* funkce vzhledem k μ přes interval $[a,b]$. Na místě funkce $x\in[a,b]\to|x|$ může být ovšem také libovolná „rozumná“ funkce f definovaná na intervalu $[a,b]$. Můžeme tedy takto určit také moment setrvačnosti úsečky $[a,b]$ jako $\displaystyle\int_a^b x^2\,\mathrm{d}\,[\,\mu(x)\,]$ a obecně moment k-tého řádu jako $\displaystyle\int_a^b |x|^k\,\mathrm{d}\,[\,\mu(x)\,]$.

1.2 Křivkové integrály

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL PRVNÍHO DRUHU

Nechť φ je spojité zobrazení uzavřeného a ohraničeného intervalu $[a,b]$ do třírozměrného vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Množina bodů

$$\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t))\in\mathbb{R}^3,$$

kde t probíhá interval $[a,b]$, se nazývá *cesta* v $\mathbb{R}^3$ definovaná na intervalu $[a,b]$ a značíme ji také symbolem φ. *Délkou cesty* φ rozumíme délku křivky definované grafem $\{\varphi(t):t\in[a,b]\}$ funkce φ a značíme ji symbolem $\Lambda(\varphi;[a,b])$.

Buď φ cesta v $\mathbb{R}^3$ definovaná na intervalu $[a,b]$, jejíž délka je konečná. Předpokládejme dále, že zobrazení $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ je prosté. Představme si, že φ je drát a $f(x)\in\mathbb{R}$ je jeho hustota v bodě x. Hmota části drátu odpovídající intervalu $[c,d\,]\subset[a,b]$ je tedy přibližně vyjádřena číslem $f(\varphi(\xi))\,\Lambda(\varphi;[c,d\,])$, kde ξ je nějaký bod intervalu $[c,d\,]$.

Nechť $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\ldots,\sigma_m\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ a $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_m)$ je vektor jeho značek, tj. $\xi_j\in[\sigma_{j-1},\sigma_j\,]$ pro $j=1,2,\ldots,m$.

Položme $v(t)=\Lambda(\varphi;[a,t])$ pro $t\in[a,b]$. Potom součet

$$\sum_{j=1}^{m} f(\varphi(\xi_j))\,[v(\sigma_j)-v(\sigma_{j-1})]$$

aproximuje hmotu celého drátu. Opět je přirozené očekávat, že tato aproximace bude tím přesnější, čím bude dělení jemnější. Vede-li takový limitní proces k jednoznačně určené limitní veličině M, bude tato veličina rovna hmotě celého drátu a budeme psát

$$M=\int_\varphi f\,\mathrm{d}\,s \quad \text{nebo také} \quad M=\int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\,v.$$

První symbol se nazývá *křivkový integrál prvního druhu* funkce f podél cesty φ, zatímco druhý symbol představuje ekvivalentní pojem *Stieltjesova integrálu* skalární funkce $f(\varphi)$ vzhledem ke skalární funkci $v(t) = \Lambda(\varphi; [a, t])$.

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL DRUHÉHO DRUHU

Mějme hmotný bod, který se pohybuje po cestě φ a v okamžiku $t \in [a, b]$ se nachází v bodě $\varphi(t)$. Dále nechť

$$f : x \in \varphi \subset \mathbb{R}^3 \to f(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x)) \in \mathbb{R}^3$$

je silové vektorové pole v $\mathbb{R}^3$. Potom $f(\varphi(t)) \in \mathbb{R}^3$ je vektor síly, která na tento hmotný bod působí v čase t.

Nechť $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ je dělení intervalu $[a, b]$ a $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ je vektor jeho značek. Potom skalární součin

$$f(\varphi(\xi_j)) \cdot \big[\varphi(\sigma_j) - \varphi(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{k=1}^{3} f_k(\varphi(\xi_j)) \big[\varphi_k(\sigma_j) - \varphi_k(\sigma_{j-1})\big]$$

představuje práci, kterou vykoná síla $f(\varphi(\xi_j))$, posune-li se náš hmotný bod z bodu $\varphi(\sigma_{j-1})$ do bodu $\varphi(\sigma_j)$. Součet

$$\sum_{j=1}^{m} f(\varphi(\xi_j)) \cdot \big[\varphi(\sigma_j) - \varphi(\sigma_{j-1})\big] = \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{m} f_k(\varphi(\xi_j)) \big[\varphi_k(\sigma_j) - \varphi_k(\sigma_{j-1})\big]$$

tedy aproximuje práci, kterou vykoná silové pole f při přesunu daného hmotného bodu po cestě φ od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = b$. Jestliže se hodnoty těchto součtů budou při zjemňování dělení σ „libovolně blížit“ k nějaké jednoznačně určené limitní hodnotě, bude tato hodnota rovna velikosti práce, kterou vykoná silové pole f při přesunu daného hmotného bodu po cestě φ od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = b$. Budeme ji značit

$$\int_{\varphi} f \quad \text{nebo také} \quad \int_a^b f(\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi = \sum_{k=1}^{3} \int_a^b f_k(\varphi)\,\mathrm{d}\,\varphi_k.$$

První symbol se nazývá *křivkový integrál druhého druhu* vektorové funkce f podél cesty φ, zatímco druhý symbol představuje ekvivalentní pojem *Stieltjesova integrálu* (složené) vektorové funkce $f(\varphi) : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ vzhledem k vektorové funkci $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^3$.