Kapitola 7

Aplikace Stieltjesova integrálu ve funkcionální analýze

V této kapitole nejprve ukážeme, jak se Stieltjesovy integrály uplatní při reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů na některých prostorech funkcí. Nejprve připomeňme několik základních pojmů.

7.1 Několik základních pojmů z funkcionální analýzy

(i) Nechť $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ jsou lineární (vektorové) prostory. Zobrazení

$$\beta : (x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} \to \beta(x,y) \in \mathbb{R}$$

se nazývá *bilineární*, jestliže platí

$$\begin{aligned}
&\beta(x_1+x_2,y) = \beta(x_1,y)+\beta(x_2,y) && \text{pro všechna } x_1,x_2 \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y},\\
&\beta(\lambda\, x,y) = \lambda\, \beta(x,y) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y},\ \lambda \in \mathbb{R},\\
&\beta(x,y_1+y_2) = \beta(x,y_1)+\beta(x,y_2) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X},\ y_1,y_2 \in \mathbb{Y},\\
&\beta(x,\lambda\, y) = \lambda\, \beta(x,y) && \text{pro všechna } x \in \mathbb{X},\ y \in \mathbb{Y},\ \lambda \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(ii) Prostory $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ tvoří *duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení* β, jestliže platí

$$\begin{aligned}
&\beta(x,y) = 0 \ \text{ pro všechna } x \in \mathbb{X} \implies y = 0,\\
&\beta(x,y) = 0 \ \text{ pro všechna } y \in \mathbb{X} \implies x = 0.
\end{aligned}$$

(iii) Lineárním zobrazením lineárního prostoru $\mathbb{X}$ do $\mathbb{R}$ říkáme *lineární funkcionály* na $\mathbb{X}$. Pro libovolné lineární funkcionály Φ, Ψ na $\mathbb{X}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{X}$ definujeme

$$(\Phi+\Psi)(x) = \Phi(x)+\Psi(x) \quad \text{a} \quad (\lambda\, \Phi)(x) = \lambda\, \Phi(x).$$

Množina lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{X}$ je zřejmě vzhledem k takto zavedeným operacím také lineární prostor. (Nulovým prvkem množiny lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{X}$ je přirozeně funkcionál $0 : x \in \mathbb{X} \to 0 \in \mathbb{R}$.)

(iv) Je-li $\mathbb{X}$ Banachův prostor s normou $x \in \mathbb{X} \to \|x\|_{\mathbb{X}}$, pak lineární funkcionál Φ na $\mathbb{X}$ je spojitý (vzhledem k topologii indukované normou $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$) právě tehdy, když je ohraničený, tj. existuje číslo $K \in [0, \infty)$ takové, že $|\Phi(x)| \le K\, \|x\|_{\mathbb{X}}$ platí pro každé $x \in \mathbb{X}$ (viz [16, IV.1.2]). Prostor spojitých lineárních funkcionálů na Banachově prostoru $\mathbb{X}$ značíme $\mathbb{X}^*$ a nazýváme *duální* (nebo též *adjungovaný prostor*) k $\mathbb{X}$. Předpisem $\Phi \in \mathbb{X}^* \to \|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{X}, \|x\|_{\mathbb{X}} \le 1\}$ je přirozeně definována norma na $\mathbb{X}^*$ a $\mathbb{X}^*$ je vzhledem k této normě také Banachův prostor (viz [16, IV.2.1]). Povšimněme si též, že zobrazení

$$x \in \mathbb{X},\ \Phi \in \mathbb{X}^* \to \Phi(x) \in \mathbb{R} \tag{7.1}$$

je bilineární.

Významnou roli v teorii spojitých lineárních operátorů hraje věta Hahnova-Banachova, kterou zde (společně s jedním jejím užitečným důsledkem) připomeneme v obecnosti postačující pro naše účely. Důkazy lze najít ve většině učebnic funkcionální analýzy, viz například [16, IV.1.3].

7.1 Věta (HAHN-BANACH)**.** *Nechť $\mathbb{X}$ je Banachův prostor a $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ je jeho podprostor. Potom pro každý spojitý lineární funkcionál Φ na $\mathbb{Y}$ existuje spojitý lineární funkcionál $\widetilde{\Phi}$ na $\mathbb{X}$ takový, že*

$$\widetilde{\Phi}(y) = \Phi(y) \quad \textit{pro}\ \ y \in \mathbb{Y} \quad \textit{a} \quad \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*} = \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}. \tag{7.2}$$

7.2 Věta. *Nechť $\mathbb{X}$ je Banachův prostor a $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ je jeho uzavřený podprostor. Potom pro každý prvek $z \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$ existuje spojitý lineární funkcionál Φ na $\mathbb{X}$ takový, že*

$$\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*} = 1, \quad \Phi(y) = 0 \quad \textit{pro}\ \ y \in \mathbb{Y} \quad \textit{a} \quad \Phi(z) = \operatorname{dist}(\mathbb{Y}, z),$$

kde $\operatorname{dist}(\mathbb{Y}, z)$ *značí vzdálenost prvku z od množiny $\mathbb{Y}$, tj.*

$$\operatorname{dist}(\mathbb{Y}, z) = \inf\{\|y - z\|_{\mathbb{X}} : y \in \mathbb{Y}\}.$$

Pomocí věty 7.2 snadno dokážeme následující tvrzení.

7.3 Důsledek. *Je-li $\mathbb{X}$ Banachův prostor a $\mathbb{X}^*$ jeho duální prostor, pak $\mathbb{X}, \mathbb{X}^*$ je duální pár vzhledem k bilineárnímu zobrazení* (7.1).

D ů k a z. a) Je-li $\Phi(x)=0$ pro každé $x\in\mathbb{X}$, znamená to, že Φ je nulový funkcionál, tj. $\Phi=0\in\mathbb{X}^*$.

b) Podle věty 7.2 pro libovolné $x\neq 0$ existuje funkcionál $\Phi\in\mathbb{X}^*$ takový, že $\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*}=1$ a $\Phi(x)=\|x\|$. (Položíme $\mathbb{Y}=\{0\}$.) Nemůže se tedy stát, že by bylo současně $\Phi(x)=0$ pro každé $\Phi\in\mathbb{X}^*$ a $x\neq 0$. □

7.2 Spojité lineární funkcionály na prostoru spojitých funkcí

Mezi významné výsledky funkcionální analýzy patří reprezentace spojitých lineárních funkcionálů na některých často používaných prostorech funkcí. Speciálně v případě prostoru $\mathbb{C}[a,b]$ funkcí spojitých na $[a,b]$ se dobře uplatní klasický (δ)RS-integrál.

7.4 Věta (RIESZ). *Φ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a,b]$ $(\Phi\in(\mathbb{C}[a,b])^*)$ právě tehdy, když existuje funkce $p\in\mathbb{BV}[a,b]$ taková, že $p(a)=0$ a*

$$\Phi(x) = (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p \quad \textit{pro každou funkci } x\in\mathbb{C}[a,b]. \tag{7.3}$$

Potom také platí $\|\Phi\|_{\mathbb{X}^*}=\operatorname{var}_a^b p$.

D ů k a z. a) Nechť $x\in\mathbb{C}[a,b]$ a $p\in\mathbb{BV}[a,b]$. Potom podle věty 5.54 existuje integrál $(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p$ a podle lemmatu 5.10 platí $\left|(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\right|\leq\left(\operatorname{var}_a^b p\right)\|x\|$. Zobrazení

$$\Phi_p\,:\,x\in\mathbb{C}[a,b]\to(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\in\mathbb{R}$$

je tedy ohraničený (tj. spojitý) lineární funkcionál na $\mathbb{C}[a,b]$, přičemž

$$\|\Phi_p\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*}\leq\operatorname{var}_a^b p. \tag{7.4}$$

b) Buď dán libovolný spojitý lineární funkcionál Φ na $\mathbb{C}[a,b]$.

Nechť $\mathbb{M}[a,b]$ značí množinu všech funkcí ohraničených na $[a,b]$. $\mathbb{M}[a,b]$ je zřejmě Banachův prostor vzhledem k operacím a normě definovaným stejně jako v $\mathbb{C}[a,b]$. Dále je zřejmé, že $\mathbb{C}[a,b]$ je uzavřený podprostor $\mathbb{M}[a,b]$.

Ve zbývající části tohoto důkazu budeme značit $\mathbb{X}=\mathbb{M}[a,b]$ a $\mathbb{Y}=\mathbb{C}[a,b]$.

Podle věty 7.1 můžeme funkcionál Φ rozšířit na celý prostor $\mathbb{X}$, tj. existuje funkcionál $\widetilde{\Phi}\in\mathbb{X}^*$ takový, že platí (7.2). Položme

$$p\,(a)=0 \quad \text{a} \quad p\,(t)=\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,t]}) \quad \text{pro } t\in(a,b]. \tag{7.5}$$

Dokážeme, že $p\in\mathbb{BV}[a,b]$. Buď dáno dělení $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$. Položme $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$. Potom

$$V(p,\boldsymbol{\sigma})=\sum_{j=1}^{m}|p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})|=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\,[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})],$$

kde $\alpha_j=\operatorname{sign}[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})]$ pro $j=1,2,\dots,m$. Vzhledem k definici (7.5) tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
V(p,\boldsymbol{\sigma})&=\alpha_1\,\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]})+\sum_{j=2}^{m}\alpha_j\,\Big[\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_j]})-\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_{j-1}]})\Big]\\
&=\alpha_1\,\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]})+\sum_{j=2}^{m}\alpha_j\,\widetilde{\Phi}(\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]})\\
&=\widetilde{\Phi}\Big(\alpha_1\,\chi_{[a,\sigma_1]}+\sum_{j=2}^{m}\alpha_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}\Big)=\widetilde{\Phi}(h),
\end{aligned}$$

kde $h(t)=\alpha_1\,\chi_{[a,\sigma_1]}(t)+\sum_{j=2}^{m}\alpha_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}(t)$ pro $t\in[a,b]$. Zřejmě $\|h\|=1$, a tedy $V(p,\boldsymbol{\sigma})\le\|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*}=\|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}$ pro každé $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$. To ovšem znamená, že

$$\operatorname{var}_a^b p\le\|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*}. \tag{7.6}$$

Zbývá dokázat, že platí (7.3) neboli $\Phi=\Phi_p$. Buďte dány libovolná $x\in\mathbb{X}$ a $\varepsilon>0$. Protože funkce x je stejnoměrně spojitá na $[a,b]$, existuje $\delta>0$ takové, že platí

$$\Big(t,s\in[a,b] \ \text{ a } \ |t-s|<\delta\Big)\implies|x(t)-x(s)|<\varepsilon.$$

Nechť $\boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b]$ je libovolné dělení takové, že $|\boldsymbol{\sigma}|<\delta$. Položme $m=\nu(\boldsymbol{\sigma})$.

$$x_{\boldsymbol{\sigma}}(t)=\begin{cases}x(\sigma_1) & \text{když } t=a,\\ x(\sigma_j) & \text{když } t\in(\sigma_{j-1},\sigma_j] \ \text{ a } \ j\in\{2,3,\dots,m\}.\end{cases}$$

Snadno ověříme, že $|x(t) - x_{\boldsymbol{\sigma}}(t)| < \varepsilon$ pro každé $t \in [a,b]$ neboli $\|x - x_{\boldsymbol{\sigma}}\| \le \varepsilon$. Dále

$$x_{\boldsymbol{\sigma}}(t) = x(\sigma_1)\,\chi_{[a]}(t) + \sum_{j=1}^{m} x(\sigma_j)\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]}(t) \quad \text{pro } t \in [a,b].$$

Odtud, vzhledem k definici (7.5), dostaneme

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\sigma}}) &= x(\sigma_1)\,\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_1]}) + \sum_{j=2}^{m} x(\sigma_j)\,\big[\widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_j]}) - \widetilde{\Phi}(\chi_{[a,\sigma_{j-1}]})\big] \\
&= x(\sigma_1)\,\big[p\,(\sigma_1) - p\,(a)\big] + \sum_{j=2}^{m} x(\sigma_j)\,\big[p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})\big] \\
&= \sum_{j=1}^{m} x(\sigma_j)\,\big[p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})\big] = S_{x\Delta p}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}}),
\end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m)$.

Protože existuje integrál $(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p$, můžeme zvolit $\boldsymbol{\rho} \in \mathscr{D}[a,b]$ a $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\rho}}$ tak, aby platilo $|\boldsymbol{\rho}| < \delta$ a

$$\Big|\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\rho}}) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| = \Big|S_{x\Delta p}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\eta}) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| < \varepsilon.$$

Protože máme také $\|x - x_{\boldsymbol{\rho}}\| \le \varepsilon$, dostáváme

$$\begin{aligned}
\Big|\Phi(x) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| &= \Big|\widetilde{\Phi}(x) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| \\
&\le \Big|\widetilde{\Phi}(x) - \widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\rho}})\Big| + \Big|\widetilde{\Phi}(x_{\boldsymbol{\rho}}) - (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\Big| \\
&< \|\widetilde{\Phi}\|_{\mathbb{X}^*}\|x - x_{\boldsymbol{\rho}}\| + \varepsilon \le \big(\|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*} + 1\big)\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\varepsilon > 0$ může být libovolně malé, znamená to, že platí

$$\Phi(x) = \Phi_p(x) = (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p \quad \text{pro } x \in \mathbb{C}[a,b].$$

Konečně, podle (7.4) a (7.6) je $\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} = \|\Phi\|_{\mathbb{Y}^*} = \operatorname{var}_a^b p$. □

Jak ukazuje následující věta, není přiřazení $\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^* \;\to\; p \in \mathbb{BV}[a,b]$ určeno vztahem (7.3) jednoznačně.

7.5 Lemma. *Nechť* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Potom platí*

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g = 0 \quad \textit{pro každou funkci } f \in \mathbb{C}[a,b] \tag{7.7}$$

tehdy a jen tehdy, když existuje nejvýše spočetná množina $D \subset (a,b)$ *taková, že*

$$g(t) = g(a) \quad \textit{právě tehdy, když } t \in [a,b] \setminus D. \tag{7.8}$$

D ů k a z . a) Předpokládejme, že platí (7.8). Položme $g^{\mathrm{C}}(t) = g(a)$ pro $t \in [a,b]$ a $g^{\mathrm{B}} = g - g^{\mathrm{C}}$. Potom $g^{\mathrm{B}}(t) \neq 0$ právě tehdy, když $t \in D$. (g^{C} je spojitá část funkce g a g^{B} je skoková část g.)

Nechť f je libovolná funkce spojitá na $[a,b]$. Potom zřejmě

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g^{\mathrm{C}} = 0. \tag{7.9}$$

Ukážeme, že platí také

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g^{\mathrm{B}} = 0. \tag{7.10}$$

Je-li $D = \emptyset$, pak (7.10) evidentně platí. Nechť D je jednobodová množina, tj. $D = \{d\}$, kde $d \in (a,b)$. Buď dáno $\varepsilon > 0$ a nechť $\delta > 0$ je takové, že

$$\Big(t, s \in [a,b] \ \text{ a } \ |t-s| < 2\,\delta\Big) \implies |f(t) - f(s)| < \varepsilon.$$

Pro libovolné značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$ takové, že $|\boldsymbol{\sigma}| < \delta$, pak máme

$$|S_{f\Delta g}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\xi})| = \begin{cases} 0 & \text{když } d \notin \boldsymbol{\sigma}, \\ \big|f(\xi_j) - f(\xi_{j+1})\big|\,|g^{\mathrm{B}}(d)| < \varepsilon\,\|g^{\mathrm{B}}\| & \\ & \text{když } d = \sigma_j \ \text{ pro nějaké } \ j \in \{0,1,\dots,\nu(\boldsymbol{\sigma})\}. \end{cases}$$

Je-li D jednobodová množina, pak (7.10) platí. Snadno si rozmyslíme, že odtud plyne, že (7.10) platí i v případě, že množina D je konečná.

Předpokládejme nyní, že D je spočetná, $D = \{d_k\}$. Podle věty 2.25 je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g^{\mathrm{B}}(d_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \big(|\Delta^-\,g^{\mathrm{B}}(d_k)| + |\Delta^+\,g^{\mathrm{B}}(d_k)|\big) < \infty.$$

Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Potom existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |g^{\mathrm{B}}(d_k)| < \varepsilon. \tag{7.11}$$

Rozložme funkci g^{B} na součet $g^{\mathrm{B}} = h + \widetilde{h}$, kde

$$h(t) = \begin{cases} g^{\mathrm{B}}(t) & \text{když } t \in \{d_1, d_2, \dots, d_N\}, \\ 0 & \text{když } t \in [a,b] \setminus \{d_1, d_2, \dots, d_N\} \end{cases}$$

a

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} g^{\mathrm{B}}(t) & \text{když } t \in \{d_k : k \geq N+1\}, \\ 0 & \text{když } t \in [a,b] \setminus \{d_k : k \geq N+1\}. \end{cases}$$

Podle předchozí části je

$$(\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, h = 0. \tag{7.12}$$

Na druhou stranu, pro každé značené dělení $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}) \in \mathscr{T}[a,b]$ máme podle (7.11)

$$\begin{aligned} \left|S_{f\Delta\widetilde{h}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})\right| &= \left|\sum_{j=1}^{\nu(\boldsymbol{\sigma})} f(\xi_j)\,[\widetilde{h}(\sigma_j) - \widetilde{h}(\sigma_{j-1})]\right| \\ &\leq 2\,\|f\| \sum_{k=N+1}^{\infty} |g^{\mathrm{B}}(d_k)| < 2\,\|f\|\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud, vzhledem k (7.9) a (7.12), plyne, že platí (7.10) a (7.7).

b) Nechť platí (7.7). Položme $f(t) = (\delta)\displaystyle\int_t^b (g(s) - g(a))\,\mathrm{d}\,s$ pro $t \in [a,b]$. Potom $f \in \mathbb{C}[a,b]$ a podle věty o integraci per-partes (věta 5.50) a věty o substituci (věta 5.45) je

$$\begin{aligned} (\delta)\int_a^b f \,\mathrm{d}\, g &= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - (\delta)\int_a^b g \,\mathrm{d}\, f \\ &= -f(a)\,g(a) + (\delta)\int_a^b g(t)\,\big(g(t) - g(a)\big)\,\mathrm{d}\,t \\ &= (\delta)\int_a^b \big(g(t) - g(a)\big)^2\,\mathrm{d}\,t. \end{aligned}$$

Dosazením $f(t)\equiv 1$ do (7.7) zjistíme, že musí platit $g(a)=g(b)$. Kdyby bylo $g(t_0)\neq g(a)$ v nějakém bodě $t_0\in(a,b)$ spojitosti funkce g, muselo by existovat $\Delta>0$ takové, že $\big(g(t)-g(a)\big)^2>0$ pro $t\in(t_0-\Delta,t_0+\Delta)$. Potom bychom ovšem měli také

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=(\delta)\int_a^b \big(g(t)-g(a)\big)^2\,\mathrm{d}\,t\geq(\delta)\int_{t_0-\Delta}^{t_0-\Delta}\big(g(t)-g(a)\big)^2\,\mathrm{d}\,t>0,$$

což je ve sporu s předpokladem (7.7). Vzhledem k větě 2.21 tedy platí (7.8). □

7.6 Poznámka. Jestliže $f\in\mathbb{C}[a,b]$, pak podle lemmatu 7.5 integrál $(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g$ se nezmění, změníme-li hodnoty $g(t)$ v nejvýše spočetně mnoha bodech $t\in(a,b)$. Speciálně nahradíme-li funkci g funkcí

$$\widetilde{g}(t)=\begin{cases}0 & \text{pro } t=a,\\ g(t+)-g(a) & \text{pro } t\in(a,b),\\ g(b)-g(a) & \text{pro } t=b,\end{cases}$$

bude platit

$$(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,g=(\delta)\int_a^b f\,\mathrm{d}\,\widetilde{g}\quad\text{pro každé } f\in\mathbb{C}[a,b].$$

Odtud okamžitě plyne, že pro každý spojitý lineární funkcionál Φ na prostoru $\mathbb{C}[a,b]$ existuje právě jedna funkce $p\in\mathbb{BV}[a,b]$ taková, že

$$\left.\begin{aligned}&p\,(a)=0,\ p\,(t+)=p\,(t)\ \text{pro}\ t\in(a,b)\\ \text{a}\\ &\Phi(x)=(\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\quad\text{pro každé } x\in\mathbb{C}[a,b].\end{aligned}\right\}\tag{7.13}$$

Funkce $p\in\mathbb{BV}[a,b]$, které jsou zprava spojité na (a,b) a takové, že $p\,(a)=0$, se nazývají *normalizované funkce s konečnou variací* a tvoří uzavřený podprostor v $\mathbb{BV}[a,b]$, který budeme značit $\mathbb{NBV}[a,b]$. Prostory $(\mathbb{C}[a,b])^*$ a $\mathbb{NBV}[a,b]$ jsou podle věty 7.4 a lemmatu 7.5 izomorfní, tj. zobrazení

$$\Phi\in\mathbb{X}^*\to p\in\mathbb{NBV}[a,b]\tag{7.14}$$

je vzájemně jednoznačné. To by zřejmě neplatilo, kdybychom $\mathbb{NBV}[a,b]$ nahradili prostorem $\mathbb{BV}[a,b]$ všech funkcí s konečnou variací na $[a,b]$. Na druhou stranu, $\mathbb{NBV}[a,b]$ lze nahradit např. prostorem funkcí s konečnou variací na $[a,b]$, které jsou spojité zleva na (a,b) a rovnají se nule v nějakém pevně daném bodě $c \in [a,b]$.

Z následujícího lemmatu vyplyne, že je-li $\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^*$ a $p \in \mathbb{NBV}[a,b]$ je určeno vztahem (7.14), pak $\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} = \|p\|_{\mathbb{BV}}$, tj. prostory $(\mathbb{C}[a,b])^*$ a $\mathbb{NBV}[a,b]$ jsou izometricky izomorfní.

7.7 Lemma. *Jestliže* $p \in \mathbb{NBV}[a,b]$ *a* $\Phi(x) = (\delta)\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p$ *pro* $x \in \mathbb{C}[a,b]$, *pak* $\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} = \|p\|_{\mathbb{BV}} = \operatorname{var}_a^b p$.

D ů k a z . Podle lemmatu 5.10 platí $\left|(\delta)\displaystyle\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p\right| \le \left(\operatorname{var}_a^b p\right)\|x\|$ neboli

$$\|\Phi\|_{(\mathbb{C}[a,b])^*} \le \|p\|_{\mathbb{BV}}. \tag{7.15}$$

Dokážeme, že existuje funkce $\widetilde{x} \in \mathbb{C}[a,b]$ taková, že

$$\|\widetilde{x}\| = 1 \quad \text{a} \quad (\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p = \operatorname{var}_a^b p. \tag{7.16}$$

Buď dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Zvolme dělení $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b]$ tak, aby bylo $\nu(\boldsymbol{\sigma}) \ge 2$ a

$$V(p,\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) > \operatorname{var}_a^b p - \varepsilon \quad \text{pro každé jeho zjemnění } \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{7.17}$$

Položme $m = \nu(\boldsymbol{\sigma})$. Vzhledem ke spojitosti funkce p na (a,b) zprava můžeme pro každé $j = 1,2,\dots,m-1$ najít bod $t_j \in (\sigma_j, \sigma_{j+1})$ takový, že

$$|p(t_j) - p(\sigma_j)| < \frac{\varepsilon}{m-1}. \tag{7.18}$$

Položme

$$\widetilde{x}(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}\big(p(\sigma_1) - p(a)\big) & \text{když } t \in [a,\sigma_1] \\ \operatorname{sign}\big(p(\sigma_{j+1}) - p(t_j)\big) & \text{když } t \in [t_j,\sigma_{j+1}],\ j \in \{1,2,\dots,m\}, \end{cases}$$

a dodefinujme funkci $\widetilde{x}$ na intervalech $[\sigma_j, t_j]$ lineárně a tak, aby byla spojitá na $[a,b]$. Zřejmě je $\|\widetilde{x}\| = 1$. Navíc

$$(\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p = \big|p(\sigma_1) - p(a)\big| + \sum_{j=1}^{m-1}\big|p(\sigma_{j+1}) - p(t_j)\big| + \sum_{j=1}^{m-1}(\delta)\int_{\sigma_j}^{t_j}\widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p.$$

Protože je $|\widetilde{x}(t)| \le 1$ pro $t \in [a,b]$, plyne odtud podle (7.18), že

$$\Big|(\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p\Big| \ge \big|p\,(\sigma_1) - p\,(a)\big| + \sum_{j=1}^{m} \big|p\,(\sigma_{j+1}) - p\,(t_j)\big| - \sum_{j=1}^{m-1} \big|p\,(t_j) - p\,(\sigma_j)\big|$$
$$= V(p,\boldsymbol{\rho}) - 2\sum_{j=1}^{m-1} \big|p\,(t_j) - p\,(\sigma_j)\big| > V(p,\boldsymbol{\rho}) - 2\,\varepsilon,$$

kde $\boldsymbol{\rho} = \{a, \sigma_1, t_1, \sigma_2\ \ldots, \sigma_{m-1}, t_{m-1}, b\}$. Podle (7.17) dostáváme

$$\Big|(\delta)\int_a^b \widetilde{x}\,\mathrm{d}\,p\Big| > V(p,\boldsymbol{\rho}) - 2\,\varepsilon > \operatorname{var}_a^b p - 3\,\varepsilon.$$

Protože ε může být libovolné kladné číslo, znamená to, že platí (7.16), a tudíž $\sup\limits_{\|x\| \le 1} |\Phi(x)| \ge \operatorname{var}_a^b p$. Odtud a z (7.15) plyne tvrzení lemmatu. □

7.8 Věta. *Zobrazení* $\Phi \in (\mathbb{C}[a,b])^* \to p \in \mathbb{NBV}[a,b]$, *kde* p *je určeno vztahem* (7.13), *je izometrický izomorfismus.*

7.9 Poznámka. Můžeme tedy ztotožnit $(\mathbb{C}[a,b])^*$ s prostorem $\mathbb{NBV}[a,b]$.

7.10 Cvičení. Dokažte, že platí :

Pro každý spojitý lineární funkcionál Φ *na prostoru* $\mathbb{C}[a,b]$ *existuje právě jedna funkce* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$p\,(b) = 0,\ \ p\,(t-) = p\,(t) \ \ \textit{pro}\ \ t \in (a,b)$$

a

$$\Phi(x) = (\delta)\int_a^b x\,\mathrm{d}\,p \quad \textit{pro každé}\ \ x \in \mathbb{C}[a,b].$$

Ve větě 7.8 *lze nahradit prostor* $\mathbb{NBV}[a,b]$ *prostorem funkcí zleva spojitých na* (a,b) *a takových, že* $p\,(b) = 0$.

7.3 Spojité lineární funkcionály na prostorech integrovatelných, resp. absolutně spojitých funkcí

Další dobře známé reprezentace spojitých lineárních prostorů využívají Lebesgueova integrálu:

Pro $\alpha\in[1,\infty)$ označme symbolem $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ prostor funkcí x měřitelných na $[a,b]$ a takových, že $\displaystyle\int_a^b |x(t)|^\alpha\,\mathrm{d}t<\infty$, přičemž norma na $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ je definována předpisem

$$\|x\|_\alpha=\left(\int_a^b |x(t)|^\alpha\,\mathrm{d}t\right)^{1/\alpha}\quad\text{pro }\ x\in\mathbb{L}^\alpha[a,b]$$

a rovnost $x=y$ pro $x,y\in\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ znamená, že $x(t)=y(t)$ pro s.v. $t\in[a,b]$. Jestliže položíme

$$\alpha^*=\begin{cases}\frac{\alpha}{\alpha-1} & \text{jestliže }\ \alpha>1,\\ \infty & \text{jestliže }\ \alpha=1,\end{cases}$$

pak obecný tvar spojitého lineárního funkcionálu na $\mathbb{L}^\alpha[a,b]$ je dán předpisem

$$\Phi\in(\mathbb{L}^\alpha[a,b])^*\iff\text{existuje }\ p\in\mathbb{L}^{\alpha^*}[a,b]\quad\text{takové, že}$$
$$\Phi(x)=\int_a^b p(t)\,x(t)\,\mathrm{d}t\quad\text{pro }\ x\in\mathbb{L}^\alpha[a,b],$$

kde $\mathbb{L}^\infty[a,b]$ je prostor funkcí esenciálně (v podstatě) omezených na $[a,b]$, tj. reálných funkcí f měřitelných na $[a,b]$ a takových, že platí $\sup\,\mathrm{ess}\,|f|<\infty$, kde $\sup\,\mathrm{ess}\,|f|$ je infimum množiny všech $A\in(0,\infty)$ takových, že množina

$$\{t\in[a,b]:|f(t)|>A\}$$

má nulovou míru.

Na prostoru $\mathbb{AC}[a,b]$ funkcí absolutně spojitých na intervalu $[a,b]$ definujeme normu předpisem

$$\|f\|_{\mathbb{AC}}=|f(a)|+\|f'\|_1\quad\text{pro }\ f\in\mathbb{AC}[a,b]$$

a $\mathbb{AC}[a,b]$ je pak Banachův prostor. Podle věty 3.17 představují zobrazení

$$f\in\mathbb{AC}[a,b]\to(f(a),f')\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]$$

a

$$(c,g)\in\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]\to f(x):=\,c+\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\in\mathbb{AC}[a,b]$$

vzájemně jednoznačný vztah mezi $\mathbb{AC}[a,b]$ a $\mathbb{R}\times\mathbb{L}^1[a,b]$. Lze ukázat, že obecný spojitý lineární funkcionál na prostoru $\mathbb{AC}[a,b]$ je dán předpisem

$$\Phi\in(\mathbb{AC}[a,b])^* \iff \text{existují } q\in\mathbb{R} \text{ a } p\in\mathbb{L}^\infty[a,b] \text{ takové, že}$$
$$\Phi(x)=q\,x(a)+\int_a^b p(t)\,x'(t)\,\mathrm{d}t \quad\text{pro}\quad x\in\mathbb{AC}[a,b].$$

Důkazy výše uvedených tvrzení a další podrobnosti lze nalézti ve většině učebnic funkcionální analýzy. Všeobecně dostupná je také on-line verze plzeňských skript [3].

7.4 Spojité lineární funkcionály na prostorech regulovaných funkcí

Naším cílem je nyní odvození obecného tvaru spojitých lineárních funkcionálů na některých podprostorech prostoru $\mathbb{G}[a,b]$. Pro začátek si připomeňme, že podle věty 6.28 je výraz

$$\Phi_\eta(x)=q\,x(a)+\int_a^b p\,\mathrm{d}\,x \tag{7.19}$$

definován pro každou funkci $x\in\mathbb{G}[a,b]$ a každý pár $\eta=(p,q)\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}$. Navíc, pro každé $\eta\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}$, předpis (7.19) definuje ohraničený (a tedy spojitý) lineární funkcionál na $\mathbb{G}[a,b]$ (viz větu 6.25).

Snadno ověříme, že předpisem

$$\eta=(p,q)\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}\to\|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}}=|q|+\|p\|_{\mathbb{BV}}$$

je definována norma na prostoru $\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}$ a $\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}$ je Banachův prostor vzhledem k této normě. Z formulí uvedených v příkladech 6.15 (viz též příklady 6.44, resp. cvičení 6.45) také snadno odvodíme následující tvrzení.

7.11 Lemma.

(i) *Pro libovolnou dvojici* $\eta=(p,q)\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}$ *platí*

$$\left.\begin{aligned}\Phi_\eta(1)&=q,\\ \Phi_\eta(\chi_{(\tau,b]})&=p(\tau), &&\textit{když}\ \tau\in[a,b),\\ \Phi_\eta(\chi_{[\tau]})&=0, &&\textit{když}\ \tau\in(a,b),\\ \Phi_\eta(\chi_{[b]})&=p(b).\end{aligned}\right\}\tag{7.20}$$

(ii) *Pro libovolnou funkci* $x \in \mathbb{G}[a,b]$ *platí*

$$\left.\begin{aligned} \Phi_\eta(x) &= x(a), && \text{když } p \equiv 0 \text{ na } [a,b],\ q=1,\\ \Phi_\eta(x) &= x(b), && \text{když } p \equiv 1 \text{ na } [a,b],\ q=1,\\ \Phi_\eta(x) &= x(\tau-), && \text{když } p = \chi_{[a,\tau)} \text{ na } [a,b],\ \tau\in(a,b],\ q=1,\\ \Phi_\eta(x) &= x(\tau+), && \text{když } p = \chi_{[a,\tau]} \text{ na } [a,b],\ \tau\in[a,b),\ q=1. \end{aligned}\right\} \tag{7.21}$$

Přímým důsledkem vztahů (7.20), (7.21) a lemmatu 4.19 je následující tvrzení.

7.12 Lemma.

(i) *Jestliže* $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ *a*

$$\Phi_\eta(x) = 0 \ \text{ pro každé } x \in \operatorname{Lin}\Big(1, \chi_{(\tau,b]}, \tau\in[a,b), \chi_{[b]}\Big),$$

pak $p(t) \equiv 0$ *na* $[a,b]$ *a* $q=0$.

(ii) *Jestliže* $x \in \mathbb{G}[a,b]$ *a*

$$\Phi_\eta(x) = 0 \ \text{ pro všechny dvojice } \eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R},$$

pak

$$x(a) = x(a+) = x(\tau-) = x(\tau+) = x(b-) = x(b) \tag{7.22}$$

platí pro $\tau \in (a,b)$.

7.13 Poznámka. Všimněme si, že vzhledem k třetímu vztahu v (7.20) můžeme v tvrzení (i) předešlého lemmatu nahradit množinu $\operatorname{Lin}\Big(1,\ \chi_{(\tau,b]}, \tau\in[a,b),\ \chi_{[b]}\Big)$ množinami

$$\operatorname{Lin}\Big(1,\ \chi_{[\tau,b]}, \tau\in[a,b),\ \chi_{[b]}\Big), \quad \text{resp.} \quad \operatorname{Lin}\Big(1,\ \tfrac{1}{2}\,\chi_{[\tau]} + \chi_{(\tau,b]}, \tau\in[a,b),\ \chi_{[b]}\Big).$$

Odtud okamžitě plyne též následující tvrzení, kde symboly $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$, $\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b]$ a $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$ byly definovány v (4.9).

7.14 Věta. *Každý z následujících párů prostorů*

$$(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\ \mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}),\ (\mathbb{G}_{reg}[a,b],\ \mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}),\ (\mathbb{G}_{\mathrm{R}}[a,b],\ \mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R})$$

tvoří duální pár vzhledem k bilineární formě

$$x \in \mathbb{G}[a,b],\ \eta \in \mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R} \to \Phi_\eta(x).$$

Na druhou stranu, máme také

7.15 Lemma. *Jestliže* Φ *je lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ *a*

$$p\,(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(t,b]}), & \textit{když } t \in [a,b), \\ \Phi(\chi_{[b]}), & \textit{když } t = b, \end{cases} \tag{7.23}$$

pak $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *a*

$$\left.\begin{aligned} &|p\,(a)| + |p\,(b)| + \operatorname{var}_a^b p \le 2\,\|\Phi\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*}, \\ &\quad \textit{kde } \|\Phi\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*} = \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],\ \|x\| \le 1\}. \end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

D ů k a z . Pro libovolné dělení $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ a libovolný vektor $(c_0, c_1, \ldots, c_m, c_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+2}$ platí

$$\begin{aligned} &\left|c_0\,p\,(a) + c_{m+1}\,p\,(b) + \sum_{j=1}^m c_j\,[p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1})]\right| \\ &\quad = \left|\Phi\Big(c_0\,\chi_{(a,b]} + c_{m+1}\,\chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]} + c_m\,\chi_{(\sigma_{m-1},b)}\Big)\right| = |\Phi(h)|, \end{aligned}$$

kde

$$h = c_0\,\chi_{(a,b]} + c_{m+1}\,\chi_{[b]} - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]} + c_m\,\chi_{(\sigma_{m-1},b)}.$$

Snadno ověříme, že bude-li $|c_j| \le 1$ pro $j = 0, 1, \ldots, m{+}1$, pak bude $\|h\| \le 2$. Položíme-li tedy

$$c_0 = \operatorname{sign} p\,(a),\ c_{m+1} = \operatorname{sign} p\,(b),\ c_j = \operatorname{sign}(p\,(\sigma_j) - p\,(\sigma_{j-1}))$$

pro $j = 1, 2, \ldots, m,$ získáme vztah

$$|p\,(a)| + |p\,(b)| + V(p,\boldsymbol{\sigma}) \le 2\,\|\Phi\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*} \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{D}[a,b].$$

Odtud už plyne, že platí i (7.24). □

Analogicky předchozímu lemmatu máme také

7.16 Lemma. *Nechť* Φ *je libovolný lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$. *Položme*

$$p(t) = \begin{cases} \Phi(\chi_{(a,b]}), & \textit{když } t = a, \\ \Phi(\frac{1}{2}\chi_{[t]} + \chi_{(t,b]}), & \textit{když } t \in (a,b), \\ \Phi(\chi_{[b]}), & \textit{když } t = b. \end{cases} \tag{7.25}$$

Potom $\operatorname{var}_a^b p \le \sup\{|\Phi(x)| : x \in \mathbb{G}_{reg}[a,b],\ \|x\| \le 1\} < \infty$, *tj.* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$).

D ů k a z. Nechť $\Phi \in (\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b])^*$, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_m\}$ je dělení intervalu $[a,b]$ a nechť reálná čísla c_j, $j = 1,2,\dots,m$, jsou taková, že je $|c_j| \le 1$ pro všechna $j = 1,2,\dots,m$. Potom

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^m c_j\,[p(\sigma_j) - p(\sigma_{j-1})] \\ &\quad = c_1\Big[\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} + \chi_{(\sigma_1,b]}) - \Phi(\chi_{(a,b]})\Big] \\ &\qquad + \sum_{j=2}^{m-1} c_j\Big[\Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]} + \chi_{(\sigma_j,b]}) - \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]} + \chi_{(\sigma_{j-1},b]})\Big] \\ &\qquad + c_m\Big[\Phi(\chi_{[b]}) - \Phi(\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} + \chi_{(\sigma_{m-1},b]})\Big] = \Phi(h), \end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

kde

$$\begin{aligned} h = \;& c_1\Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} + \chi_{(\sigma_1,b]} - \chi_{(a,b]}\Big] + c_m\Big[\chi_{[b]} - \tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} - \chi_{(\sigma_{m-1},b]}\Big] \\ & + \sum_{j=2}^{m-1} c_j\Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]} + \chi_{(\sigma_j,b]} - \tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]} - \chi_{(\sigma_{j-1},b]}\Big] \\ = \;& c_1\Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} - \chi_{(a,\sigma_1]}\Big] - c_m\Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} + \chi_{(\sigma_{m-1},b)}\Big] \\ & + \sum_{j=2}^{m-1} c_j\Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_j]} - \chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j]} - \tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{j-1}]}\Big] \\ = \;& -c_1\Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_1]} + \chi_{(a,\sigma_1)}\Big] - c_m\Big[\tfrac{1}{2}\chi_{[\sigma_{m-1}]} + \chi_{(\sigma_{m-1},b)}\Big] \\ & - \tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j]} - \tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_{j-1}]} - \sum_{j=2}^{m-1} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)} \\ = \;& -\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1} c_j\,\chi_{[\sigma_j]} - \tfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{m} c_j\,\chi_{[\sigma_{j-1}]} - \sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad -\sum_{j=1}^{m-1} \tfrac{c_j+c_{j+1}}{2}\chi_{[\sigma_j]} - \sum_{j=1}^{m} c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}\\
&= \quad -\sum_{j=1}^{m-1} \Big(\tfrac{c_j+c_{j+1}}{2}\,\chi_{[\sigma_j]} + c_j\,\chi_{(\sigma_{j-1},\sigma_j)}\Big) - c_m\,\chi_{(\sigma_{m-1},b)}.
\end{aligned}
$$

Z tohoto vyjádření snadno nahlédneme, že $h(a+) = -c_1,\ h(b-) = -c_m,$

$$h(\sigma_j-) = -c_j,\ h(\sigma_j+) = -c_{j+1},\ h(\sigma_j) = -\tfrac{1}{2}(c_j+c_{j+1}) \text{ pro } j=1,2,\dots,m$$

čili $h\in\mathbb{S}[a,b]\cap\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$ a $|h(t)|\le 1$ pro všechna $t\in[a,b]$.

Vzhledem k (7.26) tedy dostáváme, že nerovnost

$$
\begin{aligned}
&\sup\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{m} c_j\,\big[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})\big]\Big| : |c_j|\le 1,\ j=1,2,\dots,m-1\Big\}\\
&\qquad\qquad\le \sup\{|\Phi(x)| : x\in\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b],\ \|x\|\le 1\}
\end{aligned}
$$

platí pro každé dělení $\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_0,\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ intervalu $[a,b]$ a reálná čísla c_j, taková že je $|c_j|\le 1$ pro všechna $j=1,2,\dots,m.$ Zvolíme-li nyní

$$c_j = \operatorname{sign}\big[p\,(\sigma_j)-p\,(\sigma_{j-1})\big] \quad \text{pro } j=1,2,\dots,m,$$

zjistíme, že platí

$$V(p,\boldsymbol{\sigma}) \le \sup\{|\Phi(x)| : x\in\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b],\ \|x\|\le 1\} < \infty \quad \text{pro každé } \boldsymbol{\sigma}\in\mathscr{D}[a,b],$$

tj. $\operatorname{var}_a^b p \le \|\Phi\|^*_{\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]} < \infty.$ □

Prvním hlavním výsledkem této kapitoly je následující věta.

7.17 Věta. *Φ je lineární ohraničený funkcionál na $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ $(\Phi\in(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]))^*$ právě tehdy, když existuje dvojice $\eta=(p,q)\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}$ taková, že*

$$\Phi(x) = q\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro } x\in\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]. \tag{7.27}$$

Navíc, zobrazení

$$\eta\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R} \to \Phi_\eta\in(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^* \tag{7.28}$$

je izomorfismus.

D ů k a z. Nechť $\Phi \in (\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]))^*$ a nechť $\Phi_\eta \in (\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]))^*$ je funkcionál definovaný předpisem (7.19), kde $\eta = (p,q)$, $q = \Phi(1)$ a funkce p je definovaná v (7.23). Podle lemmatu 7.15 $\eta = (p,q) \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ a podle (7.20) a (7.23) máme

$$\begin{aligned} \Phi(1) &= q &&= \Phi_\eta(1), \\ \Phi(\chi_{(\tau,b]}) &= p(\tau) &&= \Phi_\eta(\chi_{(\tau,b]}) \quad \text{pro } \tau \in [a,b), \\ \Phi(\chi_{[b]}) &= p(b) &&= \Phi_\eta(\chi_{[b]}). \end{aligned}$$

Protože podle lemmatu 4.19 je každá funkce z $\mathbb{S}[a,b] \cap \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ lineární kombinací funkcí 1, $\chi_{(\tau,b]}$, $\tau \in [a,b)$, $\chi_{[b]}$, plyne odtud, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$. Konečně, protože podle lemmatu 4.18 je $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b] \cap \mathbb{S}[a,b]$ hustá množina v $\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$ a protože funkcionály Φ a Φ_η jsou spojité, plyne odtud, že $\Phi(x) = \Phi_\eta(x)$ pro každé $x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b]$.

Podle věty 7.14 je (7.28) vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R}$ na $(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*$. Dále podle věty 6.25 máme

$$|\Phi_\eta(x)| \le \big(|p(a)| + |p(b)| + \operatorname{var}_a^b p + |q|\big)\, \|x\| \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b],$$

a tudíž

$$\|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*} \le |p(a)| + |p(b)| + \operatorname{var}_a^b p + |q| \le 2\,\big(\|p\|_{\mathbb{BV}} + |q|\big) = 2\,\|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}}.$$

Na druhou stranu, podle (7.24) a podle lemmatu 7.15 je

$$|q| = |\Phi(1)| \le \|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*}$$

a

$$\|p\|_{\mathbb{BV}} \le \big(|p(a)| + |p(b)| + \operatorname{var}_a^b p\big) \le 2\,\|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*}.$$

Souhrnem máme

$$\frac{1}{2}\,\|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*} \le \|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}} \le 3\,\|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*}$$

čili, zobrazení

$$\eta \in \mathbb{BV}[a,b] \times \mathbb{R} \to \Phi_\eta \in (\mathbb{G}_{\mathrm{L}}[a,b])^*$$

je izomorfismus. $\square$

7.18 Věta. Φ *je lineární ohraničený funkcionál na* $\mathbb{G}_{reg}[a,b]$ $(\Phi\in(\mathbb{G}_{reg}[a,b])^*)$ *právě tehdy, když existuje dvojice* $\eta=(p,q)\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}$ *taková, že*

$$\Phi(x)=q\,x(a)+\int_a^b p\,\mathrm{d}x \quad \textit{pro} \ \ x\in\mathbb{G}_{reg}[a,b]. \tag{7.29}$$

Navíc, zobrazení

$$\eta\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}\to\Phi_\eta\in(\mathbb{G}_{reg}[a,b])^* \tag{7.30}$$

je izomorfismus.

D ů k a z. Nechť $\Phi\in(\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b])^*$ a $\Phi_\eta\in(\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b])^*$ je definován vztahem (7.19), kde $\eta=(p,q)$, $q=\Phi(1)$ a p je funkce definovaná vztahem (7.25). Podle lemmatu 7.16 je $\eta=(p,q)\in\mathbb{BV}[a,b]\times\mathbb{R}$ a podle (7.20) a (7.25) máme

$$\begin{array}{lll}
\Phi(1) & =q & =\Phi_\eta(1),\\
\Phi(\chi_{(a,b]}) & =p\,(a) & =\Phi_\eta(\chi_{(a,b]})\\
\Phi(\tfrac12\chi_{[\tau]}+\chi_{(\tau,b]}) & =p\,(\tau) & =\Phi_\eta(\tfrac12\chi_{[\tau]}+\chi_{(\tau,b]}) \quad \text{pro každé } \tau\in(a,b),\\
\Phi(\chi_{[b]}) & =p\,(b) & =\Phi_\eta(\chi_{[b]}).
\end{array}$$

Pomocí lemmatu 4.19 odtud odvodíme, že platí

$$\Phi(x)=\Phi_\eta(x) \quad \text{pro každé } x\in\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b].$$

Podle lemmatu 4.18 je ovšem množina $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]\cap\mathbb{S}[a,b]$ hustá v $\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$, a tudíž dostáváme konečně, že platí $\Phi(x)=\Phi_\eta(x)$ pro všechna $x\in\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b]$.

Podobně jako jsme dokázali analogickou nerovnost v závěru důkazu věty 7.17, dokázali bychom nyní, že platí také

$$\frac12\,\|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b])^*}\le\|\eta\|_{\mathbb{BV}\times\mathbb{R}}\le 3\,\|\Phi_\eta\|_{(\mathbb{G}_{\mathrm{reg}}[a,b])^*}. \qquad \square$$

7.19 Cvičení. Postupem použitým v důkazech vět 7.17 a 7.18 ukažte, že také platí:

(i) Φ *je lineární ohraničený funkcionál na*

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b]=\{x\in\mathbb{G}[a,b]: x(t-)=x(t)\ \textit{pro}\ t\in(a,b]\},$$

(viz (4.8)) *právě tehdy, když existuje funkce* $p\in\mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$\Phi(x)=p\,(b)\,x(b)-\int_a^b p\,\mathrm{d}\,x \quad \textit{pro} \ \ x\in\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{L}}[a,b].$$

(ii) Φ *je lineární ohraničený funkcionál na*

$$\widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b] = \{x \in \mathbb{G}[a,b] : x(t+) = x(t) \text{ pro } t \in [a,b)\},$$

(viz (4.8)) *právě tehdy, když existuje funkce* $p \in \mathbb{BV}[a,b]$ *taková, že*

$$\Phi(x) = p\,(a)\,x(a) + \int_a^b p\,\mathrm{d}\,x \quad \text{pro} \;\; x \in \widetilde{\mathbb{G}}_{\mathrm{R}}[a,b].$$

7.5 Aplikace v teorii distribucí

V tomto odstavci naznačíme možnosti použití KS-integrálu v teorii distribucí. Distribuce zde budeme chápat ve smyslu L. Schwartze. Připomeňme si nejprve několik základních pojmů a definic.

7.20 Definice. Množinu funkcí $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které mají pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ derivaci $\varphi^{(k)}$ k-tého řádu spojitou na $\mathbb{R}$ a takovou, že $\varphi^{(k)}(t) = 0$ pro všechny $t \in \mathbb{R} \setminus (a,b)$, označíme symbolem $\mathfrak{D}[a,b]$. Funkcím z $\mathfrak{D}[a,b]$ říkáme *testovací funkce* na $[a,b]$.

Množina $\mathfrak{D}[a,b]$ je lineární prostor vzhledem k přirozeným operacím sčítání a násobení skalárem. Množina $\mathfrak{D}[a,b]$ se stane topologickým vektorovým prostorem, zavedeme-li na ní topologii, ve které posloupnost $\{\varphi_n\} \subset \mathfrak{D}[a,b]$ konverguje k $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\| = 0 \quad \text{pro každé} \;\; k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Spojitým lineárním funkcionálem na topologickém vektorovém prostoru $\mathbb{X}$ rozumíme, analogicky jako v případě Banachových prostorů, lineární zobrazení prostoru $\mathbb{X}$ do $\mathbb{R}$, které je spojité vzhledem k topologii na $\mathbb{X}$.

Typickými příklady funkcí z prostoru $\mathfrak{D}[a,b]$ jsou funkce tvaru

$$\varphi_{c,d}(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{t-c} + \frac{1}{d-t}\right) & \text{pro} \;\; t \in (c,d), \\ 0 & \text{pro} \;\; t \in \mathbb{R} \setminus (c,d), \end{cases}$$

kde $[c,d]$ může být libovolný podinterval v $[a,b]$.

7.21 Definice. Spojité lineární funkcionály na topologickém vektorovém prostoru $\mathfrak{D}[a,b]$ se nazývají *distribuce* na $[a,b]$. Množina všech distribucí na $[a,b]$ je tedy duálním prostorem k $\mathfrak{D}[a,b]$. Značíme ji symbolem $\mathfrak{D}^*[a,b]$.

Pro danou distribuci $f \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ a testovací funkci $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$, hodnotu funkcionálu f na φ značíme symbolem $\langle f, \varphi \rangle$.

7.22 Poznámka. Je-li $f\in\mathbb{L}^1[a,b]$, pak předpisem

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{pro} \ \ \varphi\in\mathfrak{D}[a,b],$$

(kde je použit Lebesgueoův integrál) je definována distribuce na $[a,b]$, kterou budeme značit také symbolem f. Říkáme, že distribuce f je určena funkcí f.

Nulový prvek prostoru $\mathfrak{D}^*[a,b]$ je určen libovolnou měřitelnou funkcí, která se anuluje s.v. na intervalu $[a,b]$. Speciálně je-li $f\in\mathbb{G}[a,b]$, pak $f=0\in\mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t-)=f(s+)=0$ pro všechna $t\in(a,b]$ a $s\in[a,b)$. Tudíž, je-li $f\in\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$, pak $f=0\in\mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f(t)=0$ pro všechna $t\in[a,b]$. Pro libovolné distribuce $f,\ g\in\mathfrak{D}^*[a,b]$ rovnost $f=g$ znamená, že $f-g=0\in\mathfrak{D}^*[a,b]$. Z výše uvedeného plyne, že je-li $g\in\mathbb{L}^1[a,b]$, pak existuje nejvýše jedna funkce $f\in\mathbb{G}_{\text{reg}}[a,b]$ taková, že $f=g$ s.v. na $[a,b]$. Dále pro reálné funkce $f,\ g\in\mathbb{L}^1[a,b]$ platí rovnost $f=g$ ve smyslu $\mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když $f=g$ s.v. na $[a,b]$.

7.23 Definice. Pro danou distribuci $f\in\mathfrak{D}^*[a,b]$ definujeme její (*distributivní*) *derivaci* f' předpisem $\langle f',\varphi\rangle=-\langle f,\varphi'\rangle$ pro $\varphi\in\mathfrak{D}[a,b]$.

Podobně, pro každé $k\in\mathbb{N}$, $\langle f^{(k)},\varphi\rangle=(-1)^k\langle f,\varphi^{(k)}\rangle$ pro $\varphi\in\mathfrak{D}[a,b]$.

7.24 Poznámka. Distributivní derivace absolutně spojitých funkcí jsou určeny jejich klasickými derivacemi.

7.25 Poznámka. Definujme $H(t)=\begin{cases}0 & \text{pro } t<0,\\ \dfrac{1}{2} & \text{pro } t=0,\\ 1 & \text{pro } t>0.\end{cases}$

Nechť $\tau\in(a,b)$ a $h_\tau(t)=H(t-\tau)$ pro $t\in[a,b]$. Potom použitím vět 6.36 a 6.47 a s přihlédnutím k (6.11) a (6.15) dostaneme

$$\langle h_\tau',\varphi\rangle=-\langle h_\tau,\varphi'\rangle=-\int_a^b h_\tau\,\mathrm{d}\,\varphi=\int_a^b\varphi\,\mathrm{d}\,h_\tau=\varphi(\tau).$$

Funkce h_τ se nazývá *Heavisideova funkce* (se středem v bodě τ) a její distributivní derivace h_τ' se značí δ_τ a nazývá se *Diracova δ-distribuce* (se středem v bodě τ).

7.26 Věta. *Nechť $f\in\mathbb{L}^1[a,b]$. Potom její distributivní derivace f' je nulová distribuce tehdy a jen tehdy, když existuje konstanta $c\in\mathbb{R}$ taková, že $f(t)=c$ pro s.v. $t\in[a,b]$.*

D ů k a z . Jestliže $f(t)=c$ pro s.v. $t\in[a,b]$ a $\varphi\in\mathfrak{D}[a,b],$ pak

$$\langle f\,',\varphi\rangle = -\langle c,\varphi'\rangle = -c\int_a^b \varphi'(s)\,\mathrm{d}s = -c\,(\varphi(b)-\varphi(a)) = 0.$$

Naopak, nechť $\langle f,\varphi\,'\rangle=0$ pro každou $\varphi\in\mathfrak{D}[a,b].$ Nechť je dána libovolná testovací funkce $\rho\in\mathfrak{D}[a,b].$ Položme

$$\varphi(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_a^t \big(\rho(s)-a_0\,\Theta(s)\big)\,\mathrm{d}s & \text{pro } t\in[a,b],\\ 0 & \text{pro } t\in\mathbb{R}\setminus[a,b], \end{cases}$$

kde

$$a_0 = \int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{a} \quad \Theta(t) = \frac{\varphi_{a,b}(t)}{\displaystyle\int_a^b \varphi_{a,b}(s)\,\mathrm{d}s}.$$

Potom

$$\int_a^b \Theta(s)\,\mathrm{d}s = 1.$$

Odtud snadno plyne, že $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ a také že $\varphi\in\mathfrak{D}[a,b].$ Dále

$$\varphi\,'(t)=\rho(t)-a_0\,\Theta(t) \quad \text{pro } t\in[a,b].$$

Tudíž $0=\langle f,\varphi'\rangle=\langle f,\rho\rangle-\left(\int_a^b\rho(s)\,\mathrm{d}s\right)\langle f,\Theta\rangle.$ Pro každé $\rho\in\mathfrak{D}[a,b]$ tedy platí

$$\langle f,\rho\rangle = \left(\int_a^b \rho(s)\,\mathrm{d}s\right)\langle f,\Theta\rangle = \int_a^b c\,\rho(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde $c=\langle f,\Theta\rangle\in\mathbb{R}$ je konstanta. Tedy $f=c$ ve smyslu distribucí. □

7.27 Cvičení. Nechť $f\in\mathbb{L}^1[a,b]$ a $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Dokažte, že $f^{(k)}=0\in\mathfrak{D}^*[a,b]$ tehdy a jen tehdy, když existují $c_0,c_1,\dots,c_{k-1}\in\mathbb{R}$ takové, že

$$f(t) = c_0+c_1\,t+\cdots+c_{k-1}\,t^{k-1} \quad \text{pro s.v. } t\in[a,b].$$

Vážným problémem v teorii distribucí je otázka, jak definovat jejich součin. Následující dvě klasické definice se týkají jen jistých speciálních typů distribucí.

7.28 Definice. (i) Jestliže $f,\ g$ a $f\,g \in \mathbb{L}^1[a,b]$, pak

$$\langle f\,g, \varphi\rangle = \int_a^b f(t)\,g(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}\,t \quad \text{pro} \;\; \varphi \in \mathfrak{D}[a,b].$$

(ii) Jestliže $f \in \mathfrak{D}^*[a,b]$ a funkce g má na $[a,b]$ spojité derivace libovolného řádu, pak $\langle f\,g, \varphi\rangle = \langle f, g\,\varphi\rangle$.

Pro zkoumání diferenciálních rovnic s distributivními koeficienty je užitečné mít k dispozici rozumnou definici součinu distribucí f a g' (resp. f' a g), kde $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Definice 7.28 ovšem takové součiny definovat neumožňuje. Jejich smysluplnou definici můžeme formulovat teprve využitím KS-integrálu.

7.29 Definice. Jestliže $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$, pak definujeme

$$\langle f'\,g, \varphi\rangle = \int_a^b \varphi\,g\;\mathrm{d}\,f \quad \text{a} \quad \langle f\,g', \varphi\rangle = \int_a^b \varphi\,f\;\mathrm{d}\,g.$$

7.30 Lemma. *Nechť* $f \in \mathbb{G}[a,b]$ *a* $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ *splňují*

$$\Delta^+ f(t)\,\Delta^+ g(t) = \Delta^- f(t)\,\Delta^- g(t) \quad \textit{pro každé } t \in (a,b). \tag{7.31}$$

Potom

$$f'\,g = F', \quad \textit{kde } F(t) = \int_a^t g\,\mathrm{d}\,f \;\; \textit{pro } t \in [a,b] \tag{7.32}$$

a

$$f\,g' = G', \quad \textit{kde } G(t) = \int_a^t f\,\mathrm{d}\,g \;\; \textit{pro } t \in [a,b]. \tag{7.33}$$

D ů k a z. Použitím věty o substituci (věta 6.47) a věty o integraci per-partes (věta 6.36) pro libovolné $\varphi \in \mathfrak{D}[a,b]$ dostaneme

$$\begin{aligned}\langle f'\,g, \varphi\rangle &= \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^t g\,\mathrm{d}\,f\Big] = -\int_a^b \varphi'(t)\Big(\int_a^t g\,\mathrm{d}\,f\Big)\,\mathrm{d}\,t \\ &= \langle\Big(\int_a^t g\,\mathrm{d}\,f\Big)', \varphi\rangle,\end{aligned}$$

tj. platí (7.32). Vztah (7.33) se dokazuje analogicky. □

7.31 Důsledek. Jestliže funkce $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$ splňují (7.31), pak

$$(f\,g)' = f\,g' + f'\,g.$$

Důkaz. Podle definice 7.23, věty o integraci per-partes (viz větu 6.36) a lemmatu 7.30 dostáváme

$$\begin{aligned}\langle (f\,g)', \varphi\rangle &= -\langle f\,g, \varphi'\rangle \\ &= -\int_a^b \varphi' f\,g\,\mathrm{d}\,t = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}\big[f(t)\,g(t) - f(a)\,g(a)\big] \\ &= \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}\Big[\int_a^t g\,\mathrm{d}\,f + \int_a^t f\,\mathrm{d}\,g\Big] = \langle f\,g', \varphi\rangle + \langle f'\,g, \varphi\rangle.\end{aligned}$$ □

7.32 Poznámka. Nechť $f \in \mathbb{G}[a,b]$ a $g \in \mathbb{BV}[a,b]$. Podmínka (7.31) je pak zřejmě splněna např. v následujících případech:

(i) obě funkce jsou regulární (viz poznámku 4.17),

(ii) alespoň jedna z nich je spojitá na (a,b),

(iii) jedna z nich zleva spojitá na (a,b) a druhá je zprava spojitá na (a,b).

7.33 Cvičení. Dokažte, že jestliže $\tau \in (a,b)$ a h_τ, resp. δ_τ jsou Heavisideova funkce, resp. Diracova distribuce se středem v τ, pak $h_\tau\,\delta_\tau = \delta_\tau/2$.

(Návod: Použijte cvičení 6.34.)